

冷却结构对连铸结晶器铜板应力分布的影响

孟祥宁, 王卫领, 朱苗勇

(东北大学 材料与冶金学院, 沈阳 110819)

摘 要: 建立板坯连铸结晶器三维有限元热弹塑性结构模型, 计算铜板等效应力及冷却结构对其影响。研究表明, 冷却结构和传热条件决定铜板热面特定力学行为规律, 宽面和窄面热面中心线应力分布规律相似, 冷却结构尺寸并不改变铜板横截面应力分布的趋势。铜板厚度每增加 5 mm, 结晶器上部应力仅增大 5~7 MPa, 而镍层区域变化明显, 宽面和窄面最大增幅分别约为 60 MPa 和 50 MPa; 镍层每加厚 1 mm, 宽面和窄面镍层中上部应力提升约 20 MPa, 而窄面镍层下部应力下降较急剧; 当水流量和水温差恒定时, 水槽深度增加, 热面中心线应力减小, 每加深 2 mm, 结晶器上部下降不足 5 MPa, 而下部变化较大, 最大量达 20 MPa。

关键词: 板坯连铸; 结晶器; 冷却结构; 铜板应力分布; 有限元分析

中图分类号: TF777

文献标志码: A

Effect of cooling structure on stress distribution of continuous casting mold copper plates

MENG Xiang-ning, WANG Wei-ling, ZHU Miao-yong

(School of Materials and Metallurgy, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: A three-dimensional finite-element thermal-stress model of slab continuous casting mold was conducted to predict the equivalent stress on copper plates and its change caused by cooling structure. The results show that special stress distribution of hot surface is mainly governed by the cooling structure and heat-transfer conditions in mold, the stress distributions of hot surface centricities at wide and narrow faces are similar, and the stress trend of cross-sections of copper plates does not change with the geometry of cooling structure. The stress at upper surface of mold only increases 5~7 MPa with the thickness of copper plate increasing 5 mm, and that in regions with nickel layers is obviously promoted to the maximums of 60 MPa and 50 MPa on wide and narrow faces, respectively. In the upper nickel layers, the stress increases approximately 20 MPa with the thickness increases of nickel layers by 1 mm, while represents rapid decline on narrow faces in lower nickel layers. The stress is depressed with the depth of cooling water slots with constant flow rate and temperature difference of cooling water, and changed less than 5 MPa with each deepening 2 mm in upper mold and maximum in lower mold can be up to 20 MPa. Also, a series of rational suggestions are proposed for optimizing cooling structure in order to reduce the abrupt stress and stress concentration.

Key words: slab continuous casting; mold; cooling structure; stress distribution; finite element analysis

连续铸钢凝固显热和潜热大量散失于一次冷却区, 使结晶器承受巨大热负荷, 由此产生热应力诱发结晶器铜板的弹性和塑性变形及高温蠕变等, 一方面

缩短了设备使用寿命, 另一方面铜板的高温形变导致结晶器壁与初始凝固坯壳间接触状态变化, 虽然这种变形量相对较小, 仍显著制约传热的均匀性和稳定性,

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51004031); 国家杰出青年科学基金资助项目(50925415); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20100042120012); 中央高校基本科研业务费项目(N090402022)

收稿日期: 2011-08-08; **修订日期:** 2011-12-15

通信作者: 孟祥宁, 副教授, 博士; 电话: 024-83671706; E-mail: xn_meng@126.com

从而影响浇铸操作和铸坯质量^[1-4]。因此,揭示特定温度、载荷下结晶器铜板应力分布规律,并分析冷却结构对其影响是维持连铸顺行和改善产品质量的关键,也是深入研究结晶器冶金理论的基础。尽管以往许多研究更关注于凝固坯壳在冷却作用下的传热、凝固和收缩等行为机理^[5-8],并基于此为优化冷却机制和设计适宜锥度等提供依据,但作为冶金过程大型反应器的连铸结晶器,其结构却很难轻易更改,而其受热和机械应力影响又非常显著,则掌握结晶器铜板应力分布规律,并阐明冷却结构对其影响,更是改进浇铸操作和改善设备结构的前提和保障。O'CONNOR 和 DANTZIG^[9]通过有限元方法确定漏斗型薄板坯连铸结晶器铜板温度,由此计算铜板热力学行为状态,分析浇铸过程参数对结晶器使用寿命的影响。PARK 等^[10-11]采用间接耦合法,将基于实测的热流密度施于薄板坯连铸结晶器铜板弹塑性力学行为分析,模拟铜板变形和残余应力,阐明漏斗型和直型结晶器热力学行为规律。LIU 和 ZHU^[12]建立三维有限元分析模型,计算常规板坯连铸结晶器铜板温度分布和变形,考察

冷却结构对铜板热力学行为影响规律,并提出冷却结构优化建议。THOMAS 等^[13-14]采用稳态传热有限元模型,计算板坯连铸结晶器铜板热面和角部温度分布,提出确定角部温度的经验方程,并基于此优化结晶器冷却水槽设计。迄今的研究大多偏重对结晶器温度的分析及由热载荷等引起的变形的计算,冷却结构的设计和优化也均以此为依据,缺乏对串联热行为和力学行为的结晶器铜板应力状态这一关键环节的考察,本文作者建立板坯连铸结晶器三维有限元实体模型,结合浇铸操作实际,计算结晶器铜板应力状态,并考察结晶器冷却结构参数对其影响。

1 计算模型

1.1 实体模型

图1所示为板坯连铸结晶器物理模型示意。为强化一次冷却效果,窄面近角部水槽向宽面倾斜 15° ,该特点在以往研究中常被忽略,而其对铜板角部温度

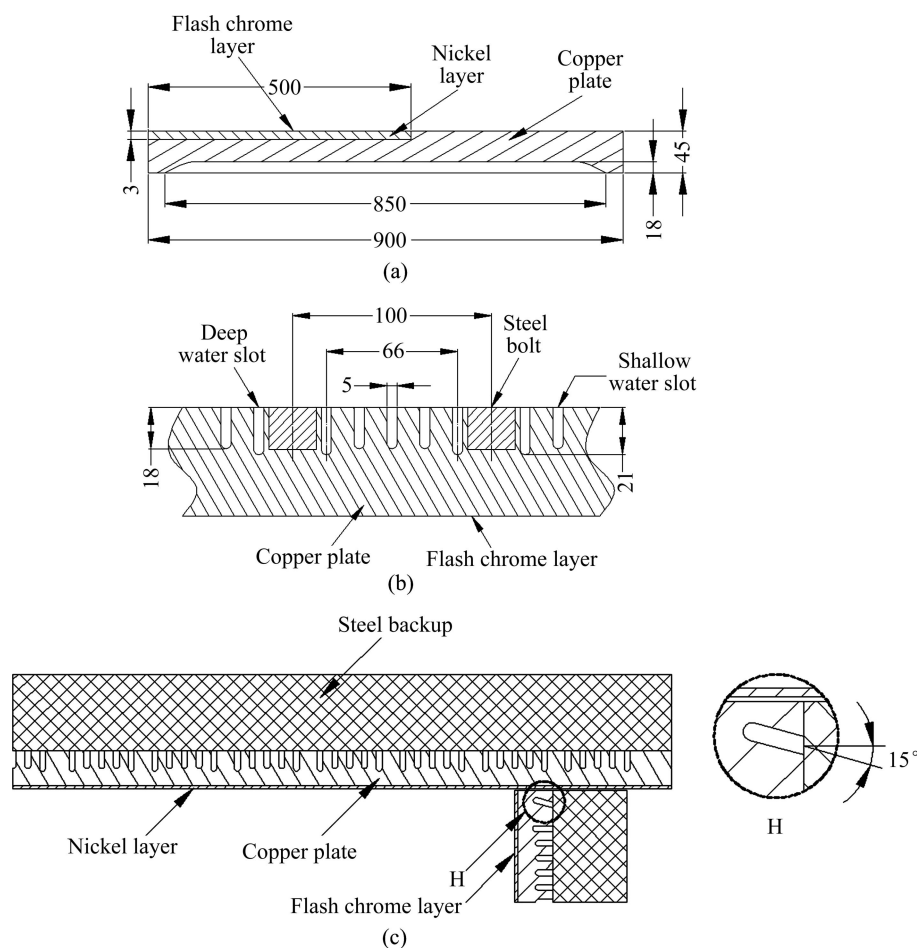


图1 板坯连铸结晶器物理模型

Fig. 1 Schematic representation of physical model of slab continuous casting mold (mm): (a) Longitudinal section of copper plate; (b) Transverse section of water slot; (c) Top view of quarter mold (computational domain)

影响明显。考虑对称性,选取四分之一结晶器建立三维有限元实体模型,并由有限元商用软件 ANSYS 完成实体模型网格划分,为确保精度,镍层、冷却水槽和水穴等位置均实施网格加密,由正常网格的 10 mm 尺寸加密至 1 mm,如图 2 所示。

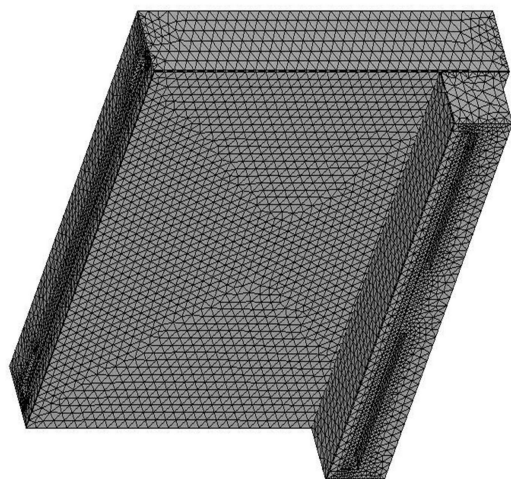


图 2 结晶器有限元实体模型

Fig. 2 Meshed entity model for finite-element analysis

1.2 数学模型

因铜板与钢制背板间连接较为复杂,计算基本假设为:1) 铜板与背板结合紧密,忽略固定螺栓引起的内应力;2) 铜板和背板的力学和热属性为各向同性;3) 背板温度低,刚性大,考虑背板为弹性,铜板为弹塑性。结晶器铜板热弹塑性应力应变本构方程表示为

$$\sigma_{ij} = 2L_1\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}[L_2\varepsilon_{kk} - (2L_1 + 3L_2)\beta\Delta T] \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 为应力, Pa; ε_{ij} 为应变; L_1 和 L_2 为 Lamé 系数; ε_{kk} 为节点正应变; β 为热膨胀系数, $^{\circ}\text{C}^{-1}$; ΔT 为温度变化量, $^{\circ}\text{C}$; δ_{ij} 为 Kronecker 函数。其中,铜板应力应变包含弹性、塑性和热应变:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\varepsilon_t = \delta_{ij}\beta\Delta T \quad (3)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon_0}{\Phi(\varepsilon_0)} S_{ij} \quad (4)$$

$$\Phi(\varepsilon_0) = \sigma_y + \frac{EE_t}{E - E_t} \varepsilon_0 \quad (5)$$

式中: ε_e 、 ε_p 和 ε_t 为弹性、塑性和热应变; ε_0 为有效应变; S_{ij} 为偏斜张量; E 为弹性模量, Pa; E_t 为线性硬化模量, Pa; σ_y 为屈服强度, Pa。

求解边界条件: 1) 宽面背板冷面固定; 2) 宽面

和窄面中心线剖面固定; 3) 距结晶器入口和出口 100 mm 处,窄面背板冷面夹紧力为 60.1 MPa 和 74.9 MPa; 4) 铜板内壁承受钢水静压力。

2 计算结果及分析

本研究以文献[3]中由上述实体模型计算得到的结晶器铜板温度场作为热力载荷,并通过 ANSYS 软件将实体模型转换为结构模型模拟铜板力学行为,研究对象为 1.6 m/min 拉速浇铸 SPHC([C]≤0.08%)钢板坯连铸结晶器,涉及的操作参数和材料属性等参见文献[12]。文献[3]中热电偶位置温度计算结果与实测值相吻合,证实模型可靠。此外,窄面角部螺栓位置无冷却水通过,温度略有升高,随后在近宽面深水槽冷却作用下降低,而靠近宽面的窄面铜板无冷却水槽,该处温度部分回升,因而将结晶器窄面边缘水槽设计为斜槽,以强化窄面角部冷却^[3],则本研究严格依照设计图纸建立实体模型,真实考虑窄面近角部冷却水槽倾斜角度,考察冷却结构对结晶器铜板应力分布的影响。

2.1 热面应力分布

常用金属材料应力状态遵循 Von Mises 屈服准则^[15],则计算结晶器铜板热面 Von Mises 等效应力分布如图 3 所示。因铜和镍热物性参数差别较大,铜板热面上、下两部分应力截然不同,上部应力范围为 270~350 MPa,下部镍层位置应力明显偏高,而镍层与铜板变形的非一致性使两者交界线处产生显著应力集中,应力骤然提升,最大应力甚至突破 900 MPa;宽面距中心线 650 mm 以外范围(即与窄面侧面接触区域)因未与凝固坯壳直接接触,受材料热物性参数影响不明显,应力较小且变化均匀平缓,应力变化范围为 100~200 MPa,并形成多个等应力环,而窄面因与凝固坯壳全部接触,未有类似情形;远角部区域的应力高于近角部区域的,这是由于角部凝固坯壳收缩形成气隙,热通量减小,角部铜板热面温度降低,等效应力随之变小;宽面上部热面等应力曲线波动较大,是由铜板与凝固坯壳间接触状态不稳定所致,而这与相对较宽的宽面未设计倒锥度及液态润滑渣膜和气隙厚度不均匀有关,近角部应力逐渐降低,受角部传热影响呈现较为均匀应力梯度;窄面上部靠近中心线区域等应力曲线平缓,是由于相对较窄的窄面设计有倒锥度,铜板与凝固坯壳间接触状态较均匀,而窄面近角部区域仍受凝固坯壳收缩形成气隙影响显著,应力波

动较为明显,不仅出现均匀应力梯度,还形成多个等应力环;宽面和窄面下部附着于铜板上的固态渣膜厚度变化近似恒定,气隙均匀,铜板与凝固坯壳间接触状态稳定,应力曲线平滑,并呈现规则应力梯度,仅在靠近镍层与铜板交界线位置附近形成封闭等应力环,且应力由远角部至近角部逐渐降低。

尽管为减少铜板磨损,结晶器下部镀有3 mm厚镍层,却使镍层与铜板交界线位置产生应力集中,这对结晶器使用寿命极不利。因此,建议在保证高耐磨性前提下,选择与铜热物性参数接近的金属材料替代镍,或在结晶器中部设计一定范围的铜镍过渡区域,以缓解应力突变。

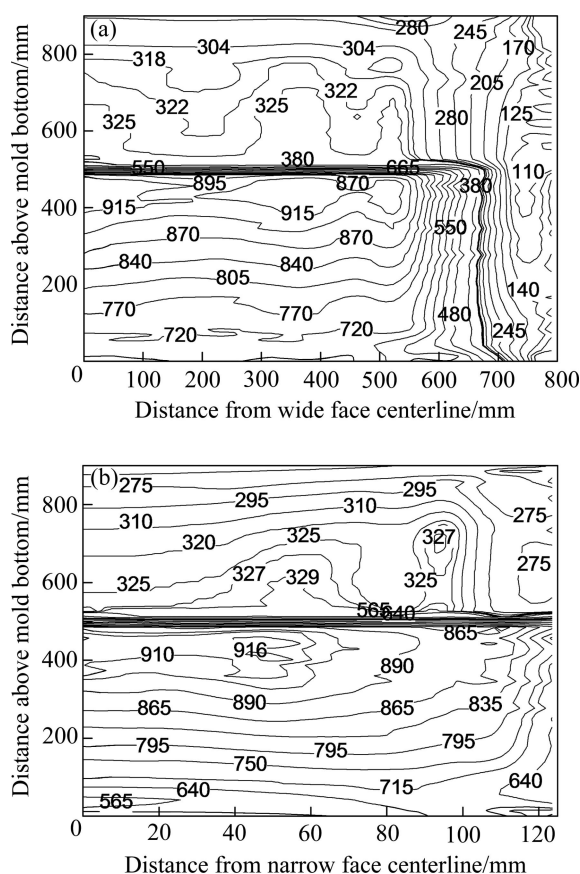


图3 铜板热面等效应力分布

Fig. 3 Von Mises stress distributions on hot surface of copper plates (MPa): (a) Wide face; (b) Narrow face

计算表明,冷却结构和热载荷可改变等效应力值,而铜板热面和横截面应力分布趋势却基本固定。因此,可通过考察铜板热面中心线和典型横截面应力分布,定量分析冷却结构对铜板应力分布的影响。

2.2 铜板厚度的影响

图4所示为铜板厚度对热面中心线应力影响。宽

面和窄面热面中心线应力分布规律相似;弯月面以上至结晶器入口应力逐渐减小,其中窄面应力下降梯度2 MPa/mm,约为宽面的2倍,这在一定程度上是受窄面冷却水温度梯度略高的影响;弯月面至铜板与镍层分界线应力变化平缓,随铜板厚度变化也较小,厚度每增加5 mm,应力增大5~7 MPa;除铜板与镍层分界线附近应力发生突变外,整个镍层区域应力随铜板厚度变化较明显,这一方面是由于镍层本身热物性决定了其对铜板厚度变化引起的温度变化较为敏感,另一方面则是由于镍层冷面与铜板变形非一致性导致的应力集中所致;铜板每加厚5 mm,宽面和窄面镍层上部应力增大最为显著,分别约为60 MPa和50 MPa,而镍层下部则增加相对较少,其中窄面最小增量不足10 MPa,这是由于结晶器出口区域铸坯宽面收缩量大,窄面气隙加大,则应力受铜板厚度变化引起的温度改变影响较小所致;因冷却水槽末端无法延至结晶器出口,冷却作用减弱,铜板温度有所回升,使得结晶器出口上方区域应力在出现一个波谷后,重又提升。

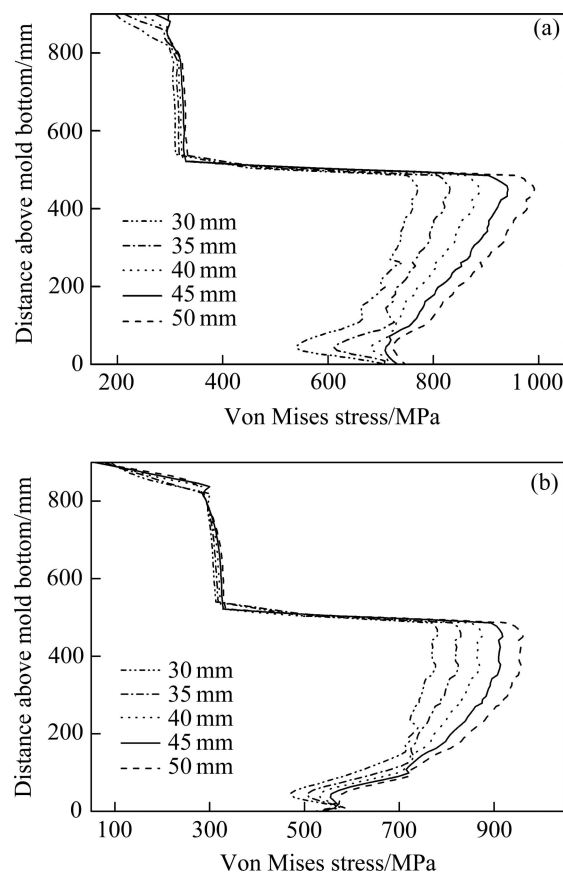


图4 铜板厚度对热面中心线应力影响

Fig. 4 Effect of copper plates thickness on Von Mises stress of hot surface centrality: (a) Wide face; (b) Narrow face

图5所示为弯月面处铜板横截面应力分布。其中,

铜板厚度 45 mm, 计算区域为宽面距中心线 100 mm 范围及半个窄面(下同)。计算表明, 横截面应力分布趋势几乎不随厚度变化, 热通量一定时, 由热面至背板, 应力逐渐降低, 近热面应力梯度较小, 而水槽位置在冷却作用下应力梯度较大; 宽面以紧固螺栓为中心应力对称分布, 螺栓中部受冷却作用弱, 应力低于相同厚度其他位置; 冷却水槽和近热面区域应力分布较规则, 并形成平滑的等应力环和等应力线, 而水槽根部附近的中部区域应力分布则较为复杂, 并在水槽根部出现应力集中, 其中浅水槽根部应力集中相对平缓, 而深水槽根部应力集中严重, 最大应力超过 300 MPa, 铜板中部深水槽和浅水槽之间还形成了高等应力环; 受角部气隙及与宽面接触的影响, 窄面角部区域应力较小, 且应力曲线较为平滑; 窄面近热面中部区域形成不规则高应力区, 这应与宽面收缩造成窄面坯壳与结晶器间接接触状态波动有关, 而远热面冷却水槽区域则在冷却作用下形成曲率较大等应力线; 窄面应力集中仍出现在冷却水槽根部, 尤以深槽显著, 直深槽根部最大应力近 300 MPa, 斜深槽根部也达

250 MPa, 由此也可看出, 角部深槽设计为斜槽的合理性, 一方面强化了角部冷却效果, 限制角部温度局部回升和铜板热应力; 另一方面拉大两深槽根部距离, 避免应力集中区域过于靠近, 从而降低铜板产生永久性蠕变的可能, 但需注意斜槽上部也出现了应力集中现象, 且应力值较高, 已达近 300 MPa, 建议铜板设计和加工时该处留有圆角或倒角, 以削弱不利影响。

2.3 镍层厚度影响

图 6 所示为镍层厚度对热面中心线应力影响。铜板热面中心线应力受镍层厚度影响较为明显, 并随铜板增厚而提升, 则在限制铜板磨损前提下, 不建议采用过厚镍层; 镍层每加厚 1 mm, 宽面和窄面镍层中上部应力提升约 20 MPa, 而结晶器出口附近因无冷却水通过, 应力产生波谷; 窄面镍层下部应力下降较宽面急剧, 是由于窄面结晶器出口位置气隙较大, 应力受一次冷却作用影响显著, 尤其无镍层情况时, 窄面下部仍出现应力波谷, 而宽面应力则近乎平滑; 镍层厚至 4 mm 时, 因镍导热率较低, 热稳定性相对差, 宽面应力波谷有所回升, 此时窄面结晶器出口以上

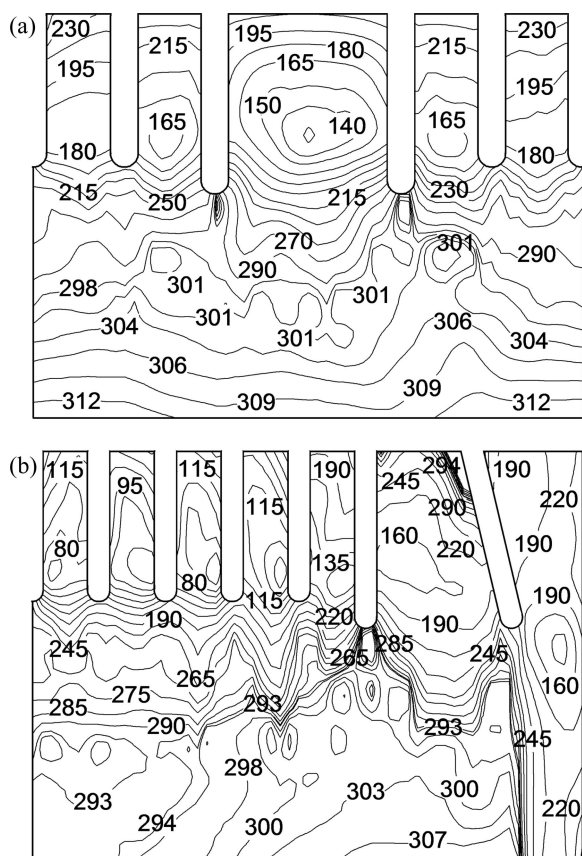


图 5 弯月面处铜板横截面应力分布

Fig. 5 Von Mises stress distributions of cross-sections of copper plates in meniscus (MPa): (a) Wide face; (b) Narrow face

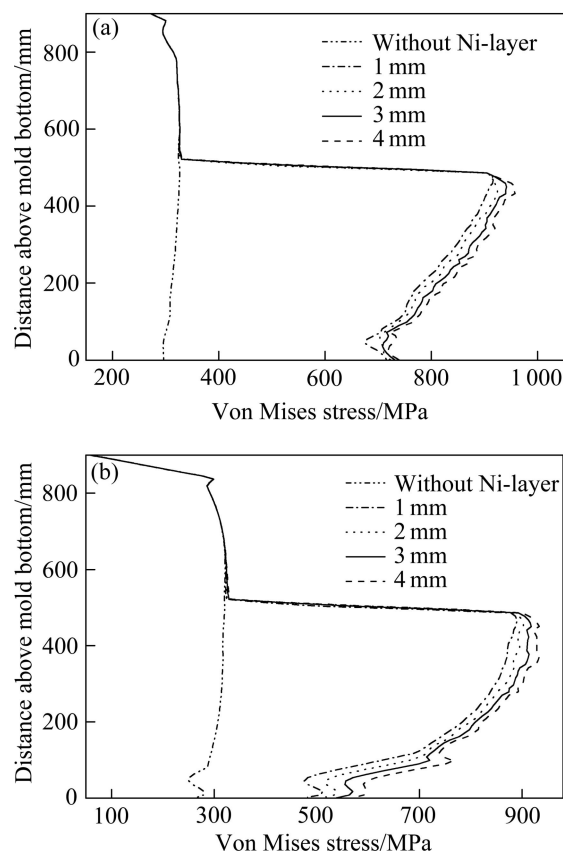


图 6 镍层厚度对热面中心线应力影响

Fig. 6 Effect of Ni-layers thickness on Von Mises stress of hot surface centricity: (a) Wide face; (b) Narrow face

100 mm 位置还产生应力波峰,一方面是受到窄面背板冷面 74.9 MPa 夹紧力作用,另一方面应是镍层过厚且其物理属性与铜差异较大所致,这也更加说明镍层不宜过厚,而图 1 中所镀 3 mm 厚镍层具合理,是否将镍层继续减薄,仍待深入研究。

图 7 所示为弯月面下 600 mm 处铜板横截面应力分布。由图 7 可看出,该处坯壳已凝固,铜板与坯壳间间隙稳定,传热均匀,铜板横截面应力分布趋势较为规则,等应力曲线较为平滑;除镀镍层热面外,铜板应力低于结晶器上部应力,并由热面至背板逐渐下降,水槽位置应力梯度较大,且在根部形成应力集中;宽面应力呈对称分布,螺栓中部应力低于相同厚度其他位置,浅槽根部应力较为平缓,最大值近 120 MPa,深槽根部应力集中较为急剧,最大值约 280 MPa;窄面深槽根部应力集中明显,远角部直深槽根部达 220 MPa,近角部斜深槽因受角部局部温度回升影响,应力相对偏高,最大值约 250 MPa,角部深槽设计为斜槽合理,且斜槽上部未有应力集中。

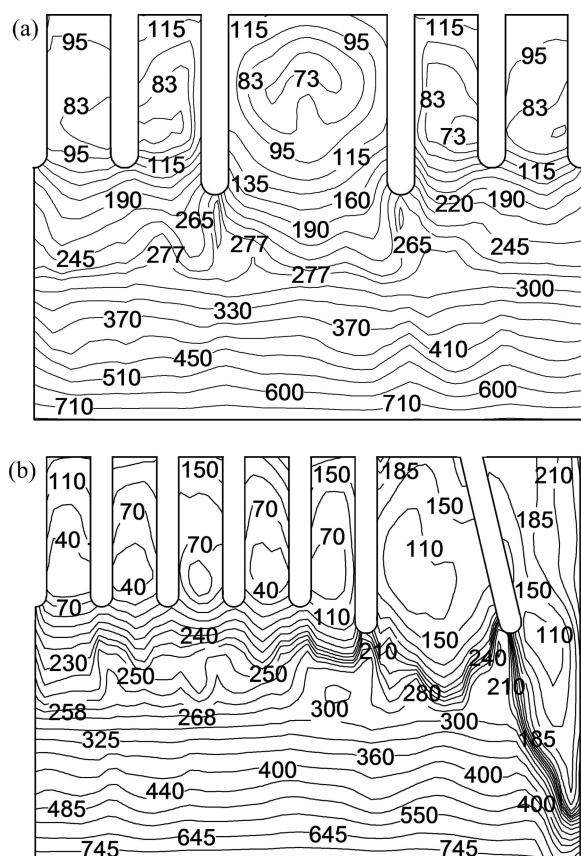


图 7 距结晶器出口 200 mm 处铜板横截面应力分布

Fig. 7 Von Mises stress distributions of cross-sections of copper plates at mold exit of 200 mm (MPa): (a) Wide face; (b) Narrow face

2.4 冷却水槽深度影响

实际连铸过程中,冷却水槽尺寸改变势必引起冷却水流量和结晶器出入口水温差变化,使得定量计算水槽尺寸影响难以实现。本研究基于目前操作下的恒定水流量和水温差,考察冷却水槽尺寸对铜板应力分布影响,并提出辅助性分析结果。图 8 所示为冷却水槽深度对热面中心线应力影响。因冷却水槽宽度显著影响铜板抗变形能力,则仅考察冷却水槽深度影响。因水流量和水温差恒定,铜板应力变化很小,随水槽深度增加,热面中心线应力逐渐减小;结晶器上部应力变化很小,宽面和窄面均在 5 MPa 以内,这是由于冷却水携带总热量恒定,铜板应力受温度变化影响较小;应力在铜板和镍层分界处产生突变,并在结晶器下部有较大变化,最大变化量达 20 MPa,这主要由铜和镍变形不一致所致;至结晶器出口,较弱的冷却使得应力变化又趋不明显。

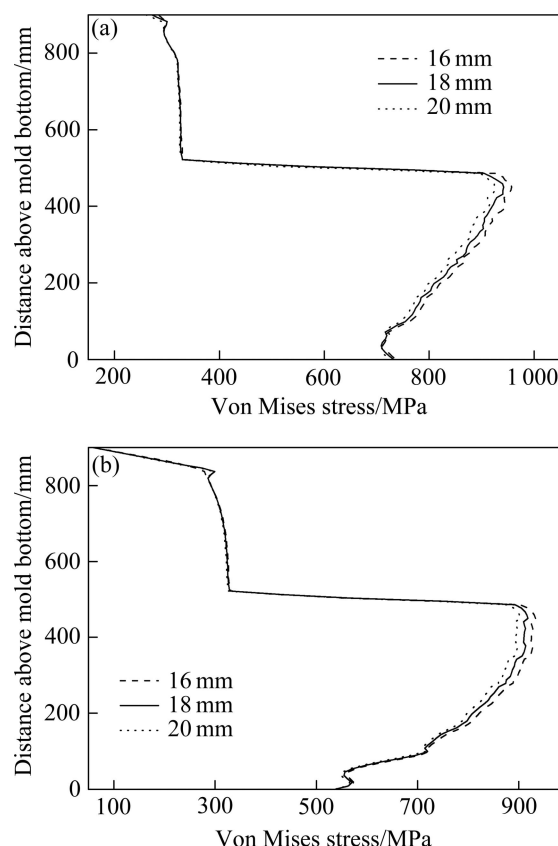


图 8 冷却水槽深度对热面中心线应力影响

Fig. 8 Effect of depth of cooling water slots on Von Mises stress of hot surface centrality: (a) Wide face; (b) Narrow face

图 9 所示为冷却水槽加深时弯月面处铜板横截面温度分布,深槽和浅槽均基于图 1 中尺寸加深 2 mm。相比于图 5,横截面应力值、应力梯度和应力整体分布规律没有较大的变化;尽管水槽加深明显舒缓应力

集中程度,使水槽根部应力变化较为平缓,并形成等应力环和等应力线,但也使应力集中区域更加靠近铜板热面,而使应力集中区域应力值提升,宽面和窄面最大值分别达 320 MPa 和 300 MPa,并不利于铜板降低热疲劳和避免产生永久性蠕变,说明图 1 中原水槽深度设计合理。

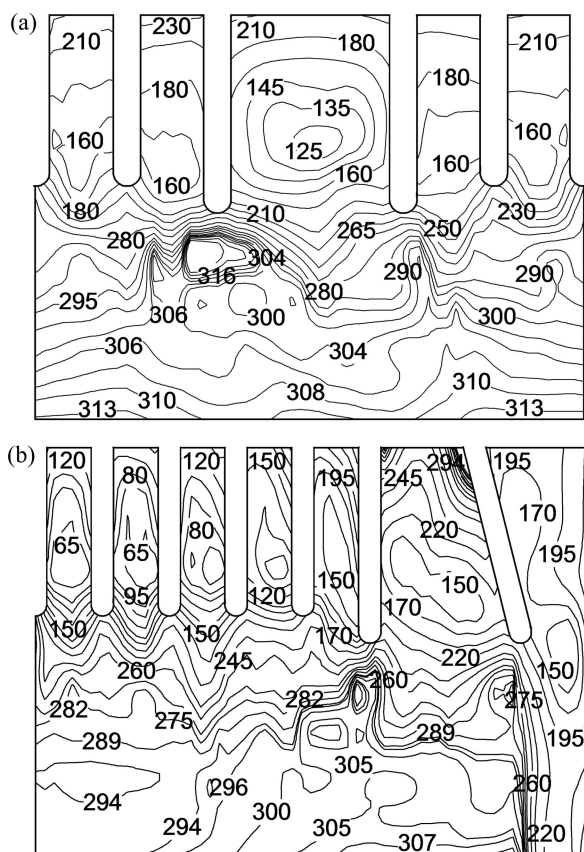


图 9 加深水槽时弯月面处铜板横截面应力分布

Fig. 9 Von Mises stress distributions of cross-sections of copper plates with deeper water slots in meniscus (MPa): (a) Wide face; (b) Narrow face

3 结论

1) 冷却结构和传热条件决定铜板热面特定力学行为规律。镍层处应力明显偏高,铜镍交界线产生应力突变,并贯穿整个热面,甚至突破 900 MPa;角部气隙使远角部的应力高于近角部的,热面应力曲线主要受铜板与坯壳间接接触状态控制,宽面上部应力曲线波动较大,窄面则较为平缓,铜板下部应力曲线平滑,并呈规则应力梯度分布。

2) 宽面和窄面热面中心线应力分布规律相似,且在结晶器出口附近出现应力波谷。铜板每加厚 5 mm,

上部应力仅增大 5~7 MPa,而镍层处变化明显,宽面和窄面最大增幅分别约为 60 MPa 和 50 MPa;镍层每增厚 1 mm,镍层中上部应力提升约 20 MPa,且窄面镍层下部应力下降急剧;水流量和水温差恒定时,水槽深度增加,使热面中心线应力减小,铜板上部变化不足 5 MPa,而下部最大变化量达 20 MPa。

3) 冷却结构尺寸不改变铜板横截面应力分布趋势。近热面应力梯度小,而水槽位置梯度大;宽面以紧固螺栓为中心,应力呈对称分布,而窄面远热面水槽处为大曲率等应力线;水槽根部出现应力集中,尤其深水槽根部应力集中严重;水槽加深虽舒缓应力集中,也使应力集中区域更靠近热面,应力值提升。

4) 建议在保证耐磨前提下,选择与铜热物性接近的金属材料替代镍,或在铜板中部设计铜镍过渡区,以缓解应力突变;建议窄面斜深水槽上部设计圆角或倒角,以削弱应力集中,且不建议采用过厚镍层;因此,目前镍层厚度、冷却水槽深度和斜水槽设计合理。

REFERENCES

- [1] SARASWAT R, MAIJER D M, LEE P D, MILLS K C. The effect of mould flux properties on thermo-mechanical behaviour during billet continuous casting[J]. ISIJ International, 2007, 47(1): 95-104.
- [2] CHANG K H, JANG G C, LEE C H, LEE S H. Temperature and thermal stress distribution for metal mold in squeeze casting process[J]. Journal of Materials Science and Technology, 2008, 24(3): 347-350.
- [3] MENG X N, ZHU M Y. Thermal behavior of hot copper plates for slab continuous casting mold with high casting speed[J]. ISIJ International, 2009, 49(9): 1356-1361.
- [4] THOMAS B G. Modeling of the continuous casting of steel-past, present, and future[J]. Metallurgical and Materials Transactions B, 2002, 33B(6): 795-812.
- [5] MARCANDALLI A, MAPELLI C, NICODEMI W. A thermomechanical model for simulation of carbon steel solidification in mould in continuous casting[J]. Ironmaking and Steelmaking, 2003, 30(4): 265-272.
- [6] SENGUPTA J, OJEDA C, THOMAS B G. Thermal-mechanical behaviour during initial solidification in continuous casting: Steel grade effects[J]. International Journal of Cast Metals Research, 2009, 22(1/4): 8-14.
- [7] KORIC S, THOMAS B G. Thermo-mechanical models of steel solidification based on two elastic visco-plastic constitutive laws[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2008, 197(1/3): 408-418.
- [8] LEE J E, YEO T J, OH K H, YOON J K, YOON U S. Prediction of cracks in continuously cast steel beam blank through fully

- coupled analysis of fluid flow, heat transfer, and deformation behavior of a solidifying shell[J]. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2000, 31(1): 225–237.
- [9] O'CONNOR T G, DANTZIG J A. Modeling the thin-slab continuous-casting mold[J]. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 1994, 25(3): 443–457.
- [10] PARK J K, THOMAS B G, SAMARASEKERA I V, YOON U S. Thermal and mechanical behavior of copper molds during thin-slab casting (I): Plant trial and mathematical modeling[J]. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2002, 33(3): 425–436.
- [11] PARK J K, THOMAS B G, SAMARASEKERA I V, YOON U S. Thermal and mechanical behavior of copper molds during thin-slab casting (II): Mold crack formation[J]. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2002, 33(3): 437–449.
- [12] LIU X D, ZHU M Y. Finite element analysis of thermal and mechanical behavior in a slab continuous casting mold[J]. *ISIJ International*, 2006, 46(11): 1652–1659.
- [13] THOMAS B G, LANGENECKERT M, CASTELLA L, DZIUBA M, GRESIA G D, BALANTE W. Optimization of narrow face water slot design for Siderar slab casting mould[J]. *Ironmaking and Steelmaking*, 2003, 30(3): 235–239.
- [14] LI C, THOMAS B G. Thermomechanical finite-element model of shell behavior in continuous casting of steel[J]. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2004, 35(6): 1151–1172.
- [15] 赵志岗, 叶金铎, 王燕群, 亢一澜. 材料力学[M]. 天津: 天津大学出版社, 2001: 115–118.
- ZHAO Zhi-gang, YE Jin-duo, WANG Yan-qun, KANG Yi-lan. *Mechanics of materials*[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2001: 115–118.

(编辑 李艳红)