

多分辨分析和重磁异常的识别与分层次提取^①

汤井田 宋守根 何继善

(中南工业大学地质系,长沙 410083)

摘 要

利用小波变换及多分辨分析的原理,对重磁异常进行分析,给出了区域异常和局部异常的识别与分层次提取的方法。

关键词: 小波变换 多分辨分析 异常识别 分层次提取

重磁异常往往是由区域异常和局部异常叠加而成的,如何有效地识别区域异常和局部异常的存在并对它们进行分离是非常有意义的。

在重磁异常数据处理方面,特别是频谱分析和各种滤波方法中,Fourier变换和加窗Fourier分析是应用最广泛,也是最重要的数学工具。然而,它们的基函数或不具有紧支集特性或不具有正交性,因而在应用中仍存在许多固有的弱点。

小波变换是80年代末期新兴的数学分支,并得到了数学家、工程学家的广泛关注。它已在语音分析、图像处理、地球物理数据处理等众多的信号处理领域得到了广泛的应用。本文将利用小波变换及多分辨分析的原理,给出识别和分层次提取重磁区域异常与局部异常的方法。

1 小波变换与异常的识别

1.1 小波变换及其特点

为表述方便,引入下述记号

$L^2(R)$ —平方可积函数空间

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — $L^2(R)$ 上两个函数的内积,即:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

定义1 设函数 $\psi(x) \in L^2(R)$, 且满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1)$$

称函数 $\psi(x)$ 为小波母函数,简称母小波。其中 $\hat{\psi}(\omega)$ 表示函数 $\psi(x)$ 的 Fourier 变换。

定义2 设函数 $f(x)$ 是能量有限的,即 $f(x) \in L^2(R)$, 则 $f(x)$ 的小波变换定义为:

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \langle f, \psi_{ab} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$,

$\overline{\psi(x)}$ 为 $\psi(x)$ 的共轭

从上式可看出,小波变换用母小波 $\psi(x)$ 的伸缩平移产生的函数簇 $\psi_{ab}(x)$ 代替了 Fourier 变换的基函数 $\{e^{-i\omega x}\}$ 。在数学上可以证明,函数 $\{\psi_{ab}(x)\}$ 经离散后组成了 $L^2(R)$ 上的一组标准正交基,因而小波变换继承了 Fourier 变换的许多性质。另外,从(2)式可知,若函数 $\psi(x)$ 具有紧支集,即它只在某一窗口之内是非零的,而在该窗口之外恒为零,那么,小波变换(2)式就具有良好的时间域-频率域的局部化特性。正是利用这一点,选择具有最佳空间分辨率的

^① 属国家自然科学基金和湖南省科学基金资助项目 收稿日期:1993年6月10日

母小波,可以对重磁异常进行识别。

由于 $\psi_{ab}(x)$ 是由母小波 $\psi(x)$ 的连续伸缩和平移产生的,因而从(2)式中不难得出如下的尺度和分辨率的概念。

如图1所示,当 $a > 1$, $\psi(x)$ 波形在 x 轴上扩展, (2)式的空间分辨率降低;而当 $a < 1$ 时, $\psi(x)$ 的波形在 x 轴上压缩,相应的空间分辨率也增加。因此,对具紧支集的母小波 $\psi(x)$,随着 a 的减小, $\psi_{ab}(x)$ 波形越窄,其频谱也越集中于高频部分,相应地其空间分辨率也越高,这时的小波变换 $W_f(a, b)$ 表现的就是信号 $f(x)$ 的局部细节特征。相反,随着 a 的增长, $\psi_{ab}(x)$ 的支集 $\text{supp}\psi_{ab}(x)$ (也即其波形)变宽,从而空间分辨率下降,其频谱也越集中于低频部分,这时小波变换 $W_f(a, b)$ 表现的是信号 $f(x)$ 的区域特征。由此可见,小波变换 $W_f(a, b)$ 对不同的频率具有不同的分辨率,因而具有自动“调焦”的能力,即频率越高,其分辨率也越高,反之亦然。利用这一特点,我们便可在不同的尺度 a 下将信号 $f(x)$ 中包含的不同频率成份的信号分离出来,即信号的分层次提取。

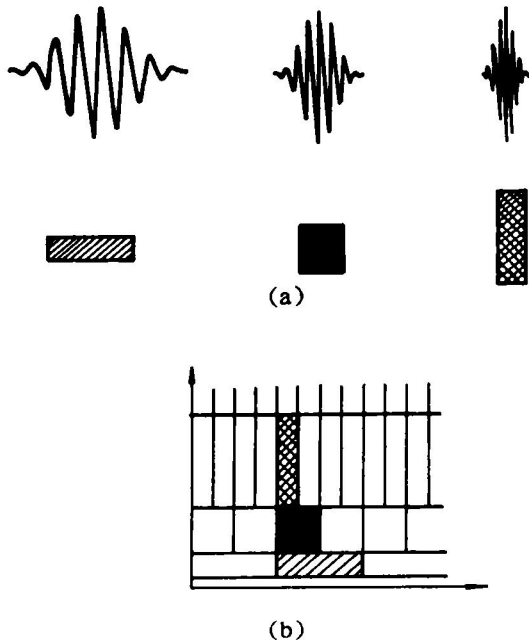


图1 $\psi(x)$ 的伸缩和平移示意图

(a) — 母小波的伸缩; (b) — 时频特性

2 异常的识别方法

通过上面的分析,我们知道,选择不同的母小波 $\psi(x)$, 是可以对重磁区域异常和局部异常进行识别与分层次提取的。

如果设 $\theta(x)$ 是高斯分布函数。取 $\psi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$, 则可证明 $\psi(x)$ 满足母小波的条件, 其分布特征如图2所示, 可以证明, 函数 $\hat{\psi}(\omega)$ 具有最佳的频域分辨率。

对函数 $f(x) \in L^2(R)$ 作小波变换, 母小波为 $\frac{d\theta(x)}{dx}$, 则有:

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= -\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d\theta}{\frac{x-b}{a} db} dx \\ &= -\sqrt{a} \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \theta\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= -a \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \theta_{ab}(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{故: } |W_f(a, b)| = a \left| \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \theta_{ab}(x) dx \right| \quad (3)$$

其中 $a > 0$, $\theta(x)$ 为实函数。

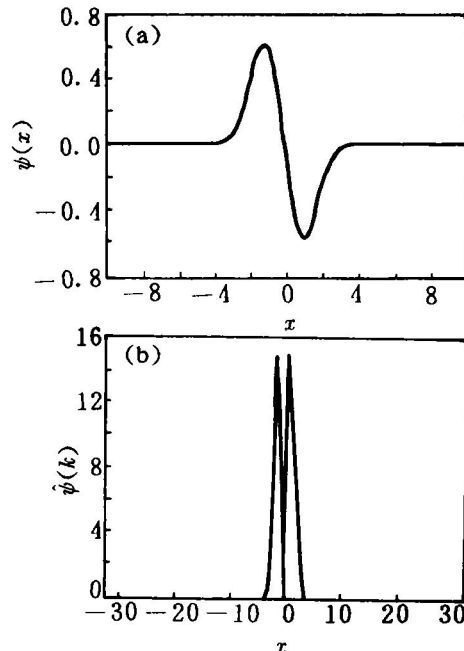


图2 最佳分辨母小波的时频特征

从(3)式可以看出,小波变换模的极大值点是对应于尺度 a 下信号 $f(x)$ 与 $\theta_{ab}(x)$ 磨光之后变化的剧烈点,如图3所示。因此,当信号 $f(x)$ 在某处是一阶或二阶(甚至 N 阶)不连续时,经过与 $\theta_{ab}(x)$ 在相应尺度下的磨光之后,该不连续点表现为 $|W_f(a, b)|$ 的极大值点。

在重磁异常中,异常总表现为某背景场上的突变。用确定 $|W_f(a, b)|$ 极大值的方法就能识别异常的存在并圈出其存在范围。具体地说,对适当小的尺度 a , $|W_f(a, b)|$ 极大值点对应于与 a 相适应的局部异常。对于较大的尺度 a , $|W_f(a, b)|$ 极大值点便对应于较大范围内的异常。因此,随着 a 的变化,我们就可以识别出不同层次异常的存在及其范围,从而将其在不同的尺度上分离开。

3 异常的分层次提取

下面研究异常的分离方法。为此需要用到正交小波或小波包^[1,2]。理论上已证明^[2],存在一些特殊的母小波 $\psi(x)$,使得:

$$\psi_{ji}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - i) \quad (4)$$

$j, i \in \mathbb{Z}$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个正交基。故对 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$,有:

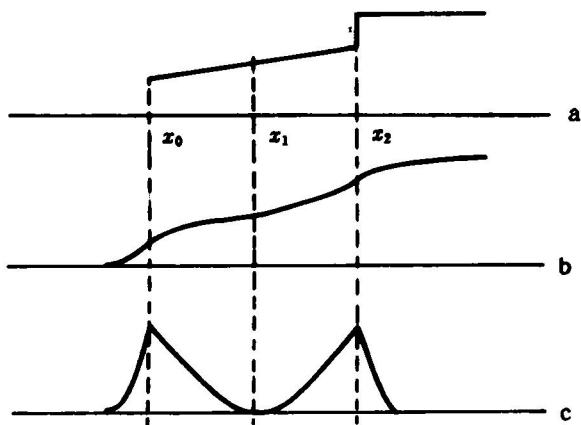


图3 信号突变点与小波变换模特征

a—信号 $f(x)$; b— $f(x)$ 的积分; c—小波变换模

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} W_f(j, i) \psi_{ji}(x) \quad (5)$$

式中 $W_f(j, i) = \langle f(x), \psi_{ji}(x) \rangle$

为构造上述母小波 $\psi(x)$,并使(5)式适用于工程应用,需要引入多分辨分析的概念。它是由美国数学家 Mallat 提出的^[1]。正是由于多分辨分析的提出,才使得小波分析在工程上得到了更深入广泛的应用。

定义3: $\{V_s\}$ 称为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨分析,则:

$$(a) \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

$$(b) \bigcap_{s \in \mathbb{Z}} V_s = \{0\}; \quad \overline{\bigcup_{s \in \mathbb{Z}} V_s} = L^2(\mathbb{R})$$

$$(c) \text{对 } \forall m \in \mathbb{Z}, \text{有 } f(x) \in V_m \Leftrightarrow f(2x) \in V_{m+1}$$

定义4: 设 $\{V_s\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨分析, $\{W_s\}$ 称为 $\{V_s\}$ 的下交补,则有:

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

定理: 设 $\{V_s\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨分析, $\{W_s\}$ 是它的正交补,则存在母小波 $\psi(x)$,其伸缩平移(4)式构成 W_s 的标准正交基,并存在尺度函数 $\varphi(x)$,使 $\varphi_{ji}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - i)$,而 $j, i \in \mathbb{Z}$,构成 V_s 的标准正交基,且使 $\psi_{ji}(x)$ 和 $\varphi_{ji}(x)$ 互相正交^[2](证明略)。

由此可知,对于任意函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$,都可以将它在 $\{V_s\}$ 和 $\{W_s\}$ 中分解。对于实际地球物理信号,采样仪器记录的分辨率都是有限的,可以设这个分辨率为1(即 $j=0$)。这也相当于将 $f(x)$ 看作是 V_0 中的元素,即 $f(x) \in V_0$,因而:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^0 \varphi(x - n); \quad C_n^0 = \langle f(x), \varphi(x - n) \rangle \quad (6)$$

又由 $V_0 = V_1 \oplus W_1$,所以可将 $f(x)$ 分解为:

$$f(x) = P_1 f(x) + Q_1 f(x) \quad (7)$$

其中 $P_1 f(x) \in V_1$, $Q_1 f(x) \in W_1$,即:

$$P_1 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k^1 \varphi_{1k}(x);$$

$$Q_1 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^1 \psi_{1k}(x)$$

由小波函数和尺度函数的构造^[2],得:

$$C_k^1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^0 h(n - 2k);$$

$$d_k^1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^0 g(n - 2k) \quad (8)$$

其中 数列 $\{h(n)\}$ 和 $\{g(n)\}$ 分别是传递函数 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 的响应。即:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\omega};$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) e^{-ik\omega}$$

这里 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分别由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 完全确定。即:

$$\hat{\varphi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\varphi}(\omega);$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$$

由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的性质可知, $\varphi(x)$ 对应于一个低通滤波器, 而 $\psi(x)$ 对应于带通滤波器, 其频谱特性可参见图 4 和图 5。

由此可见, (7) 式中 $P_1 f(x)$ 是信号 $f(x)$ 的一级光滑部分, $Q_1 f(x)$ 是相应的细节部分, 利用 (8) 式可完成相应的分解运算。由于 $P_1 f(x) \in V_1$, 利用 $V_1 = V_2 \oplus W_2$, 可将 $P_1 f(x)$ 分解为:

$$P_1 f(x) = P_2 f(x) + Q_2 f(x) \quad (9)$$

其中: $P_2 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k^2 \varphi_{2k}(x)$

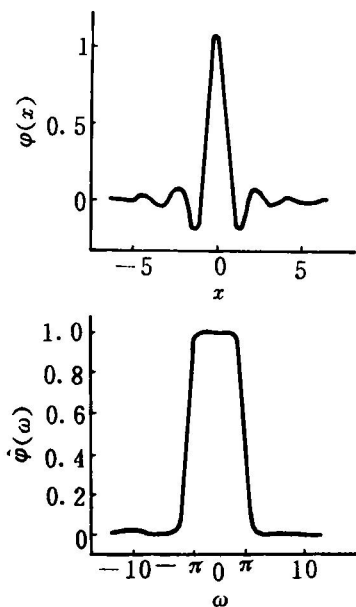


图4 尺度函数 $\varphi(x)$ 特性

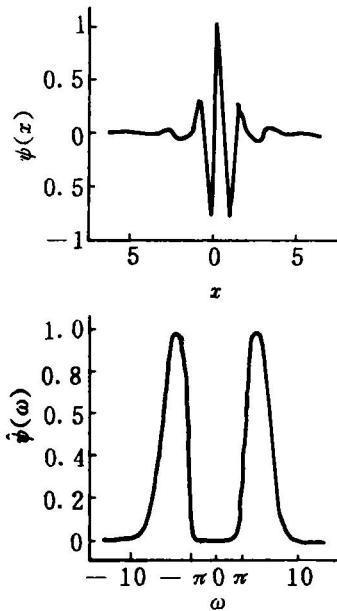


图5 小波函数 $\psi(x)$ 特性

$$Q_2 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^2 \psi_{2k}(x);$$

分别对应于 $f(x)$ 的二级光滑部分和细节。与 (8) 式相同, 有:

$$C_k^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^1 h(n - 2k);$$

$$d_k^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^1 g(n - 2k) \quad (10)$$

依次类推, 可将 $P_2 f(x)$ 分解, 直至达到要求的分解层数 J 。

将信号分解后, 消去不必要的细节部分后, 还需将其恢复, 即要求由 $\{C_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$, $j=1, 2, \dots, J$ 来重构信号 $f(x)$ 。

由于 $V_{J-1} = V_J \oplus W_J$, 故有:

$$P_{J-1} f(x) = P_J f(x) + Q_J f(x) \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k^J \varphi_{Jk}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^J \psi_{Jk}(x) \quad (11)$$

其中 $P_{J-1} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^{J-1} \varphi_{J-1,n}(x)$, 故有:

$$C_n^{J-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k^J h(n - 2k) \\ + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^J g(n - 2k) \quad (12)$$

由 (12) 式迭代下去, 可以从 $\{C_k^J\}$ 和 $\{d_k^J\}$ 求出

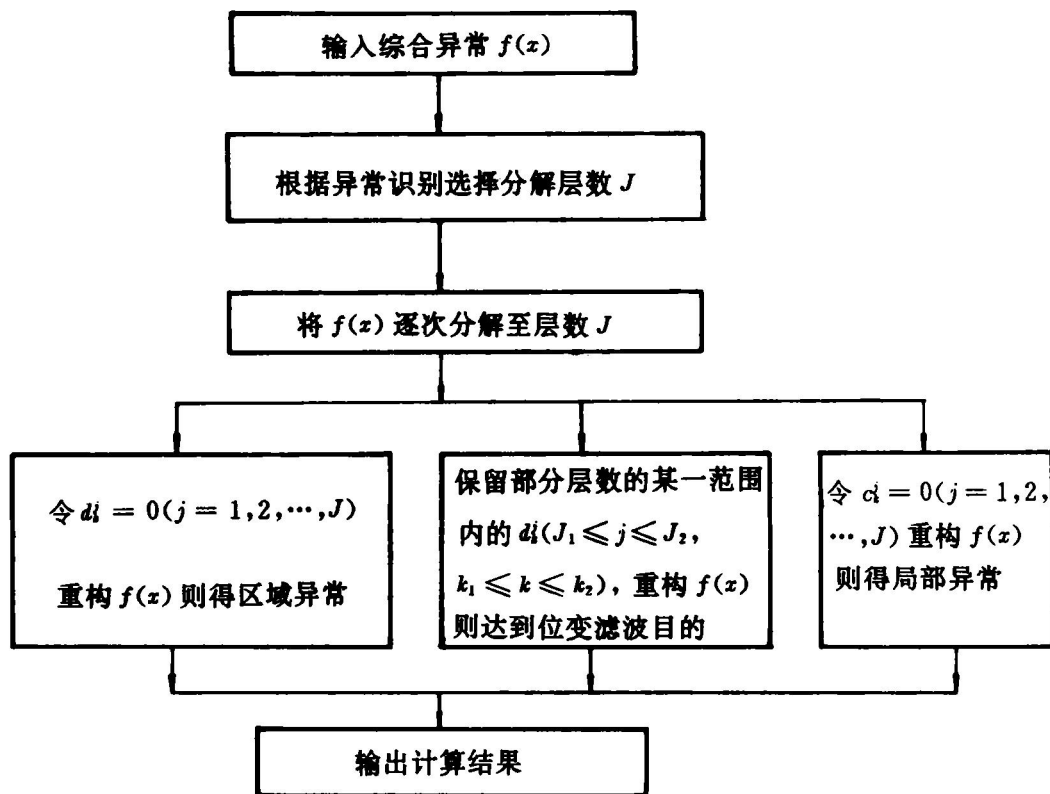


图6 分层次提取异常框图

C_i^0 , 从而由(6)式恢复 $f(x)$ 。

综合上述分解重构过程, 我们在图6给出信号分层次提取的框图。

4 应用实例分析

图7和图8是对同一信号的识别和分层次提取结果。图7中理论信号(图7a)是由其右侧图中3个标准正弦信号组成的准正弦波信号。图7b~7i分别对应于 $a=2^j$ 中 $j=1, 2, \dots, 8$ 的异常识别, 其纵轴表示最大模值 $|W_f(2^j, b)|$ 。通常而言, $j=1$ 或 2 的最大模反映了信号中的噪声部分或是最高频部分。而在图7b中, 极大值 $|W_f(2^j, b)|$ 恰好组成了正负相间、等值的26个极值点, 反映出原始信号的13次谐波成分。随着 j 的增加, 高频信号将被磨光, 低频信号将突出, 反映在极大模 $|W_f(2^j, b)|$ 上就是: 有些极大模值随 j 增加而下降(高频), 而另一些则

随 j 增加而增加。这在图7d中反映得很清楚。而到图7f时($j=5$), 极大模值只剩正向相间的3对, 它反映出分解到该层次($j=5$)后, 重构的细节信号将只有13次谐波成分, 而重构光滑信号中将包括有基波和3次谐波, 正由于它们的同时存在, 才使图7f中的各模值不相等。当 $j=7$ (图7h)时, 可见最大模只剩下正负等值的两个, 它突出了原始信号中的基频成分。当继续分解识别时, 比如 $j=8$ (图7i), 极大模值仍只有正负等值的两个, 但幅值相对图7h中则下降了, 这说明图7h和图7i反映的是同一信号, 只是图7i的信号被进一步磨平了, 用它恢复出的光滑信号将会失真。

图8是对该信号的分层次提取结果。为方便对比, 图中上绘出了原始信号(图8a)和分解重构的3个正弦波信号(图8a'); 图8b、图8d和图8f、图8h分别对应于 $J=1, 3, 5, 7$ 时的分解重构的光滑信号, 其右侧各图为相应层次

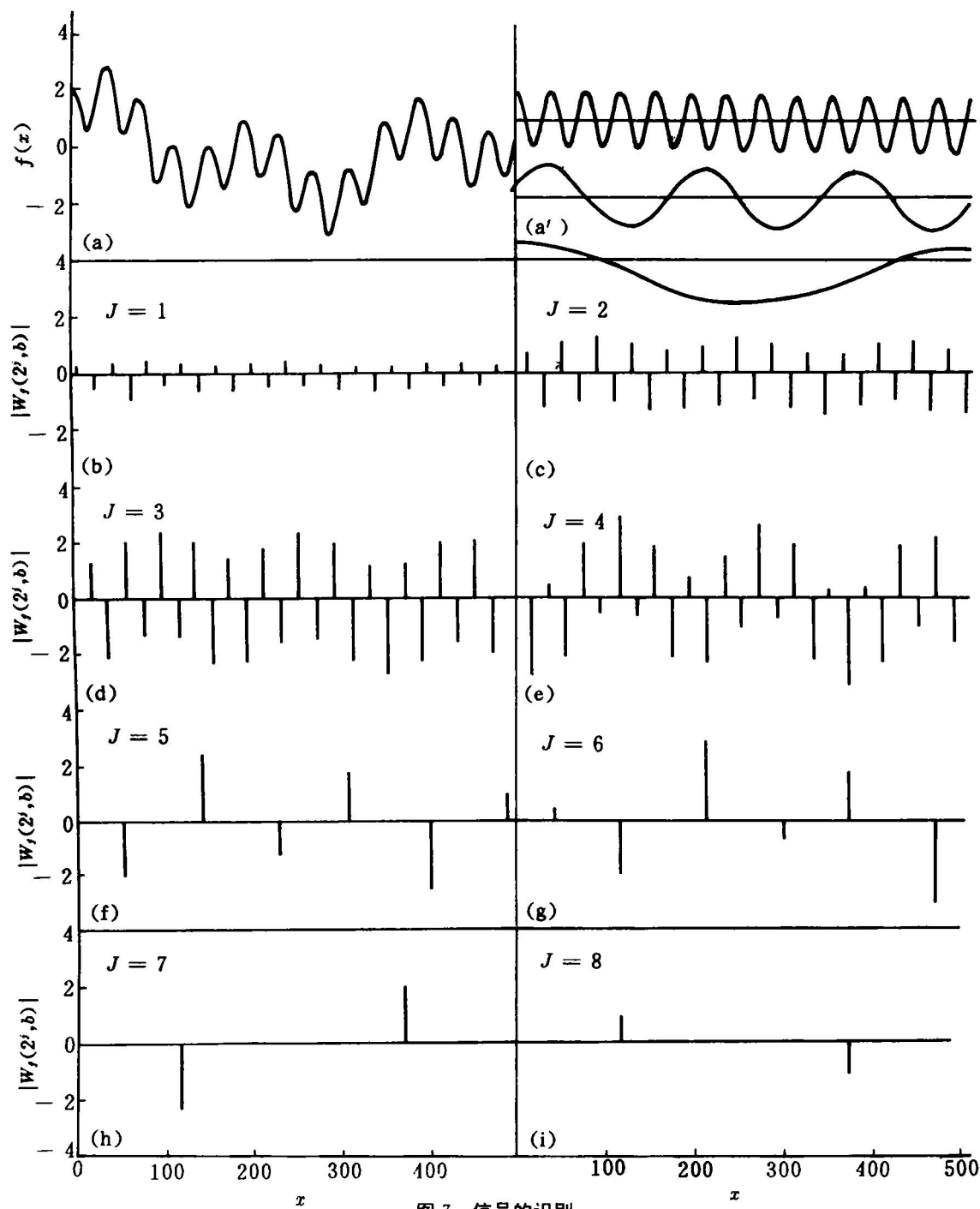


图7 信号的识别

(a) — 原始信号; (a') — 合成信号的谐波成分; (b) ~ (i) — 识别结果

上的重构细节信号。由图中可见, $J=1 \sim 3$ 的分解重构只能反映出信号中的噪声部分。当 $J=5$ 时, 正如图7中所预料的, 重构细节信号为13次谐波信号(图8g), 而重构光滑信号中

仍是基频和3次谐波的合成, 当 $J=7$ 时, 重构光滑信号中只有基频正弦波(图7h), 重构细节信号将由3次谐波和13次谐波构成(图7i)。如果继续对图7i作 $J=5$ 的分解, 重构的光滑

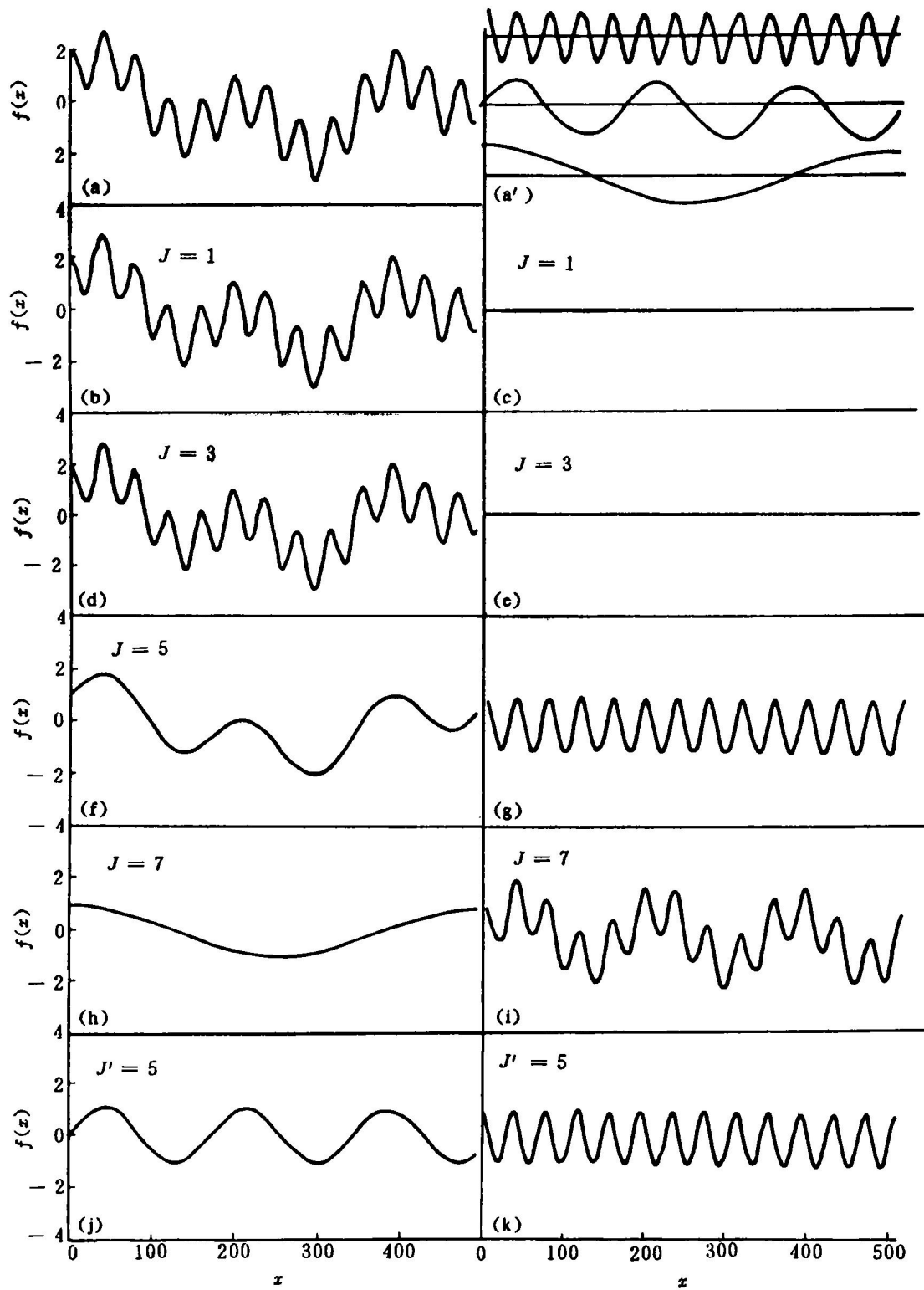


图8 信号的分层次提取

(a) — 原始信号; (a') — 提取的频率成分; (b) ~ (k) — 提取结果

信号便是原始信号的3次谐波。重构细节信号为13次谐波,这是可以预料的。之所以在图7i信号上作 $J=5$ 次分解,是因为 $J=5$ 的分辨率恰好可以分辨出13次谐波(参见图7f和图8g)。另外,如果分解时选 $J=8$,可以预计得到的光滑信号与基频正弦波在幅值、形态上都是有差别的(图略)。因此, $J=7$ 是对该基频信号的最佳分辨,而且对比图8a'的重构信号和图7a'的理论曲线可看出,它们在形态、幅值上是完全相同的。因此,对信号的分层次提取方法是可行的。

为考查位变重构效果,在对图8i的信号分解重构时,保留100~200点间细节信号,可得到图9所示的重构信号。对比图8i和图8g可见,图9中100~200点间重构信号和图8i中对应段相同,其余部分则和图8g的对应段相同,从而达到了保留100~200间细节的目的,因此对信号进行位变重构是可能的。位变重构在很多地方有实际用途,比如在滤波时,由于种种原因,人们可能需要突出某一段细节信号,而其它地方则需压制其细节即高频信号,这是通常的Fourier分析及其滤波方法无法完成的。而用位变重构方法则可简便地完成。

图10和图11分别为对重磁模型异常进行识别和分离的结果。理论模型为两个有限延伸、垂直磁化的直立棱柱体叠加而成(图11d),图10a中实线为综合异常,虚线分别表示浅部和深部棱柱体单独存在时的异常。图10b~图10e分别是 $J=1, 3, 5, 7$ 时的异常识别结果。 $J=1$ 时,反映了局部异常及其大致范围。当 $J=3$ 时,局部异常得到最佳识别($|W_J(2', b)|$ 最

大),同时它也开始识别出区域异常的存在。 $J=5$ 时,局部异常变得模糊了,区域异常得到清晰的反映,但此时的尺度下,区域异常和局部异常仍是叠加在一起的。当 $J=7$ 时,最大模只反映出区域性异常,而局部异常则被磨光了,即在 $a=2^7$ 尺度下,我们看到的将只有大棱柱体产生的异常。因此 $J=7$ 时可以将区域异常和局部异常分离开。

图11是对该异常的分离结果。其中图11a仍为原始信号。图11b为非位变重构结果,可见在局部异常的背景上仍有微小的波动,这是

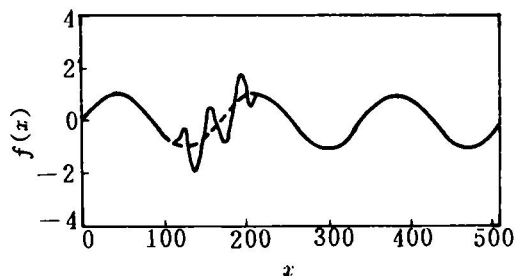


图9 位变重构结果

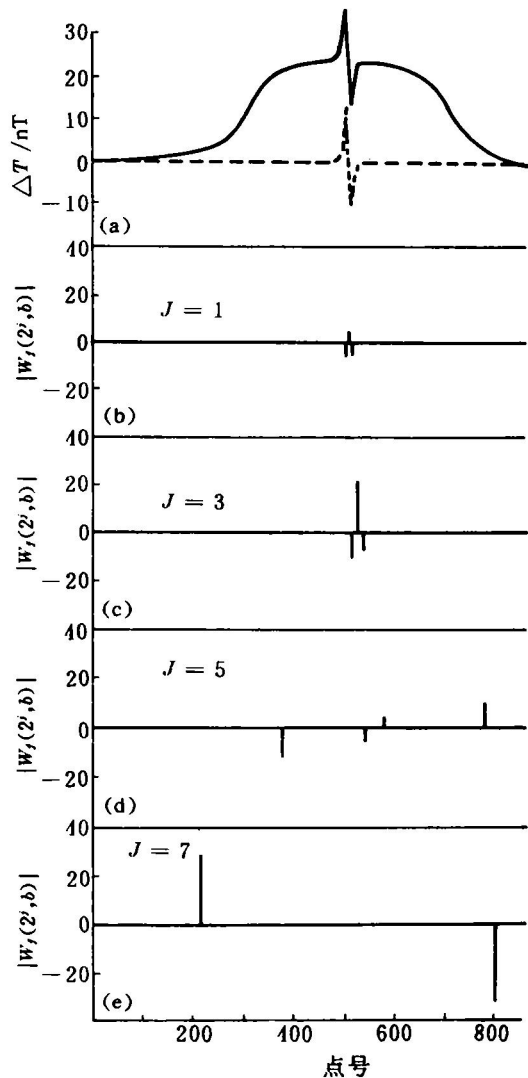


图10 重磁异常的识别

(a)—模型异常;(b)~(e)—识别结果

由于 $J=7$ 时对该异常的分离精度尚有不足所致。图 11c 是位变重构得到的区域异常和局部异常, 此时局部异常和区域异常得到了很好的分离。如果用 Fourier 分析对该异常作分离, 我们会得到类似图 11b 那样的分离结果。另外, 对于复杂的异常, 由于区域异常和局部异常的谱线常会部分重叠, Fourier 分析方法的异常分离效果会不尽如人意, 异常谱线重叠越多, 其分离也越困难, 且要求的先验信息也越多。而

采用小波变换, 由于可合理地确定分解层数 J , 并可依据异常识别结果进行位变重构, 因而可使复杂异常得到分层次的最佳分离结果。

图 12a 是某盆地上实例重力异常剖面。其纵轴单位为毫伽, 横轴单位为 km。图 12b~12d 分别是 $J=3, 4, 5$ 时异常识别结果。从中可以确定提取区域异常的最佳层次为 $J=4$ 。

图 13 给出了对该异常作分离的结果。图 13a、13c、13e 分别对应于 $J=3, 4, 5$ 时重构的区域异常, 右侧的则为相应的局部异常。对比可看出, $J=3$ 时, 图 13a 中的重构光滑信号中仍叠加有一定的局部异常。 $J=5$ 时, 区域异常形态变得很光滑, 其幅值也比 $J=4$ 时低。

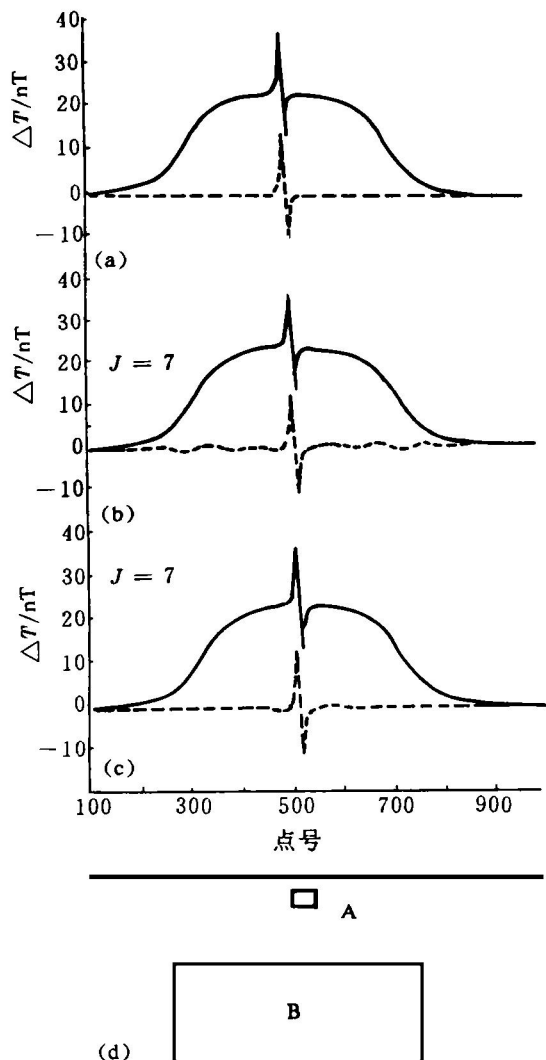


图 11 重磁异常的提取

(a)一理论模型异常;(b)一非位变提取结果;

(c)一位变提取结果;(d)一模型图

模型 A 水平尺寸 $20\text{ m} \times 20\text{ m}$, 顶深 10 m , 底深 20 m ;

模型 B 水平尺寸 $400\text{ m} \times 400\text{ m}$, 顶深 50 m , 底深 100 m

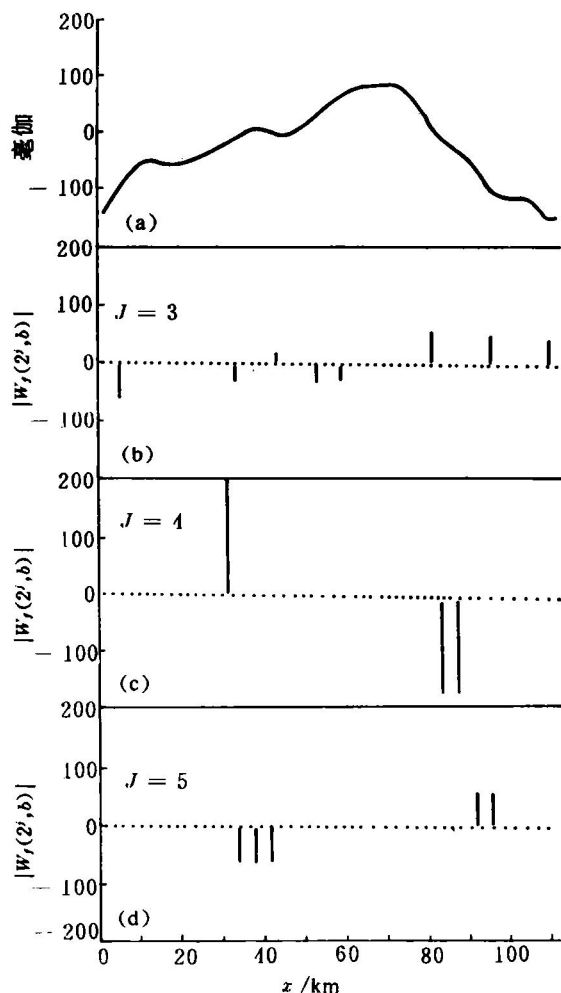


图 12 实例重力异常的识别

(a)一实测异常;(b)~(d)一识别结果

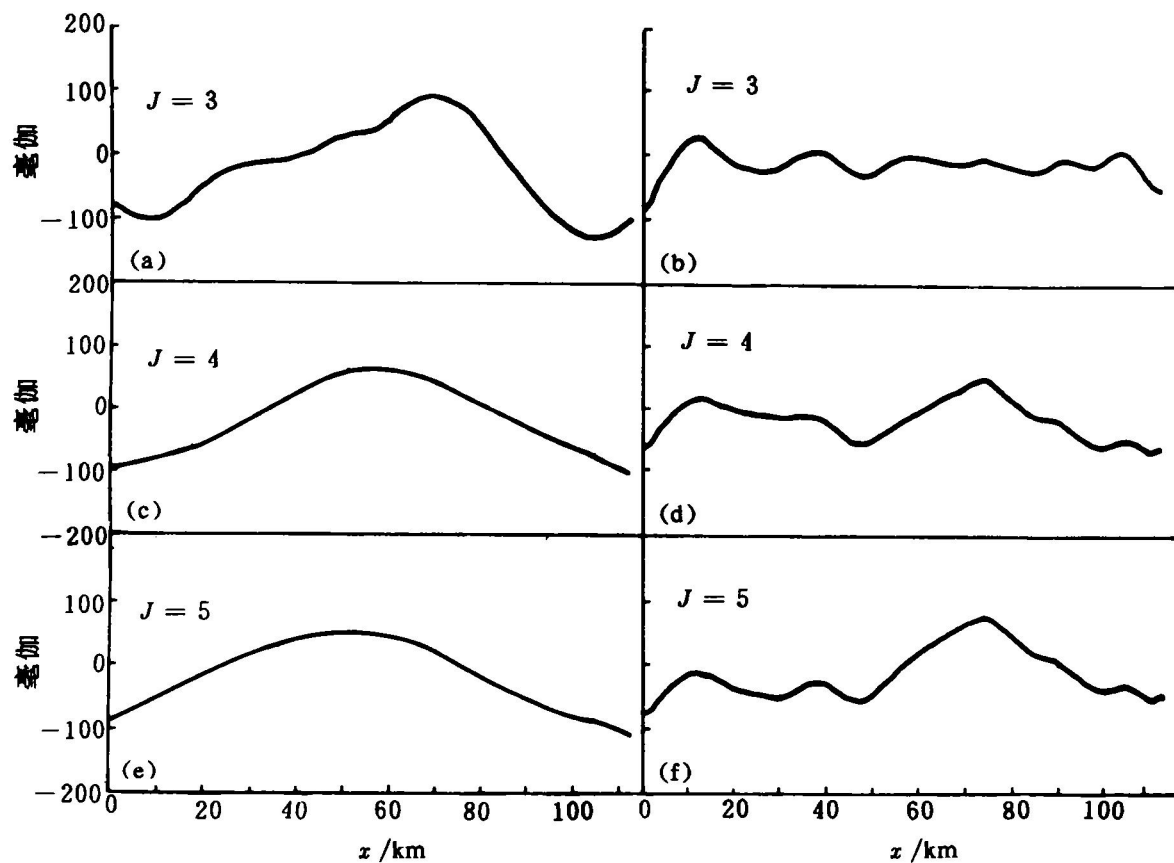


图 13 某盆地上实测重力剖面异常的分离

这是可以从图 12e 的识别结果中预料的,相对而言,图 13c 的区域异常是最佳的分离结果。限于篇幅,本文不讨论该重力剖面的地质解释,也不再分析其它实测信号的识别和分离结果。

5 结束语

本文给出了识别和分层次提取重磁区域异常和局部异常的方法。该方法不仅可用于重磁异常的识别和提取,也可用于信号、噪声分离和图像处理等方面。

在异常识别中,有一类值得注意的现象,即最大模幅值是与异常强度相关的(在同一量级上),而且它对局部异常而言是随 J 逐次衰

减的,而对区域异常而言,在某一 J 值内,它随 J 是逐次增加的。研究这一现象,我们可以估算三维地质体的奇性指标,并依此而反求其埋深,有关的研究我们将另文介绍。

小波分析是一门新兴的学科,它在地球物理数据处理中的应用还有很多值得研究的课题,如位变重构、小波包理论等等。有关的研究结果我们将逐步公开,以期起到抛砖引玉的作用。

参考文献

- 1 Mallat S. Transactions of the American Mathematical Society, 1989, 315(1): 68~87.
- 2 Daubechies I. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1988, Vol. XL1, 909~996.