

岩体断裂几何形状的分形研究^①

张继春 徐小荷

(东北大学采矿工程系, 沈阳 110006)

摘 要

综合论述了岩体断裂几何形状(断层系、节理网络和微裂纹群)的自相似性,其复杂程度能通过分形维数给予很好的定量描述。结果表明,分形维数与岩体受载荷作用的历史紧密相关,各类断裂形状间存在嵌套似的分形结构。另一方面,以实测数据为基础,检验了节理间距分布的统计自相似性,提出了间距分布的分形模型,并与负指数分布进行分析对比。

关键词: 岩体断裂形状 分形维数 节理间距 分形模型

岩体在地质构造运动或外界荷载作用下发生断裂破坏,由于断裂过程的随机性,使得所形成的断裂几何形状复杂多变,给岩体断裂几何形状的定量描述带来很大困难。

近年来的研究表明,岩体破裂过程具有统计自相似性。King等人根据断层系几何形状具有自相似性的假设,以实际断层资料为基础研究发现,地震具有分形结构^[1,2]。Aviles等人用分形维数描述断层的几何形状特征,计算了圣安德烈斯断层的分形维数^[3]。岩体断裂几何形状的自相似性不仅表现在断层系中,而且实验室内岩块破裂过程中形成的微裂纹群几何形状也具有统计自相似性^[4,5]。

本文综合论述了断层系和岩石破裂过程中微裂纹群几何形状的自相似结构,并以实测数据为例,用盒维数法验证了在长期地质构造作用下产生的无明显位移的断裂——节理网络的自相似性。在用分形维数描述岩体断裂几何形状的特征之后,深入研究了节理间距的自相似结构,提出了节理间距分布的分形模型。

1 断裂几何形状的分形特征

分形几何是Mandelbrot引入的描述具有自

相似结构图形的有效工具。自然界中的许多体系和现象如海岸线、河流、树、山脉和星云分布等都具有复杂的形状,但从分形的观点看,却可以从中找到自相似结构,并用分形维数对其形状进行描述^[6]。同样,复杂的岩体断裂几何形状也可用分形几何的方法来处理。

自相似性具有幂规律,本文按盒维数法计算岩体断裂几何形状(断层系、节理网络和微裂纹群)的分形维数。即用间隔为 r 的格子把断裂图形分割成边长为 r 的正方形,设图形与方格相交的个数为 $N(r)$,如果断裂几何形状具有自相似结构,则下式成立^[7]:

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1)$$

式中 D 为分形维数(严格地讲是容量维)

事实上,如(1)式成立, $N(r)$ 与 r 在双对数坐标中呈一条直线,该直线斜率的绝对值即是图形的分形维数。

岩体中赋存有各种各样的断裂,其中之一是具有明显位移的巨型断裂,即断层。例如日本饭田地区边长为74.8 km的正方形区域内含有大的主断层(长度大于37.4 km)的断层系^[7],将该区域每边按 2^n ($n=1, 2, \dots, 5$)逐级等分,在 $r=2.34 \sim 37.4$ km的尺度范围内,分别数出断层线与各级正方形网格相交的个数

① 于1993年3月4日收到初稿

$N(r)$ ，并在双对数坐标中作 $N(r) - r$ 图(图1)，二者之间几乎呈线性关系，表明在该尺度范围内断层系结构具有自相似特征。由最小二乘法计算出分形维数 $D = 1.60$ 。Hirata 对日本各地区的断层系进行了自相似性检验，结果表明：在 2~20 km 的尺度范围内，各断层系均显示出较好的统计自相似特征，其分形维数在 1.05~1.60 之间变化^[7]。

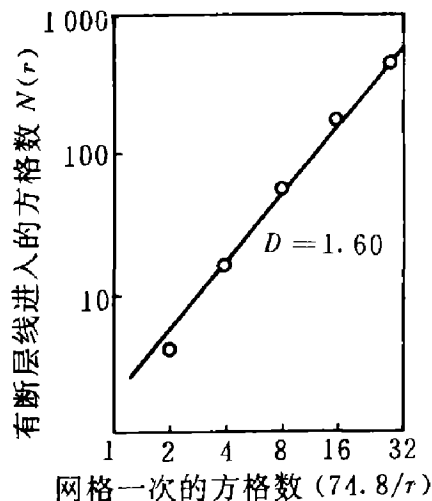


图1 断层系 $N(r)$ 与 r 关系

岩体中还有一些肉眼不易见到的微断裂也不同程度地发育着，这些微裂纹群的几何形状复杂且呈随机分布。Nolen-Hoeksema 和 Gordon 通过对大理岩折叠悬臂梁中缺口处微裂纹在加载下的繁衍进行光学观察以考察微裂纹群的萌生和扩展^[4]，按盒维数法统计出裂纹与五级正方形网格相交的个数 $N(r)$ ， $N(r)$ 与 r 在双对数坐标上很好地符合直线关系(图2)。图2中的百分数分别是各荷载水平与岩石发生破坏时荷载的百分比。在 0.25~2.0 mm 尺度范围内，随着荷载的增加，微裂纹群的分形维数从 0.91 增大至 1.40^[8]。该结果表明，岩体破坏过程中微裂纹几何形状同样具有自相似结构。

节理是岩体中的小型断裂构造，数量极多，几何形状各异，但其分布也具有自相似特征。图3是根据程潮铁矿-220 m 水平 I 区和 III 区的节理在 $r = 0.132 \sim 0.396$ m 的尺度范围内绘出的 $\ln N(r)$ 与 $\ln(1/r)$ 关系图，其线性相关系数分别为 0.9993 和 0.9994，均大于显著水平 $\alpha = 0.001$ 下的临界相关系数 0.9741，表

明该区内节理分布在选定的尺度范围内具有统计自相似性。用最小二乘法求得其分形维数分别为 1.53 和 1.33。对 II 区和 IV 区的节理网络也进行了分形维数计算，表1列出了各区的分形维数与其相应的节理分布参数均值。

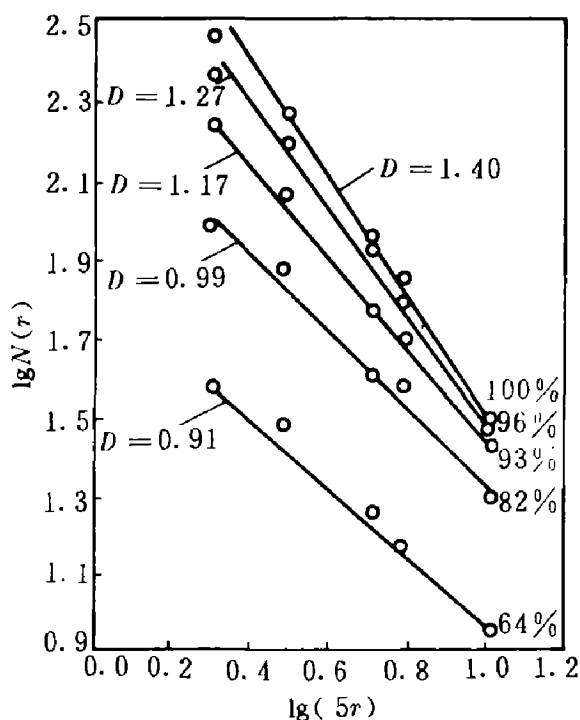


图2 微裂纹群 $N(r)$ 与 r 关系

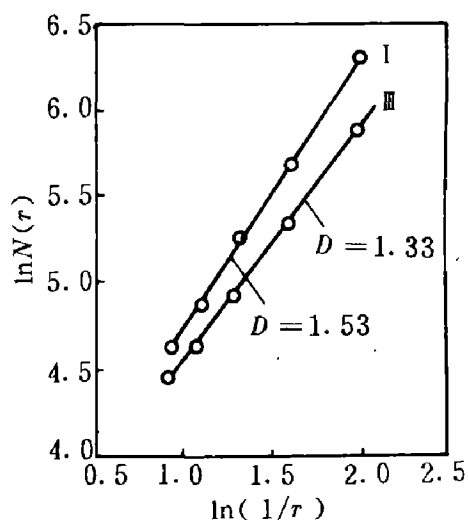


图3 I 区 $N(r)$ 与 r 的关系

上述计算结果表明，岩体的各种断裂构造，无论是大型的断层系、小型的节理网络，还是不易分辨的微裂纹群，其几何形状在相应的尺度范围内均显示出较好的统计自相似特征，具有分形结构，能通过分形维数定量描述

其形状的复杂程度。

表1 程潮铁矿—200 m 水平的节理
分形维数与分布参数

区号	分形维数	节理间距/m	节理迹长/m
I	1.53	0.19	12.6
II	1.49	0.19	11.1
III	1.33	0.39	12.0
IV	1.52	0.17	11.3

从图2的实验结果可知,微裂纹群的形状同加载方式和加载次数及载荷水平相关,分形维数反映了岩体受载荷作用的历史。因此,可从岩体断裂几何形状的分形维数变化特征中分析区域岩体受各种地质作用的规律。此外,对以破碎岩体为目的的工程,则可从岩体的受载条件通过断裂几何形状的分形维数研究岩体的有效破碎方式,分析岩体破碎程度。

对比图3及表1中节理分布参数与分形维数发现,节理间距和迹长分布的差异能通过分形维数反映出来。节理间距小,迹长大时,分形维数大;反之,则分形维数变小。表1中I区和III区节理迹长分布相近(分别为12.6m和12.0m),但I区的间距仅是III区的一半,导致I区的分形维数比III区大0.2,说明节理间距的变化对分形维数有明显影响。

2 节理间距分布的分形模型

2.1 节理间距分布的分形特征

节理间距是反映岩体结构特征的主要参数之一,国内外研究者分别从理论和实测统计两方面分析其分布规律,认为节理间距在多数情况下服从负指数分布^[9,10],即用节理频数(单位测线长度上的节理条数)作为负指数分布参数描述节理间距分布特征。但是,当两组节理的节理频数相等或相近时,其间距分布状态间的差异却不能通过负指数分布反映出来。所以,有必要探寻一种能全面描述节理间距分布总体特征的新方法。

Priest 等人在隧道中三个区域统计出了节理间距组成^[11]。若以节理间距 x 为横坐标,间距大于 x 的节理条数 $N(x)$ 为纵坐标,将三次统计出的 $N(x)$ 与 x 绘于双对数坐标中,如图4所示。二者在各自间距变化范围内几乎呈一直线,对各次统计数据按 $\ln N(x) = A \ln x + B$ 进行回归,计算结果列于表2。由分形定义知,直线斜率的绝对值即是分形维数 D 。

表中的 ρ 和 ρ_0 分别表示回归计算的相关系数和在显著水平 $\alpha = 0.001$ 下满足线性关系的临界相关系数。回归结果表明, $\ln N(x)$ 与 $\ln x$ 之间确实存在很强的线性关系,节理间距分布符合统计自相似性质,即大于间距 x 的节理数 $N(x)$ 具有如下分形规律:

$$N(x) \propto x^{-D} \quad (2)$$

因此,可用分形几何方法描述节理间距的分布特征。从计算结果知,三个区域的间距分形维数分别为2.07、1.49和1.02,对比表2可知,在间距变化范围内,小间距部分所占节理数的比率大者,其分形维数也大。

2.2 节理间距组成的分形构造过程

对岩体结构面(劈理、节理、断层)的调查统计发现,从小至劈理到大至地壳断裂的分布

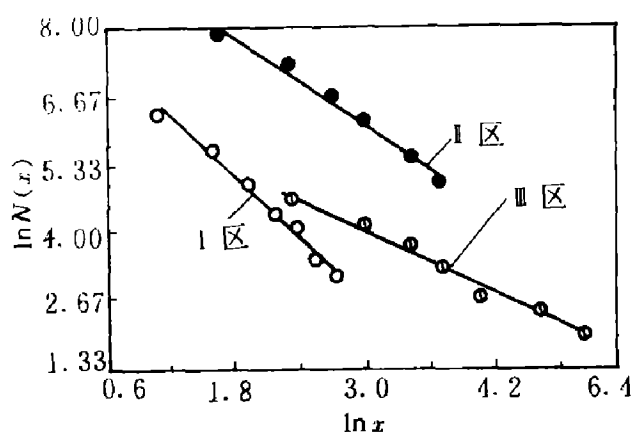


图4 $\ln N(x)$ 与 $\ln x$ 关系

表2 节理间距的线性回归结果

序号	A	B	ρ	ρ_0	D
1	-2.07	8.9	0.9912	0.9507	2.07
2	-1.49	10.62	0.9819	0.9746	1.49
3	-1.02	7.11	0.9947	0.9507	1.02

都具有等距性规律^[12]。该规律只存在于同级序结构面中,当无级序地进行节理面观察与统计时就会发现,节理间距分布具有局部与整体间的自相似结构,由此组成的节理间距可以很好地通过分形构造过程表示出来。

图5是一均匀康托集构造过程,它说明了一组节理间距组成是如何导致分形分布。取一线段 E_0 作 N 等分,去掉其中 M_1 条线段形成 M 条线段集 E_1 ($M_1 + M = N$), E_1 的 M 条线段中再各作 N 等分,并各去掉其中的 M_1 条线段形成 M^2 条线段集 E_2 。按此法划分下去,最终形成一相似比 $r = 1/N$,生成数 M 的均匀康托集 F 。其分形维数为

$$D = \ln M / \ln(1/r) \quad (3)$$

图5是 $M = 2$, $r = 1/3$ 的三分康托集。若将均匀康托集每次构造所截去的线段视为同级序的节理间距,令第一次构造截去的线段长为最大节理间距 x_m ,第 i 次构造形成的节理间距为

$$x_i = r^{i-1} x_m \quad (4)$$

相应截去的线段个数为 $N_i = M^{i-1} M_1$ 。

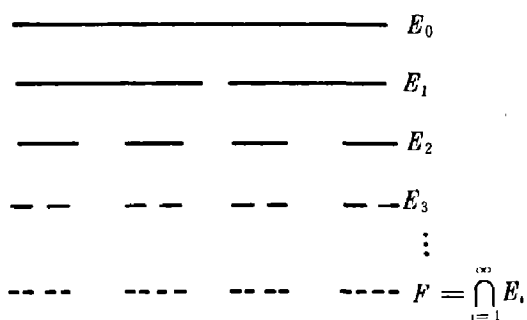


图5 节理间距组成的分形构造过程

因工程岩体需考虑节理面尺寸效应,存在最小节理间距 x_0 , 设第 n 次分形构造截去的线段长 x_n 即为测线内的 x_0 , 则节理总数为

$$N_t = \sum_{i=1}^n N_i = M_1(M^n - 1)/(M - 1)$$

间距大于 x_k 的节理数为

$$N_k = \sum_{i=1}^k N_i = M_1(M^k - 1)/(M - 1)$$

测线长度内节理间距大于 x_k 的节理数与总节理数的比率为

$$y(x \geq x_k) = (M^k - 1)/(M^n - 1)$$

当 n 足够大时,上式近似为

$$y(x \geq x_k) = (M^k - 1/M^{n-1} - 1/M^{n-1}) \div (1 - 1/M^{n-1}) \quad (5)$$

由(4)式得: $n - 1 = \ln(x_0/x_m)/\ln r$, $k - 1 = \ln(x_k/x_m)/\ln r$, 并引入(3)式,则(5)式可改写为

$$y(x \geq x_k) = [(x_k/x_0)^{-D} - (x_m/x_0)^{-D}] \div [1 - (x_m/x_0)^{-D}] \quad (6)$$

上式即是节理间距分布的分形模型。

从间距的分形构造过程可知,在构造次数 n 一定的条件下,对于给定的相似比 r ,生成数 M 增大时,表示小间距节理所占比率大,分形维数也增大,这与前述统计结论一致。

若测线内共有 l 组节理,且第 j 组节理间距的分形维数为 D_j ($j = 1, 2, \dots, l$),则由均匀康托集的乘积集性质可知,测线内全部节理间距分布的分形维数由下式给出^[13]:

$$D = \sum_{j=1}^l D_j \quad (7)$$

虽然以均匀康托集建立的节理间距分布模型十分理想化,但它说明了节理间距组成将导致分形分布这一基本原理,并且其结论与按实测数据得到的统计自相似规律(2)式一致。若 N_0 为节理总数,则(2)式可写为

$$N(x \geq x_k) = N_0(ax_k^{-D} + b) \quad (8)$$

且满足: $\begin{cases} x = x_0 \text{ 时 } N = N_0 \\ x = x_m \text{ 时 } N = 0 \end{cases} \quad (9)$

由(8)、(9)两式即可得到与(6)式相同的分形模型。

2.3 分形模型与负指数分布的比较

工程上多以负指数律描述节理间距分布,在有限测线长度内间距大于 x 的节理比率为

$$y(> x) = (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda L})/(1 - e^{-\lambda L}) \quad (10)$$

式中 L 为测线长度, λ 为节理频数

按(10)式计算表2的节理间距分布并与统计值比较可知,该理论值在大间距部分比实际值小,在中等间距部分比实际值大,而小间距部分又比实际值小。这些偏差均比分形模型大。图6是第三区实测的节理间距分布及其按负指数分布和分形模型拟合的曲线,分形模型

比负指数分布更接近实测间距分布。

比较(6)、(10)两式可知,在两组节理的平均距相同时,只有前者能反映出这两组节理间距分布的差异,而且节理频数不能象分形维数那样具体比较某一间距范围内的间距比率以说明其分布的总体特征。

(10)式以测线长度作为间距变化的上限,当平均间距很小或测线较长时, $e^{-x/L}$ 项完全可以忽略。分形模型则不会因测线的增长而产生明显变化,却更接近实际分布,而且由于将最小节理间距引入间距分布式中,避免了负指数分布在小间距部分比率过小的误差。

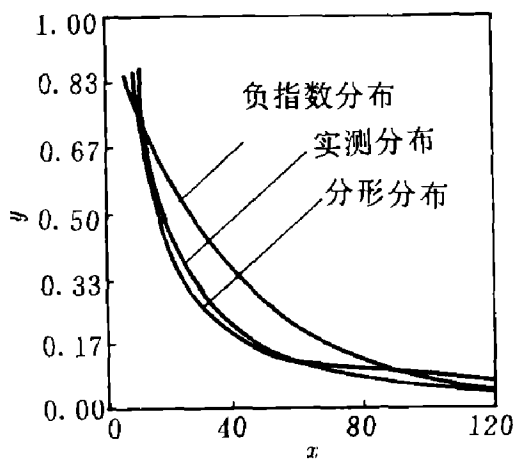


图6 分形分布与负指数分布对比

由于分形模型要求在测线内逐一记录节理间距,大大增加了信息量,使得分形模型比负指数分布更全面、准确地描述节理间距分布特征,有利于节理分布的计算机模拟。

3 结 论

(1)岩体的各种断裂构造无论其规模大小均显示出较好的统计自相似特征,具有分形结构,分形维数能定量描述其形状的复杂程度。

(2)岩体断层、节理和微裂纹群的几何形状与尺度无关,且存在嵌套似的分形结构。各

种断裂几何形状的分形维数与岩体受载荷作用的历史紧密相关。

(3)节理网络的分形维数定量描述了节理分布的总体特征和复杂程度,其大小反映了节理间距分布的疏密和迹长分布的长短。

(4)节理间距分布符合统计自相似规则,通过分形维数和最小节理间距能建立起全面描述节理间距分布状态的分形模型。

(5)节理间距的分形模型包含有比负指数分布更多的间距信息,限定了间距变化范围,使得节理网络的计算机模拟符合工程地质特点,并且不同的间距分布状态可以通过分形维数进行定量分析比较。

参考文献

- 1 King G. Pure Appl Geophys, 1983, 121, 761—815.
- 2 Aki K. In: Earthquake Prediction (Simpson D W and Richards P G eds.) Maurice Ewing Volume 4. AGU, Washington D. C., 1981, 566—574.
- 3 Aviles C A, Scholz C H and Boatwright J. J Geophys Res, 1987, 92, 331—344.
- 4 Nolen—Hoeksema R C, Gordon R B. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1987, 24(2): 135—144.
- 5 Hirata T, Satoh T, Ito K. Geophys J R Astr Soc, 1987, 90, 369—374.
- 6 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1982.
- 7 Hirata T. PAGEOPH, 1989, 13, (1/2): 157—170.
- 8 李功伯等,见:第二届全国分形理论及应用学术讨论会文集.华中理工大学科学技术学会编,武汉,1991,112.
- 9 Priest S D, Hudson J A. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1981, 18, 183—197.
- 10 Walls P F, King M S. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1980, 17, 63—66.
- 11 Priest S D, Hudson T A. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1976, 13, 135—148.
- 12 孙广忠著,岩体结构力学.北京:科学出版社,1988,44.
- 13 Falconer K J(著),曾文曲等(译).分形几何—数学基础及其应用.沈阳:东北工学院出版社,1991,133.