正交异性非二次式三维应力屈服函数①

周维贤

(西北工业大学)

摘　要

文中提出了一个新的正交异性非二次式屈服函数。它没有只适用于平面应力问题、或主应力方向不能任意、或幂次值不能变动等局限性；所有材料常数均可由单向拉伸试验法确定。

该屈服函数含三个新参数，每个正交异性主平面内一个，其数值一般可取为3。文中也给出并讨论了其他几种取值方法。

对钛板的屈服应力经回归处理得出，其屈服函数的合宜幂次值是6或8。对于其他塑性变形问题，能应用该函数获得比较满意的计算结果。

关键词：正交异性，三维应力，屈服函数，钛板

众所周知，在材料科学中提出最早、应用最广的正交异性屈服函数，是 Hill 的二次式函数[1]。实践表明，它过高地估价了材料各向异性的影响[2]；故在 70 年代，包括 Hill 本人在内,陆续提出了一些新的异性屈服函数[3-6]。所有后来提出的这些屈服函数的共同特点是，采用非二次式函数来替代二次式函数。

但是，正如 Hosford 不久前所指出的[7]。当时的非二次式屈服函数，均有其局限性，即大多不兼容面内异性；Gotoh 的函数[3]虽能兼容，但幂次值是固定的，不能依材料的不同而变更，此外，除 Hill 的函数以外[6]，均限于二维应力状态。

最近的文献[8-9]，虽在不同的完善程度上解决了兼容面内异性的问题，但仍限于二维应力。

本文的目的是探求能兼容正交异性的非二次式三维应力屈服函数形式，以满足工程应用的需要。

1　三维应力屈服函数形式

本文提出的屈服函数是

$$\begin{aligned} f = & F[(\sigma_y-\sigma_z)^2+3(\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)+ \\ & b_{yz}\tau_{yz}^2]^{\frac{m}{2}}+G[(\sigma_z-\sigma_x)^2+ \\ & 3(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2)+b_{zx}\tau_{zx}^2]^{\frac{m}{2}}+ \\ & H[(\sigma_x-\sigma_y)^2+3(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)+ \\ & b_{xy}\tau_{xy}^2]^{\frac{m}{2}}+2L(\tau_{yz}^2)^{\frac{m}{2}}+ \\ & 2M(\tau_{zx}^2)^{\frac{m}{2}}+2N(\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}- \\ & \frac{2}{3}(F+G+H)\sigma_i^m=0 \end{aligned} \tag{1}$$

式中　x、y、z 是各向异性主轴方向；F、G ……N 是各向异性参数；m 是屈服函数的幂次值；b_{xy}、b_{yz}、b_{zx} 是三个新参数；σ_i 是等效应力。

①本文属航空科学基金资助项目，于 1991 年 12 月 10 日收到

2 平面应力问题

上式的材料常数，可在简单应力状态下确定。为此以下就平面应力状态来展开讨论。

2.1 二维应力屈服函数形式

将 $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$ 代入(1)式，并以 b 代 b_{xy}，则有

$$f=F\ (\sigma_y^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}+G\ (\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}+H[\ (\sigma_x-\sigma_y)^2+b\tau_{xy}^2]^{\frac{m}{2}}+2N\ (\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}-\frac{2}{3}\ (F+G+H)\ \sigma_i^m=0 \tag{2}$$

2.2 相应的流动法则

据塑性位势理论和 Drucker 公理[10]，与屈服函数式(2)相应的流动法则是

$$\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_x&=md\lambda\ \{G\sigma_x(\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}+H(\sigma_x-\sigma_y)[(\sigma_x-\sigma_y)^2+b\tau_{xy}^2]^{\frac{m}{2}-1}\}\\
d\varepsilon_y&=md\lambda\ \{F\sigma_y(\sigma_y^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}-H(\sigma_x-\sigma_y)[(\sigma_x-\sigma_y)^2+b\tau_{xy}^2]^{\frac{m}{2}-1}\}\\
d\varepsilon_z&=-d\varepsilon_x-d\varepsilon_y=-md\lambda[G\sigma_x(\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}+F\sigma_y(\sigma_y^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}]\\
d\gamma_{xy}&=md\lambda\ \{3F(\sigma_y^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}+3G(\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}+bH[(\sigma_x-\sigma_y)^2+b\tau_{xy}^2]^{\frac{m}{2}-1}+2N(\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}-1}\}\ \tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

等效应变增量 $d\varepsilon_i$ 是

$$d\varepsilon_i=md\lambda 2/3(F+G+H)\sigma_i^{m-1} \tag{4}$$

式中　$d\lambda$ 是与变形程度有关的正值比例因子。等效应力 σ_i 可由 (2) 式获得，

$$\sigma_i=[\frac{3}{2(F+G+H)}]^{\frac{1}{m}}\ \{F(\sigma_y^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}+G(\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}+H[(\sigma_x-\sigma_y)^2+b\tau_{xy}^2]^{\frac{m}{2}}+2N(\tau_{xy}^2)^{\frac{m}{2}}\}^{\frac{1}{m}} \tag{5}$$

2.3 各向异性参数比值的确定

设在各向异性主平面内沿异性主轴方向（x、y 方向，以下用 0°、90°表示），以及与它们成 45°的方向上制取单向拉伸试件，并进行试验。对 0°、90°方向的试件，只有 $\sigma_x\neq0$ 或 $\sigma_y\neq0$，由 (3) 式得

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0&=d\varepsilon_y/d\varepsilon_z=H/G\\ \gamma_{90}&=d\varepsilon_x/d\varepsilon_z=H/F\end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

对45°方向的试件，$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=\frac{1}{2}\sigma_{45}$；试件宽度应变增量$d\varepsilon_{y'}=\ (d\varepsilon_x+d\varepsilon_y)\ /2-d\gamma_{xy}/2$。故$\gamma_{45}$是

$$\gamma_{45}=\frac{d\varepsilon_{y'}}{d\varepsilon_z}=-\frac{1}{2}\ (1+\frac{d\gamma_{xy}}{d\varepsilon_z})=\frac{(F+G)\ 2^{m-1}+Hb^{m/2}+2N}{(F+G)\ 2^{m-1}}$$

它可改写成

$$\frac{2N}{H}=\frac{F+G}{H}(\gamma_{45}-1)2^{m-1}-b^{m/2} \tag{6b}$$

可以看到，$m=2$ 时，公式(1)、(2)和(6b) 均蜕变为 Hill 原来的二次式函数。

γ_0、γ_{45}、γ_{90} 之值由试验测定。

2.4 流动法则在主应力坐标系的表示式

设 σ_1、σ_2 是面内的两个主应力,其中 σ_1 的代数值较大，它与轧向（x 轴方向）的夹角是 α；并用比值 x 表示 σ_2 的相对大小，即

$$x=\sigma_2/\sigma_1\qquad(\sigma_1>\sigma_2) \tag{7}$$

应力转换公式是

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha \\
&= \left(\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}\cos2\alpha\right)\sigma_1 \\
\sigma_y &= \sigma_1\sin^2\alpha + \sigma_2\cos^2\alpha \\
&= \left(\frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2}\cos2\alpha\right)\sigma_1 \\
\tau_{xy} &= -(\sigma_2 - \sigma_1)\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \left(\frac{1-x}{2}\sin2\alpha\right)\sigma_1
\end{aligned}\right\} \quad (8)
$$

将这些式子代入 (5) 式，并引进 (6) 式，得

$$
\sigma_i = D[\gamma_0 B^{\frac{m}{2}} + \gamma_{90}A^{\frac{m}{2}} + (1-x)C]^{\frac{1}{m}}\sigma_1 \quad (9)
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
A &= [3 - 2x + 3x^2 + 2(1-x^2)\cos2\alpha - (1-x)^2\cos4\alpha]/4 \\
B &= [3 - 2x + 3x^2 - 2(1-x^2)\cos2\alpha - (1-x)^2\cos4\alpha]/4 \\
C &= \{\gamma_0\gamma_{90}(\cos^2 2\alpha + \frac{b}{4}\sin^2 2\alpha)^{\frac{m}{2}} + \\
&\quad [\frac{(\gamma_0+\gamma_{90})(\gamma_{45}-1)}{2} - \gamma_0\gamma_{90} \times \\
&\quad (\frac{b}{4})^{\frac{m}{2}}]\sin^m 2\alpha\}(1-x)^{m-1} \\
D &= \{3/[2(\gamma_0 + \gamma_{90} + \gamma_0\gamma_{90})]\}^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}\right\} (10)
$$

另外，用 $d\varepsilon_1$、$d\varepsilon_2$、$d\gamma_{12}$ 表示主应力坐标系的应变增量，根据应变转换公式则有

$$
\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_1 &= \frac{d\varepsilon_x + d\varepsilon_y}{2} + \frac{d\varepsilon_x - d\varepsilon_y}{2} \times \\
&\quad \cos2\alpha + \frac{1}{2}d\gamma_{xy}\sin2\alpha \\
d\varepsilon_2 &= \frac{d\varepsilon_x + d\varepsilon_y}{2} - \frac{d\varepsilon_x - d\varepsilon_y}{2} \times \\
&\quad \cos2\alpha - \frac{1}{2}d\gamma_{xy}\sin2\alpha \\
d\gamma_{12} &= (d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)\ \sin2\alpha - \\
&\quad d\gamma_{xy}\cos2\alpha
\end{aligned}\right\} (11)
$$

将 (3) 式代入，并引进 (4)、(9)、(6) 式，整理得

$$
\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_i &= \{2[\gamma_0 B^{\frac{m}{2}} + \gamma_{90}A^{\frac{m}{2}} + (1-x) \times \\
&\quad C]^{\frac{m-1}{m}} d\varepsilon_1\}/D\ \{\gamma_{90}[1 + \cos2\alpha + \\
&\quad (1-x)\sin^2 2\alpha]A^{\frac{m-2}{2}} + \gamma_0[1 - \\
&\quad \cos2\alpha + (1-x)\sin^2 2\alpha] \times \\
&\quad B^{\frac{m-2}{2}} + 2C\} \\
&= \{2[\gamma_0 B^{\frac{m}{2}} + \gamma_{90}A^{\frac{m}{2}} + (1-x) \times \\
&\quad C]^{\frac{m-1}{m}} d\varepsilon_2\}/D\{\gamma_{90}[x(1 - \\
&\quad \cos2\alpha) - (1-x)\sin^2 2\alpha]A^{\frac{m-2}{2}} + \\
&\quad \gamma_0[x(1+\cos2\alpha) - (1-x) \times \\
&\quad \sin^2 2\alpha]B^{\frac{m-2}{2}} - 2C\} \\
&= -\{2[\gamma_0 B^{\frac{m}{2}} + \gamma_{90}A^{\frac{m}{2}} + (1-x) \times \\
&\quad C]^{\frac{m-1}{m}} d\varepsilon_z\}/D\{\gamma_{90}[1 + x + \\
&\quad (1-x)\cos2\alpha]A^{\frac{m-2}{2}} + \gamma_0[1 + \\
&\quad x - (1-x)\cos2\alpha]B^{\frac{m-2}{2}}\} \\
&= \pm\{2[\gamma_0 B^{\frac{m}{2}} + \gamma_{90}A^{\frac{m}{2}} + (1-x) \times \\
&\quad C]^{\frac{m-1}{m}} d\gamma_{12}\}/D\{\gamma_{90}[1 + x \\
&\quad 2(1-x)\cos2\alpha]A^{\frac{m-2}{2}} - \gamma_0 \times \\
&\quad [1 + x + 2(1-x)\cos2\alpha] \times \\
&\quad B^{\frac{m-2}{2}} - 2E\}\ \sin2\alpha
\end{aligned}\right\} (12)
$$

式中

$$
\begin{aligned}
E &= \{[(\gamma_0 + \gamma_{90})(\gamma_{45} - 1) - 2\gamma_0\gamma_{90} \times \\
&\quad (\frac{b}{4})^{\frac{m}{2}}](\sin2\alpha)^{m-2} - 2\gamma_0\gamma_{90}(1 - \frac{b}{4}) \times \\
&\quad (\cos^2 2\alpha + \frac{b}{4}\sin^2 2\alpha)^{\frac{m-2}{2}}\} \times \\
&\quad (1-x)^{m-1}\cos2\alpha
\end{aligned} \quad (13)
$$

因 $d\varepsilon_i > 0$ 才有意义，(12) 式中最后一个等号后的正、负号，应与 $d\gamma_{12}$ 的符号相同。另外，$\alpha = 0°$ 和 $\alpha = 90°$ 时，按定义

$d\gamma_{12}=0$、(12) 式最后一个式子成不定式。故在这些场合，$d\varepsilon_i$ 不能由 $d\gamma_{12}$ 确定。

2.5 可用性检查

令 $x=0$ 和 $\alpha=0°$、$45°$，由 (9) 和 (10) 式整理得

$$(\frac{\sigma_{45}}{\sigma_0})^m=\frac{2\gamma_{90}(1+\gamma_0)}{(\gamma_0+\gamma_{90})(1+\gamma_{45})} \tag{14}$$

可见，当 $\gamma_0=\gamma_{45}=\gamma_{90}$ 时，m 值仍可以是由试验数据确定的任意值。这正是 Hosford 企图将他提出的屈服函数扩展为能容纳面内异性、但却未成功的原因所在[11]。

2.6 m 值的确定

Hosford 藉晶体滑移理论得出：bcc 及 fcc 金属的合宜 m 值，分别是 6 和 8[4]。当然，m 值也可借试验数据计算。(14)式给出

$$m=\ln[\frac{2\gamma_{90}(1+\gamma_0)}{(\gamma_0+\gamma_{90})(1+\gamma_{45})}]/\ln(\frac{\sigma_{45}}{\sigma_0}) \tag{15a}$$

考虑90°方向的试验数据时，则有

$$m=\ln[\frac{\gamma_{90}(1+\gamma_0)}{\gamma_0(1+\gamma_{90})}]/\ln(\frac{\sigma_{90}}{\sigma_0})$$
$$=\ln[\frac{2\gamma_0(1+\gamma_{90})}{(\gamma_0+\gamma_{90})(1+\gamma_{45})}]/\ln(\frac{\sigma_{45}}{\sigma_{90}}) \tag{15b}$$

对于面内同性材料，(15)式成不定式。此时的 m 值，必须由单向拉伸加上双向拉伸试验数据才能确定。设后者的塑流应力是 σ_{bi}，则

$$m=\ln(\frac{1+\gamma}{2})/\ln(\frac{\sigma_{bi}}{\sigma_0}) \tag{16}$$

2.7 b 值的选择

在以上分析中，未看到 b 值的影响。可见其值能灵活选取。但如何选择?

迄今，面内同性状态是用 $\gamma_0=\gamma_{45}=\gamma_{90}=\gamma$ 表示的。对本屈服函数，由 (9)、(10) 式可得任意方向的塑流应力 σ 与 0°方向的塑流应力 σ_0 的关系是

$$\sigma=\{\frac{\gamma_{90}(1+\gamma_0)}{\gamma_0 B^{m/2}+\gamma_{90}A^{m/2}+C}\}^{\frac{1}{m}}\sigma_0 \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}A&=[3+2\cos2\alpha-\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha]/4\\&=1+\sin^2\alpha\cos2\alpha\\B&=[3-2\cos2\alpha-\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha]/4\\&=1-\cos^2\alpha\cos2\alpha\\C&=\gamma_0\gamma_{90}(\cos^2 2\alpha+\frac{b}{4}\sin^2 2\alpha)^{\frac{m}{2}}+\\&\quad[\frac{(\gamma_0+\gamma_{90})(\gamma_{45}-1)}{2}-\gamma_0\gamma_{90}\times\\&\quad(\frac{b}{4})^{\frac{m}{2}}]\sin^m 2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

将 $\gamma_0=\gamma_{45}=\gamma_{90}=\gamma$ 代入上式，得

$$(\frac{\sigma}{\sigma_0})^m=(1+\gamma)/\{B^{m/2}+A^{m/2}+\gamma\{(\cos^2 2\alpha+\frac{b}{4}\sin^2 2\alpha)^{m/2}+[1-(\frac{b}{4})^{m/2}]\sin^m 2\alpha\}-\sin^m 2\alpha\} \tag{19}$$

式中 A、B 由 (18) 式给出。可以看到，除非 $m=2$，等号后分母部分不会总是等于 $(1+\gamma)$，但 $\alpha=0°$、$45°$、$90°$ 除外。因此，$\gamma_0=\gamma_{45}=\gamma_{90}$，意味着 0°、45°、90°三个方向上的性能一样。显然，在 0°～90°的范围内，σ/σ_0 与 1 的最大差值和所在方位与 b 值有关。表 1 是一些计算结果。

可以看到，在所列的 m、γ、b 值范围内，除 $b=0$ 时的△%外，一般都不大。但取 b 为某一常数，看来也不好。本文提出了 b 值的两个取值数模，即

当 $\gamma_0=\gamma_{45}=\gamma_{90}=\gamma$ 时

$$\left.\begin{aligned}&b_1=[2^{m-1}\frac{(\gamma_0+\gamma_{90})(\gamma_{45}-1)}{\gamma_0\gamma_{90}}]^{\frac{2}{m}}\\&\text{或}\quad b_1=4(1-\frac{1}{\gamma})^{\frac{2}{m}}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

当 $\gamma_{cp}=(\gamma_0+2\gamma_{45}+\gamma_{90})/4$ 时

$$b_2=4-\frac{\sqrt{m}}{2\gamma_{cp}} \tag{21}$$

前一式是假设(6b)式中的 $N=0$ 得出的。它不能用于 $\gamma_{45}<1$(或 $\gamma<1$)的场合。后一式是改进式，用它们算得的 σ/σ_0 与 1 的最大差值和方位列于表 2。

可以看到，在实用的 m、γ 值范围内，按(21)式确定 b 值，描述面内同性的准确度是足够高的。m 值、γ 值均较大时，用(20)式确定 b 值则更好。

以上是就 x,y 平面内的情况讨论的。由于 b 值可灵活选取故一般也可取为 3。

3 对钛板的应用

试验钛板的牌号和有关性能列于表 3。

3.1 m 值和 b 值计算

(17)式表明，不同方向的屈服应力可以预测。设 σ_j 是屈服应力的试验值，n 是试验数据数目，$\sigma_{cp}(=[\sigma_0+2\sigma_{45}+\sigma_{90}]/4)$是试验数据的

表 1 按(19)式算得的 σ/σ_0 与 1 的最大差值△%。

m	6 (bcc)						8 (fcc)					
b	0		3		4		0		3		4	
γ	△%	方向	△%	方向	△%	方向	△%	方向	△%	方向	△%	方向
0.5	1.29	17.60° 72.40°	−1.65	25.0° 65.0°	−2.89	24.7° 65.3°	0.80	13.4° 76.6°	−2.15	26.5° 63.5°	−3.41	26.2° 63.8°
1.0	4.60	21.1° 68.9°	−0.23	27.4° 62.6°	−2.22	同	3.37	18.6° 71.4°	−0.57	28.0° 62.0°	−2.65	同
2.0	9.10	22.0° 68.0°	1.38	23.9° 66.1°	−1.52		7.50	20.9° 69.1°	1.34	24.5° 65.5°	−1.84	
3.0	11.97	22.1° 67.9°	2.25	24.1° 65.9°	−1.16	上	10.41	21.6° 68.4°	2.40	25.1° 64.9°	−1.41	上

表 2 取 b 为变值时按(19)式算得的 σ/σ_0 与 1 的最大差值△%

b	按式 (20) 取值						按式 (21) 取值					
m	6			8			6			8		
γ	b_1	△%	方向	b_1	△%	方向	b_2	△%	方向	b_2	△%	方向
0.5	($\gamma<1$ 时不适用)						1.55	−0.26	30.5° 59.5°	1.17	−0.95	29.8° 60.2°
1.0	0	4.60	21.1° 68.9°	0	3.37	18.6° 71.4°	2.78	0.25	19.4° 70.6°	2.59	0.36	16.9° 73.1°
2.0	3.17	0.87	23.8° 66.2°	3.36	0.24	22.0° 68.0°	3.39	0.26	23.0° 67.0°	3.29	0.45	23.7° 66.3°
3.0	3.49	0.55	24.1° 65.9°	3.61	0.09	22.1° 67.9°	3.59	0.22	23.8° 66.2°	3.53	0.42	25.1° 64.9°

表 3 试验钛板的 γ 值和 $\sigma_{0.2}$ 数值

材 料	γ					$\sigma_{0.2}$ (Mpa)				
	0°	22.5°	45°	67.5°	90°	0°	22.5°	45°	67.5°	90°
TA2M，0.8mm	2.50	2.24	3.36	3.17	3.30	408.9	424.6	430.5	437.4	440.3
TA2M，1.0mm	2.05	2.10	3.50	2.70	2.93	347.3	351.2	360.6	383.2	387.8
TA2M，1.5mm	1.73		2.47		2.53	371.7	373.6	379.5	395.2	402.1
TA2M，2.0mm	2.60		3.25		3.15	397.2	409.9	418.7	420.7	482.6
TC1M，0.8mm	2.06	2.13	3.88	2.95	2.87	548.2	538.4	523.7	537.4	544.3
TC1M，1.0mm	1.22		2.20		1.78	516.8	531.5	544.3	574.7	582.5
TC1M，1.5mm	1.35		2.72		2.10	511.9		533.5		584.5
TC1M，2.0mm	0.69	0.78	1.95	1.92	1.75	622.7	612.9	620.8	654.1	667.8
TC3M，1.0mm	1.60	1.90	2.88	2.48	2.25	771.1	778.9	811.3	852.5	865.2

平均值，$S_D\left(=\sqrt{\sum(\sigma-\sigma_z)^2/n}\ /\ \sigma_{cp}\right)$ 是预测值 σ 与试验值 σ_j 间的相对均方差。与选取的 m、b 值有关。为了降低各单个试验的误差对预测值的影响，本文以 (17) 式为回归计算数模，用表 3 所列数据 ($n=5$) 进行计算。所得的 S_D 值与 m、b 值的关系列于表 4。

可以看到，对钛板来说，取 $m=6\sim8$ 和用(20)、(21)式计算的 b 值较好；算得的 S_D 值明显地比取 $m=2$ 时的小。取 $b=0$ 和取 $m=2$ 都不合适。

3.2 筒形深拉件凸耳方位的预测

如 Hill 所述[1]，圆板毛料筒形深拉件的凸耳和凹谷处，是主应变增量与主应力方向一致的方位。该方位可由深拉件边缘上 $d\gamma_{12}=0$ 处求得。

$d\gamma_{12}=0$，亦即(12)式最后一个等号后的分子等于零。将 $x=-\infty$(因 $\sigma_1=0$，$\sigma_2<0$)代人，解之，可得

$$\sin 2\alpha=0 \quad 即 \quad \alpha=0^\circ 和 90^\circ \tag{22a}$$

$$\cos 2\alpha=-\left[\gamma_{90}A_1^{\frac{(m-2)}{2}}-\gamma_0 B_1^{\frac{(m-2)}{2}}\right]\Big/ 2\left[\gamma_{90}A_1^{\frac{(m-2)}{2}}+\gamma_0 B_1^{\frac{(m-2)}{2}}+E_1\right] \tag{22b}$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=[3-2\cos 2\alpha-\cos 4\alpha]/4\\
B_1&=[3+2\cos 2\alpha-\cos 4\alpha]/4\\
E_1&=[(\gamma_0+\gamma_{90})(\gamma_{45}-1)-\\
&\quad 2\gamma_0\gamma_{90}\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{m}{2}}]\sin^{m-2}2\alpha-\\
&\quad 2\gamma_0\gamma_{90}\left(1-\frac{b}{4}\right)(\cos^2 2\alpha+\\
&\quad \frac{b}{4}\sin^2 2\alpha)^{\frac{m-2}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{22c}$$

由表 3 知，钛板的 $\gamma_{45}>\gamma_{90}>\gamma_0$，所以 (22a) 式表示凹谷方位，(22b) 式为凸耳方位。(22b) 式中的 A_1、B_1、E_1 也含有 α，故 (22b) 式得用迭代逼近法求解。其计算值与试验值的比较列于表 5。

表 4　屈服应力预测值与试验值之间的均方根差 S_D%

m	2	6				8				10			
b		b$_1$	b$_2$	3	0	b$_1$	b$_2$	3	0	b$_1$	b$_2$	3	0
TA2M，0.8mm	3.23	2.42	**2.38**	2.46	5.55	2.46	**2.37**	2.47	4.95	2.51	**2.38**	2.45	4.17
TA2M，1.0mm	5.33	**3.83**	**3.77**	3.85	5.99	3.93	3.84	3.93	5.56	4.03	3.91	3.97	4.99
TA2M，1.5mm	2.10	**1.91**	**1.91**	**2.06**	4.77	2.31	2.31	2.43	4.40	2.47	2.44	2.51	3.75
TA2M，2.0mm	2.87	**2.45**	**2.45**	2.68	5.96	**2.46**	**2.46**	2.72	5.34	2.48	2.48	2.68	4.55
TC1M，0.8mm	5.83	**0.91**	1.08	1.77	4.88	**0.87**	1.02	1.64	4.04	1.24	1.33	1.90	5.46
TC1M，1.0mm	5.22	3.66	**3.58**	**3.57**	4.64	3.82	3.69	3.67	4.31	3.96	3.78	3.77	4.04
TC1M，1.5mm	6.99	4.50	4.50	4.50	4.50	4.62	4.62	4.62	4.62	4.74	4.74	4.74	4.74
TC1M，2.0mm	8.94	**0.70**	1.08	1.17	3.14	**0.94**	1.09	1.09	2.40	1.25	1.52	1.67	3.93
TC3M，1.0mm	5.95	**4.03**	**4.00**	4.08	5.75	4.08	4.04	4.11	5.32	4.15	4.08	4.12	4.85
$\sum$	46.46	**24.41**	**24.75**	26.14	45.18	25.49	25.44	26.68	40.94	26.83	26.66	27.81	40.48

注：1）b$_1$、b$_2$ 见(20)，(21)式；2）TCLM，1.5mm 料只有 0°、45°、90°方向的数据，故 S_D 与 b 无关；

3）最佳、次佳值用黑体表示。

表 5　筒形深拉件凸耳方位预测值与试验值的对比

m	2	6				8				10				试验值
b		b$_1$	b$_2$	3	0	b$_1$	b$_2$	3	0	b$_1$	b$_2$	3	0	
TA2M，0.8mm	48.8°	50.4°	48.6°	**46.3°**	45.7°	54.6°	48.1°	**46.4°**	45.7°	58.6°	47.8°	46.6°	45.8°	46.0°～46.5°
TA2m，1.5mm	51.5°	52.6°	51.1°	**48.3°**	46.4°	56.8°	50.5°	**48.1°**	46.5°	59.5°	50.3°	48.5°	46.8°	47.7°～48.5°
TA2M，2.0mm	48.4°	49.2°	**48.1°**	46.2°	45.5°	53.8°	**47.7°**	46.0°	45.5°	58.90°	47.2°	46.0°	45.6°	46.7°～49.3°
TC1M，0.8mm	46.6°	**48.4°**	46.6°	46.1°	45.7°	**50.5°**	46.6°	46.1°	45.7°	53.9°	46.6°	46.1°	45.8°	49.5°～51.0°
TC1M，1.0mm	48.6°	**50.9°**	48.8°	48.0°	46.6°	54.4°	48.8°	48.1°	46.8°	57.7°	**49.1°**	48.6°	47.2°	49.5°～51.0°
TC1M，1.5mm	47.9°	**50.5°**	**48.1°**	47.4°	46.40°	53.4°	48.1°	47.4°	46.6°	56.5°	48.0°	47.6°	46.8°	49.5°～50.5°
TC1M，2.0mm	51.5°	**55.1°**	52.3°	51.7°	49.2°	**57.2°**	52.7°	52.4°	50.0°	58.6°	53.6°	53.6°	51.1°	55.0°～56.0°

4 结论

(1) 本文所提正交异性非二次式屈服函数是可用的和准确的，其材料常数由单向拉伸试验确定。它也是应用比较方便的各向异性屈服函数；

(2) 本屈服函数中包含的三个新参数，有不同的取值，它可由额外的试验数据确定，也可取为 3，或由(20)及(21)式确定；

(3) 钛板屈服函数的合宜幂次值是 6～8，取 6 较好；合宜的 b 值可由(20)和(21)式确定。取 $b=0$ 是不合适的。

参考文献

1 Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. UK: Oxford at the Clarendon Press, 1950, 317—340
2 Lerson F R. Trans: ASM. 1964,57, 620—631
3 Gotoh M. Int. J Mech. Sci., 1977,19:505—520
4 Hosford W F. In: Proc, 7th North Am. Metal Conf. SME, Dearborn, Michigan, USA, 1971, 191—196
5 Bassani J L. Int. J. Mech. Sci., 1977,19:651—660
6 Hill R. In: Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1979, 85, 179—191
7 Hosford W F. In: Proc, 15th IDDRG Congr, ASM, Dearborn, Michigan, USA, 1988,163—170
8 Bar Lat F, Lian J, Int.J Plasticity, 1989,5, 51—66
9 Zhou Weixian. Int.J.Mech. Sci., 1990; 32: 513—520
10 Drucker D C. Quart Appl.Math., 1956, 14: 35—42
11 Hosford W F. Int.J.Mech. Sci., 1985; 27: 423—427