

流膜表面波及其对细粒分选的影响^①

王 卫 星

(武汉钢铁学院)

摘 要

根据表面波的流体运动方程,按照流膜选矿的特定边界条件,建立了表面波运动的速度势方程,并以颗粒的沉降末速小于或等于表面波的垂直分速为临界条件,提出了确定流膜选矿分选粒度下限的理论公式,该公式在选矿实践中有重要参考价值。

关键词: 重力选矿 流膜选矿 流体力学 两相流

利用薄层水流的流膜选矿法是分选细粒矿物的主要手段。近二十年来,流膜选矿有了新的发展,特别是回收微细矿粒的流膜选矿新设备不断出现。在现代矿泥重选工艺中,流层厚度只有1~2mm,称之为薄流膜选矿过程。薄流膜表面波的存在,对细粒分选有一定影响,是细粒重矿物损失于尾矿的主要原因^[1,2]。因此,弄清什么条件下表面波所造成的细粒损失最少,对提高细粒重矿物的回收率很有应用价值。

流体表面波的理论研究在很多流体力学专著中均有介绍,按其产生表面波的性质不同分为重力波和毛细波,波长大于1.72 cm者称为重力波,小于1.72 cm者称为毛细波。前者主要受重力作用而引起,而后者则主要受流体表面张力作用而引起。表面波的传播速度 c 与波长 λ ,重力加速度 g 和液体表面张力 σ 的关系为^[3]

$$\text{重力波} \quad c_g = \sqrt{g\lambda / 2\pi} \quad (1)$$

$$\text{毛细波} \quad c_c = 2\pi\sigma / (\rho\lambda) \quad (2)$$

(1)式中 c_g 为重力波传播速度;(2)式中 c_c 为波传播速度, ρ 为流体密度。

但一般流体力学专著中有关流体表面波对

颗粒运动介绍极少。本文试图根据流膜选矿特定的边界条件,建立适合流膜分选设备的表面波计算公式,并探讨其对细粒分选的影响。

1 理想流体流膜的表面波动

1.1 理想流体表面波速度势

如果可以将尤拉方程中的 $(V \cdot \nabla)V$ 项略去,则流体运动是有势的。高表面波的波幅为 a ,波动周期为 τ ,要略去 $(V \cdot \nabla)V$ 相当于

$$(V \cdot \nabla)V \ll \partial V / \partial t \quad (3)$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\tau} \right)^2 \ll \left(\frac{a}{\tau} \right) \frac{1}{\tau} \quad (4)$$

$$\text{由(4)式得} \quad a \ll \lambda \quad (5)$$

可见,当波幅远远小于波长时,表面波的运动是有势的。根据对流膜选矿设备的观察,表面波动层约0.1~0.2 mm,而波长在厘米级范围,因此在流膜选矿中能满足条件(5)。选取坐标系如图1,设流体运动的速度势为 φ ,在满足(5)式的条件下,有

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

①国家(青年)自然科学基金资助项目;1992年6月15日收到初稿

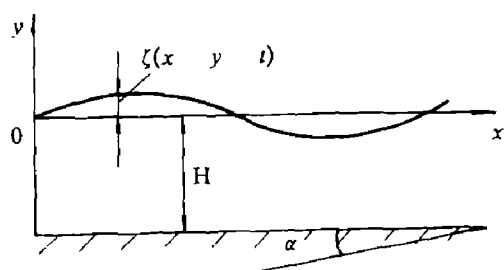


图1 流膜表面波示意图

1.2 速度势的求解

由于事先不能确定流膜表面波属何种类型, 因此, (6) 式的边界条件既要考虑重力也要考虑表面张力的作用, 边界条件为^[4]

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2}\right)_{z=0} = 0 \quad (7)$$

而在流膜与分选底面(固体壁)的界面上, 有

$$V_z|_{z=-H} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=-H} = 0 \quad (8)$$

利用求解偏微分方程的分离变量法, 可求得(6)式在满足边界条件(8)的解为^[5]

$$\varphi(x, y, t) = C \operatorname{ch}[k(z+H)](A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \times (B_1 \cos kx + B_2 \sin kx) \quad (9)$$

与一般的波动理论比较, 可类似认为 ω 为波动的圆频率, 它与波频率 f 的关系为

$$\omega = 2\pi f \quad (10)$$

k 为表面波的波数, 它与波长的关系为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11)$$

利用边界条件 (7), 可得到圆频率与波数之间的关系:

$$\omega^2 = (gk + \sigma k^3 / \rho) \operatorname{th}(kH) \quad (12)$$

而 (9) 式的最终解为

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0 \operatorname{ch}[k(z+H)] \times \sin(\beta + kx) \cos(\alpha - \omega t) \quad (13)$$

式中 φ_0 、 β 和 α 均为待定系数。

进一步分析(13)式可知, 右边第一项为波动随流膜厚度的衰减, 第二项为波动随流体沿

程的变化, 而第三项为波动随时间的变化。(13)式为流膜表面波的速度势, 而对分选有直接影响的是表面波的垂直分速 V_z 。

1.3 表面波的垂直分速及位移

将 (13) 式对 z 求导, 得

$$V_z = \partial \varphi / \partial z = k \varphi_0 \operatorname{sh}[k(z+H)] \times \sin(\beta + kx) \times \cos(\alpha - \omega t) \\ \text{或 } V_z = V_0 \operatorname{sh}[k(z+H)] \times \sin(\beta + kx) \times \cos(\alpha - \omega t) \quad (14)$$

若用 ζ 表示流膜表面上流体质点离开平衡位置的位移, 则

$$V_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

因波动的幅度较小, 上式右边第二项与第一项相比是二阶小量, 可忽略不计^[3], 故

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx V_z \\ \zeta = \int V_z dt = (V_0 / \omega) \operatorname{sh}[k(z+H)]$$

$$\times \sin(\omega t - \alpha) \sin(\beta + kx) + C$$

在流膜与分选底面的界面上垂直位移为零, 即

$$\zeta|_{z=-H} = 0 \quad (15)$$

由此得到表面波的垂直位移公式

$$\zeta = \zeta_0 \operatorname{sh}[k(z+H)] \times \sin(\omega t - \alpha) \sin(\beta + kx) \quad (16)$$

式中 ζ_0 ($= V_0 / \omega$) 为待定常数

2 粘性流体流膜表面波的衰减

2.1 粘性流体的表面波动

得到公式 (13) 时, 曾假定流体的流动服从尤拉方程, 但这仅在流体是理想流动时才成立。而实际上流膜中流体是有粘性的, 因此有必要考虑流体的粘性对表面波的衰减作用。

粘性流体运动必须在自由面 (流膜表面) 上满足边界条件

$$\tau_{ij} n_j - p n_i = 0$$

式中 τ 为流体切应力; n 为单位矢量; p 为流体压力。在图 1 所示的坐标下, 即要求

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = 0 \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = 0 \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} = \rho \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

也就是要求各分速对坐标的导数的一定组合为零。然而从理想流体的尤拉方程中所得解无法满足这些条件,但所得的速度势 φ 能使速度的垂直分量满足粘性流体时的边界条件,而速度的切向分量在贴近分选底面的薄流膜层内必然发生迅速的变化,即速度梯度很快地减小,据此可计算粘性引起的表面波内的能耗散。

2.2 表面波内的能耗散

由于流体粘性引起的能耗散包括动能耗散与势能耗散,其表达式为^[6]

$$D_e = -\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

式中 D_e 为能耗散,积分域 Ω 应沿整个流膜进行。忽略底面很薄一层流体的作用,由于

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial V_k}{\partial x_i}$$

$$\text{故 } D_e = -2\mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 d\Omega \quad (18)$$

式中速度势 φ 由(13)式给出。使我们感兴趣的不是瞬时能耗散,而是时均能耗散:

$$\begin{aligned} D_e &= -2\mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 d\Omega \\ &= -2\mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right)^2 d\Omega \end{aligned}$$

由(13)式,可得长为一个波长,高度为 H 的单位宽度流体时的时均能耗散

$$D_e = -8\mu k^4 \varphi_0^2 \left[\frac{\text{sh}(2kH)}{8k} - \frac{H}{4} \right] \quad (19)$$

2.3 表面波本身的波动能

按振动的一般原理,在微振的任一系统中振动的平均动能与(平均)势能是相等的,因此,表面波波动能 E 可表示为动能的二倍:

$$\bar{E} = \rho \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

式中积分域 Ω 与(18)式相同,由此可获得

$$\bar{E} = \rho k^2 \varphi_0^2 \frac{\text{sh}(2kH)}{4k} \quad (20)$$

2.4 粘性流体表面波的衰减

波的衰减可借所谓的衰减系数 γ 来表示,它定义为时均能耗散与波动能之比,由(19)式和(20)式,可得

$$\gamma = 2\nu k \frac{\text{sh}(2kH) - 2kH}{\text{sh}(2kH)} \quad (21)$$

(21)式指出,粘性引起的表面波衰减随波数 k 值的增大而增加,还与流膜厚度有关。粘性导致的波能衰减按 $e^{-2\gamma}$ 规律变化^[7],因波能正比于波幅的平方,故波幅将按 $e^{-\gamma}$ 的规律衰减,(16)式考虑粘性的衰减后,可写成

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 e^{-\gamma} \text{sh}[k(z+H)] \\ &\times \sin(\omega t - \alpha) \sin(\beta + kx) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} V_z &= \omega \zeta_0 e^{-\gamma} \text{sh}[k(z+H)] \\ &\cos(\omega t - \alpha) \sin(\beta + kx) \end{aligned} \quad (23)$$

如能用试验确定各公式中的待定系数,就可预测不同流膜流动条件下的垂直分速及位移,进而可确定流膜分选的回收粒度下限及表面波动层的厚度。

3 流膜表面波对细粒分选的影响

流膜表面波的存在是细粒不能有效回收的主要原因。因为细颗粒受到表面波的作用时,那些沉降速度小于垂直分速的颗粒,将不受到分选作用,随水流排入尾矿中。作者将运用前面导出的公式,确定流膜分选的粒度下限,即理论上能回收的最细颗粒。

3.1 临界回收粒度 d_{cr}

根据(23)式,在流膜表面($z=0$)表面波的最大垂直分速为

$$V_{\max} = \{V_z\}_{z=0\max} = \omega \zeta_0 e^{-\gamma} \text{sh}(kH) \quad (24)$$

由流膜选矿的实际试验测定^[8,9],流膜表面波动层的厚度约占流膜总厚度的20%,即

$$2\zeta_0 / H = 0.2$$

$$\text{那么 } \zeta_0 = 0.1H \quad (25)$$

代入(24)式,得

$$V_{\max} = 0.1\omega He^{-\gamma} \text{sh}(kH) \quad (26)$$

粒径为 d 的颗粒在流膜中的沉降速度,由于颗粒较小,可按斯托克斯公式计算,即

$$V_s = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} \quad (27)$$

式中 ρ_s 为颗粒的密度

颗粒能回收的临界条件为

$$V_s \geq V_{\max} \quad (28)$$

将(26)式和(27)式代入上式,可得临界回收粒度为

$$d_{cr} = \sqrt{\frac{1.8\mu\omega He^{-\gamma} \text{sh}(kH)}{(\rho_s - \rho)g}} \quad (29)$$

当粒度小于 d_{cr} 时,颗粒不能被有效回收。由(29)式可知,临界回收粒度随流膜厚度的增加而增大,随颗粒密度的增大而减小。

3.2 d_{cr} 在流膜选矿中的应用

根据依瓦洛夫对流膜表面波的试验研究^[10],认为流膜表面的波动是介于重力波与毛细波之间的组合波,此时波长约 1.72 cm,由(11)式可算出 k 值为 3.65 cm^{-1} 。若流体为水,在厘米克秒单位制下,(29)式可写为

$$d_{cr} = 42.86 \sqrt{\frac{\omega He^{-\gamma} \text{sh}(3.65H)}{\rho_s - 1}} \quad (\mu\text{m})$$

上式仅是考虑了表面波中一个基波的情况,但流膜选矿中实际发生的表面波是各种波迭加的结果,由上式计算出的 d_{cr} 值比实际中偏高,因此需乘上一修正系统,即

$$d_{cr} = 42.86W \sqrt{\frac{\omega He^{-\gamma} \text{sh}(3.65H)}{\rho_s - 1}} \quad (\mu\text{m}) \quad (30)$$

根据作者多次试验的结果,15 μm 石英颗粒在流膜表面的悬浮概率大于 0.9,由此可算出修正系数 W 约为 0.3。各种密度矿粒流膜选矿时的临界粒度,即回收粒度下限见表 1,计算时流膜厚度取 0.1 cm, ω 、 γ 值分别由(12)式和(21)式计算。表 1 中各种矿粒的回收粒度下限与目前国内外流膜选矿设备的回收粒度基本一致。

表 1 各种矿粒流膜选矿时的粒度下限(理论值)

矿粒	密度 / $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	回收粒度下限 / μm
石英	2.65	14
磁铁矿	5.01	9
赤铁矿	4.30	10
黑钨矿	7.30	7
锡石	6.92	7
方铅矿	7.65	7
自然金	17.00	4

4 结论

(1) 在忽略尤拉方程中牵移加速度的情况下,根据流膜选矿的特定边界条件,在考虑重力和表面张力作用后,求出了适用于理想流体流膜表面波的垂直分速及垂直位移计算公式;

(2) 根据粘性引起的表面波能耗散与表面波本身的波动能,得出了考虑粘性的衰减后表面波的垂直分速及位移;

(3) 由矿粒沉降速度等于或大于表面波的垂直分速这一临界条件,确定了流膜选矿的粒度下限,即理论上能回收的最小颗粒。

参考文献

- 1 黄枢. 金属矿山, 1984, (9): 25-32.
- 2 范象波. 见细粒选矿进展论文集, 中国选矿情报网细粒分选网, 武汉, 1987. 51-79.
- 3 ЛевиГ В Г 著, 戴干策, 陈敏恒译. 物理-化学流体动力学. 上海: 科技出版社, 1965: 611-613.
- 4 Конлен Н Е 著理论流体力学, 第一卷第二分册. 北京: 高等教育出版社, 1956. 459-463.
- 5 梁昆森. 数学物理方法. 北京: 人民教育出版社, 1979. 200-231.
- 6 赵学端. 粘性流体力学. 北京: 机械工业出版社, 1986. 55-56.
- 7 Ландау Л Д 等著, 彭旭麟译. 连续介质力学. 第一册. 北京: 人民教育出版社, 1978. 123-128.
- 8 王卫星. 硕士论文, 中南矿冶学院, 1984. 101-105.
- 9 顾枫. 硕士论文, 中南矿冶学院, 1981. 97-100.
- 10 Иванов В Д, Изв Вузов. Цоскола: Цветнаг Метамургчг, 1983, (2): 9-12.