

岩石粉碎粒度 G-S 分布的分形几何描述^①

李功伯^② 唐春安^③ 徐小荷^④

(东北工学院)

摘 要

本文探讨了利用分形几何来建立岩石粉碎过程的模型, 结果表明单用线性相似比难以符合实际, 必须引入核心部分的粉碎概率, 才可以较好地阐明著名 G-S 分布函数中粒度的分布指数 α 的几何意义。

关键词: 分形, 分维数, 粉碎工程, 粒度分布

1 岩石粉碎过程的分形模型

目前, 由 Mandelbrot B B 创建并发展的分形几何学, 主要是研究一些具有自相似性的几何对象^[1]。所谓自相似性是指整体可以通过局部的放大而得到, 局部与整体在形态、功能和信息等方面具有统计意义下的相似性。岩石粉碎后的大小不同的碎块就是自相似的, 其细粒组成的几何尺寸经适当放大后和粗粒组成的几何结构极相似。

在分形几何学中, 衡量分形的参数是分维数 D , 立足于自相似性的分维数 D 用下式表示

$$D = \lg[N(\gamma)] / \lg(1/\gamma) \quad (1)$$

式中 γ ——线性相似比;

$N(\gamma)$ ——在线性相似比 γ 下具有的度量个数

四面体不断地被分割的过程可以看成是矿岩粉碎的一种模型。一个大四面锥体容易破坏的四个角被分割出来, 形成 4 个小四面锥体碎块和一个较难破坏的核心; 小的四面锥体再被分割成 4^2 个更小的四面锥体碎块和 4 个小核心。如此进行下去, 以至无穷, 如图 1。在这一过程中分割下来的形状总是整体的缩小, 这正符合自相似分形的生成条件。

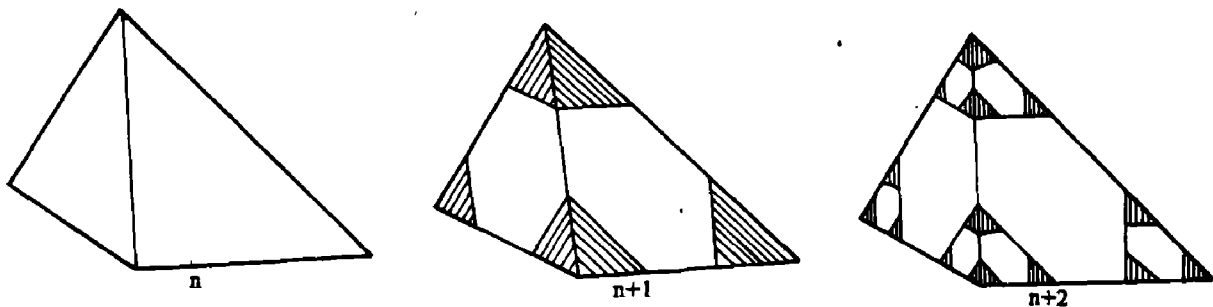


图 1 矿岩粉碎过程的分形模型

①本文为国家自然科学基金资助项目, 于 1991 年 1 月 28 日收到。

②博士研究生; ③副教授; ④教授

在这个分形几何模型中，假设核心部份完全不碎，四面锥体可以每棱二等分、三等分、四等分……。每次碎掉四个角留下一个中心核，碎下来的小四面锥体每棱长为前一段四面锥体棱长的 $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ 。

按分维数定义： $\gamma = 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ ； $N = 4$ 。所以 $D = \lg[N(\gamma)] / \lg(1/\gamma) = 2, 1.26, 1, \dots, 0$ 。

岩石破碎的分形维数 D 一般不小于 2.0，由文献^[2]知 $\alpha = 0.7 \sim 1.0$ ，相当于 $D = 2.0 \sim 2.8$ 。

仅碎掉四个角的分维数 D ，最大为 2。由此可知在分形几何模型中核心部分在粉碎过程中有被粉碎的，不妨设其概率为 P 。

在这里，取线性相似比 γ 为 $1/3$ ，那么核心可碎为线性相似比 γ 为缩小倍率的次一级四面锥体个数是： $(1/\gamma)^E - 4 = 3^3 - 4 = 23$ ，其中 E 为拓扑维数(四面锥体 E 为 3)。

因为假定核心部分被粉碎成四面锥体的概率为 P ，那么平均来说某个核心被粉碎成四面锥体的个数为 $23P$ 。

于是经过一次粉碎从大的四面锥体分割下来的小四面锥体个数为

$$N = [(1/\gamma)^E - 4]P + 4$$

因为 $E = 3$ ，故

$$D = \lg[N(\gamma)] / \lg(1/\gamma) \\ = \lg\{[(1/\gamma)^3 - 4]P + 4\} / \lg(1/\gamma) \quad (2)$$

2 粒度分布

在图 1 中，令源多面体的最大尺寸为 k ，用 X_n 表示第 n 次构造的粒度，则由分形构造规则知，粒度按线性相似比 γ 的倍率递减，即

$$X_n = \gamma^n k$$

所以 $n = \lg(X_n/k) / \lg(\gamma)$

另一方面，相应于 X_n 粒级的碎粒的筛下体积比例 y_n ，由图 1 分形的构造过程有

$$y_1 = \gamma^E \cdot N$$

$$y_2 = (\gamma^E \cdot N)^2$$

……

$$y_n = (\gamma^E \cdot N)^n$$

又因为

$$N_n = N^{\lg(X_n/k) / \lg(\gamma)} \\ = [(X_n/k)^{1/\lg(\gamma)}]^{\lg N} \\ = (X_n/k)^{-\lg N / \lg(1/\gamma)}$$

由式 (1) 得 $N^n = (X_n/k)^{-D}$

$$\text{所以 } y_n = (\gamma^n)^E N^n \\ = (X_n/k)^E (X_n/k)^{-D}$$

$$\text{即 } y_n = (X_n/k)^{E-D} \quad (3)$$

矿岩被粉碎时，所得到的碎粒是有一定的分布规律的。前人从实践中总结了这种规律，其中著名的粒度分布规律加庭-舒曼(Gaudin-Schuhmann)函数^[3]为

$$y_n = (X_n/k)^\alpha \quad (4)$$

式中 y_n ——粒度为 X_n 的筛下体积百分比；

X_n ——粒度，mm；

k ——粒度的分布特征值，在 $X_n = k$ 时，筛下量为 100%，故 k 为最大的粒度尺寸；

α ——粒度的分布指数

对比从分形几何模型中得到的 (3) 式和 G-S 粒度分布函数 (4) 式，可以看出图 1 所示的粉碎过程分形几何模型满足 G-S 粒度分布规律，并且更加明确了粒度分布指数 α 在粉碎产物中的几何意义，它和分维数 D 的关系如下：

$$\alpha = E - D \quad (5)$$

3 实验关系

在我们实验室里，曾用石灰石和铁矿石料层放在筒中进行静力压碎，对其压碎产物的粒度筛分结果进行数据处理，按筛下累计含量对粒度分布进行曲线回归^[4]。

对于石灰石和铁矿石，其压碎产物是服从 G-S 分布的。但是由于矿岩种类不同，其 $y_n = (X_n/k)^\alpha$ 中的参数 k 与 α 也不同。如

$$\text{铁矿石 } y_n = (X_n/23.18)^{0.36}$$

$$\text{石灰石 } y_n = (X_n/12.44)^{0.46}$$

把压碎产物粒度的筛分结果绘在双对数坐

标图上如图 2, 它是两条很好的直线, 故知确实符合幂分布。

按 (5) 式可得到料层压碎后的粒度分布的分维数, 两种矿岩各是

$$D_{\text{铁}} = 3 - 0.36 = 2.64$$

$$D_{\text{灰}} = 3 - 0.46 = 2.54$$

如取 $\gamma = 1/3$, 那么相应的 $P_{\text{铁}} = 0.617$; $P_{\text{灰}} = 0.534$.

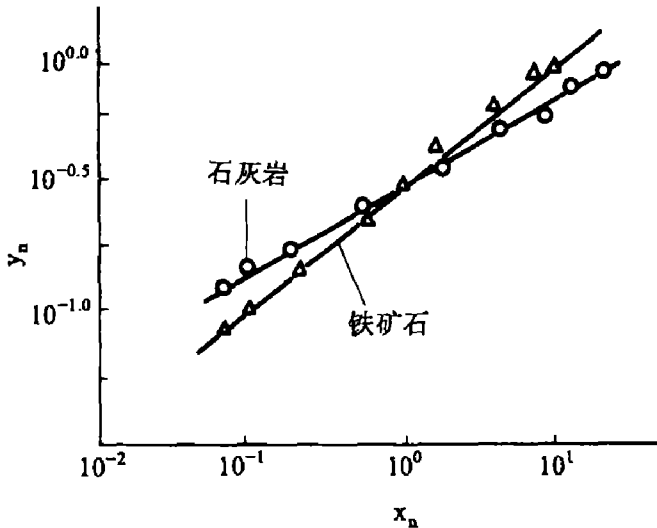


图 2 两种矿岩料层压碎的粒度分布

4 结束语

美国国家岩石力学委员会曾指出: “岩石力

学最主要的要求之一就是“对岩石不连续性结构以及由此影响破碎过程的方式的精确描述” [6]。矿岩粉碎过程的分形几何模型可以沟通粉碎产物与粉碎过程的联系, 是一种新的研究矿岩粉碎的途径。通过矿岩粉碎过程分形几何模型的初步探索, 表明单用线性相似比难以符合实际, 引入核心部分的粉碎概率后, 才可以较好地描述矿岩的粉碎过程, 并符合 G-S 粒度分布规律; 也明确了在粉碎产物的统计规律中粒度分布指数 α 是与分形几何模型的分维数 D 相联系的。

参 考 文 献

1. Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982
2. 李启衡. 碎矿与磨矿. 北京: 冶金工业出版社, 1980. 9
3. 徐小荷, 余静. 岩石破碎学. 北京: 煤炭工业出版社, 1984.38
4. 左宇罕, 徐小荷. 见: 第五届全国粉碎工程学术会议论文集, 中国选矿科技情报网, 1990. 20-30
5. (日) 高安秀树. 分维数. 北京: 地震出版社, 1989. 66
6. U.S.National Committee for Rock Mechanics. Rock Mechanics Research Requirement for Resource Recovery, Construcion and Eearthquake Hazard Reduction. Washington D.C.:National Academy Press, 1981