

# 烧结材料轴对称变形滑移线法<sup>①</sup>

赵仲治 华 林

(武汉工学院机械工程二系, 武汉 430070)

## 摘 要

根据简化的烧结材料屈服条件和 Haar-von Karman 完全塑性准则, 提出了烧结材料轴对称变形的滑移线法, 导出了滑移线方程和应力特征方程, 并给出了特征方程的数值解。应用文中的滑移线方法分析了烧结铜圆柱体闭式镦粗变形, 并与实验结果进行了比较。

**关键词:** 烧结材料 轴对称变形 滑移线法

塑性加工是生产高性能烧结材料制品的重要工艺方法。烧结材料塑性变形中不仅表现出形状变化, 还表现出较大的体积变化亦即致密, 因而建立在体积不变条件基础上的经典塑性理论对烧结材料是不适用的。为了从理论上指导烧结材料塑性加工工艺, 七十年代以来开展了烧结材料塑性理论的研究, 在屈服条件和平面变形等问题上取得了重要进展<sup>[1-4]</sup>。烧结材料塑性加工中, 例如回转体零件挤压、模锻等属于轴对称塑性变形, 所以烧结材料轴对称问题也是重要的研究课题。在致密材料和散体材料轴对称问题中, 滑移线理论的应用取得了重要成果<sup>[5,6]</sup>。烧结材料是介于致密材料和散体材料之间的一种材料, 分别具有这两类材料的变形特性。为此, 本文对烧结材料轴对称变形的滑移线方法进行了研究, 并应用滑移线方法分析烧结材料轴对称变形。

## 1 屈服条件简化

烧结材料屈服条件为<sup>[1,2,7]</sup>

$$3J_2 + (\alpha\sigma_m)^2 = Y^2 \quad (1)$$

式中  $J_2$ —应力偏量第二不变量;  $\sigma_m$ —静水压力;  $\alpha$ —静水压力对屈服的影响系数, 为烧

结材料相对密度  $\rho$  的(实际密度/全致密密度)函数<sup>[2]</sup>,  $\alpha = 3 \sqrt{(1-\rho^2)/(2+\rho^2)}$ ;  $Y$ —烧结材料等效屈服强度

在主应力空间( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )中, 屈服条件式(1)的几何图形为一椭球面, 满足式(1)的应力状态的应力平衡微分方程, 其特征线方程并不总为两组实根。

为了数学处理的方便, 以椭球面内接六棱锥面近似表示烧结材料屈服面<sup>[3]</sup>, 得到简化的烧结材料屈服条件为<sup>[3,4]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} - \sigma_{\min} - (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin\theta &= \\ Y \cos\theta, \sigma_m &\leq 0 \\ \sigma_{\max} - \sigma_{\min} + (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin\theta &= \\ Y \cos\theta, \sigma_m &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ —分别为代数值最大主应力和最小主应力;

$\theta$ —静水压力对屈服影响系数  $\alpha$  的函数, 且  $\theta = \text{tg}^{-1}(\alpha/2)$

屈服条件式(1)和简化屈服条件式(2)的几何图形如图1所示。当烧结材料相对密度  $\rho = 1$ , 亦即成为致密材料时,  $\alpha = 0, \theta = 0$ , 式(1)和式(2)分别变为致密材料的 Mises 和 Tresca 屈服条件, 这表明致密材料屈服条件仅是烧结材料的一个特例。

① 收稿日期: 1992年11月12日



$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma' (1 + \sin\theta \cos 2\omega) - H \\ \sigma_z &= \sigma' (1 - \sin\theta \cos 2\omega) - H \\ \tau_{rz} &= \sigma' \sin\theta \cos 2\omega \\ \sigma_\varphi &= \sigma_1 = \sigma' (1 + \sin\theta) - H \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $\omega$  为  $r$  轴线到最大主应力  $\sigma_1$  轴线的转角, 规定逆时针为正

忽略体积力, 轴对称条件下的应力平衡微分方程为<sup>[8]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(5)代入平衡方程式(6)整理得

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin\theta \cos 2\omega) \frac{\partial \sigma'}{\partial r} + \sin\theta \sin 2\omega \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \\ - 2\sigma' \sin\theta \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial r} + 2\sigma' \sin\theta \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ = - \frac{\sigma' \sin\theta (-1 + \cos 2\omega)}{r} \\ \sin\theta \sin 2\omega \frac{\partial \sigma'}{\partial r} + (1 - \sin\theta \cos 2\omega) \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \\ + 2\sigma' \sin\theta \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial r} + 2\sigma' \sin\theta \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ = - \frac{\sigma' \sin\theta \sin 2\omega}{r} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据特征线理论, 求得此偏微分方程组的特征方程为

$$\left. \begin{aligned} dz &= \operatorname{tg}(\omega - \omega_0) dr \\ d\left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \ln \frac{\sigma + \frac{1}{2} Y \operatorname{ctg}\theta}{\sigma_0} - \omega\right) \\ &= \frac{\sin(\omega - \omega_0) + \sin(\omega + \omega_0)}{2r \cos(\omega - \omega_0)} dr \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} dz &= \operatorname{tg}(\omega + \omega_0) dr \\ d\left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \ln \frac{\sigma + \frac{1}{2} Y \operatorname{ctg}\theta}{\sigma_0} + \omega\right) \\ &= - \frac{\sin(\omega - \omega_0) + \sin(\omega + \omega_0)}{2r \cos(\omega + \omega_0)} dr \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

式中  $\omega_0 = \pi/4 - \theta/2$ ,  $\sigma_0$  为任意应力常数

参看图 3, 根据滑移线定义, 可得出滑移线的微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \alpha \text{ 线: } dz &= \operatorname{tg}(\omega - \omega_0) dr \\ \beta \text{ 线: } dz &= \operatorname{tg}(\omega + \omega_0) dr \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

比较滑移线方程和式(8a)、(8b)第一式所表示的特征线方程, 可知滑移线与特征线重合。只要确定了特征线场亦即滑移线场, 就可以通过特征方程求出变形区的应力分布。

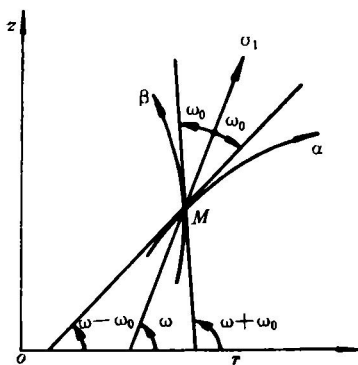


图 3 滑移线与最大主应力位置关系

$$(2) \sigma_\varphi = \sigma_2 = \sigma_3$$

此种情况环向正应力为最小主应力。根据上述的推导方法得出滑移线方程和应力特征方程如下:

$$\left. \begin{aligned} dz &= \operatorname{tg}(\omega - \omega_0) dr \\ d\left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \ln \frac{\sigma + \frac{1}{2} Y \operatorname{ctg}\theta}{\sigma_0} - \omega\right) \\ &= \frac{\sin(\omega - \omega_0) - \sin(\omega + \omega_0)}{2r \cos(\omega - \omega_0)} dr \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} dz &= \operatorname{tg}(\omega + \omega_0) dr \\ d\left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \ln \frac{\sigma + \frac{1}{2} Y \operatorname{ctg}\theta}{\sigma_0} + \omega\right) \\ &= \frac{\sin(\omega - \omega_0) - \sin(\omega + \omega_0)}{2r \cos(\omega + \omega_0)} dr \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

#### 4 特征方程的数值解

特征方程式(8)、(10)一般难于获得解析解, 通常要寻求其数值解。在此类方程数值解法中, 差分法是一种有效的方法。差分法的关键是给出合理的差分格式, 以用于数值计算。参看图 4,  $i, j$  分别代表  $\alpha, \beta$  滑移线的编号。以

差分代替微分分别代入式(8)、(10)求解得

$$(1) \sigma_{\varphi} = \sigma_2 = \sigma_1$$

$$\left. \begin{aligned} r[i, j] &= (r[i, j-1] \lg(\omega[i, j-1] - \omega_0) - r[i-1, j]) \\ &\times \lg(\omega[i-1, j] + \omega_0) - z[i, j-1] + z[i-1, j]) \\ &\div \lg(\omega[i, j-1] - \omega_0) - \lg(\omega[i-1, j] + \omega_0) \\ z[i, j] &= z[i, j-1] + (r[i, j] \\ &- r[i, j-1]) \lg(\omega[i, j-1] - \omega_0) \\ \omega[i, j] &= \frac{1}{2} (F_2 - F_1 + \omega[i, j-1] + \omega[i-1, j]) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\frac{Y}{2} \operatorname{ctg} \theta + \sigma[i-1, j]}{\frac{Y}{2} \operatorname{ctg} \theta + \sigma[i, j-1]} \\ \sigma[i, j] &= (\sigma[i, j-1] + \frac{Y}{2} \operatorname{ctg} \theta \exp\{2 \operatorname{tg} \theta \\ &\times (F_1 + \omega[i, j] - \omega[i, j-1])\} - \frac{Y}{2} \operatorname{ctg} \theta) \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{\sin(\omega[i, j-1] + \omega_0) + \sin(\omega[i, j-1] - \omega_0)}{2r[i, j-1] \cos(\omega[i, j-1] - \omega_0)} \\ &\times (r[i, j] - r[i, j-1]) \\ F_2 &= -\frac{\sin(\omega[i-1, j] + \omega_0) + \sin(\omega[i-1, j] - \omega_0)}{2r[i-1, j] \cos(\omega[i-1, j] + \omega_0)} \\ &\times (r[i, j] - r[i-1, j]) \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

$$(2) \sigma_{\varphi} = \sigma_2 = \sigma_3$$

此种情况的差分格式与式(11a)相同,只是式(11a)中的  $F_1$  和  $F_2$  应分别改为  $F_1'$  和  $F_2'$ 。

$F_1'$  和  $F_2'$  的数学表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} F_1' &= \frac{\sin(\omega[i, j-1] - \omega_0) - \sin(\omega[i, j-1] + \omega_0)}{2r[i, j-1] \cos(\omega[i, j-1] - \omega_0)} \\ &\times (r[i, j] - r[i, j-1]) \\ F_2' &= \frac{\sin(\omega[i-1, j] - \omega_0) - \sin(\omega[i-1, j] + \omega_0)}{2r[i-1, j] \cos(\omega[i-1, j] + \omega_0)} \\ &\times (r[i, j] - r[i-1, j]) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

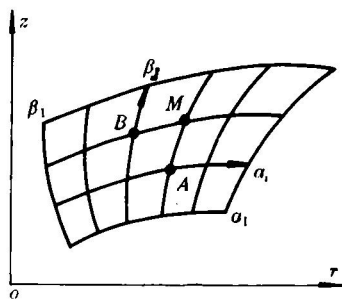


图4 一般滑移线场

为了提高差分格式的迭代精度,可在前一次迭代结果的基础上进行修正,再返回迭代。如此返回迭代2至3次可使精度提高。修正方法如下:

$$\left. \begin{aligned} S[i, j-1] &= (S[i, j] + S[i, j-1])/2 \\ S[i-1, j] &= (S[i, j] + S[i-1, j])/2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)中  $S$  分别换名为  $r, z, \omega, \sigma$ 。

## 5 烧结铜圆柱体闭式微粗滑移线解

### 5.1 理论计算

闭式微粗简图如图5所示,在这种变形条件下有  $\sigma_{\varphi} = \sigma_2 = \sigma_1^{[5]}$ 。根据对称性,仅分析工件左上角部分。

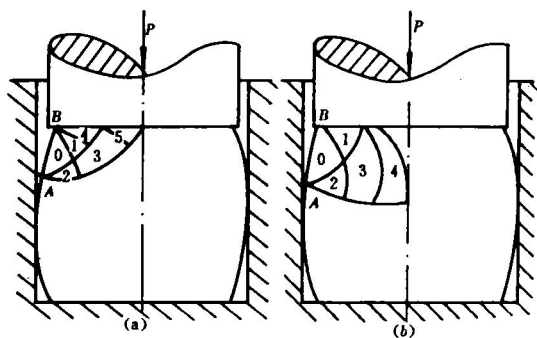


图5 闭式微粗简图和滑移线场模式

(a)一无摩擦; (b)一最大摩擦

设冲头与工件接触面边界条件分别为无摩擦和最大摩擦,与之对应的滑移线场模式分别为图5(a)和图5(b)所示。图中滑移线场模式的各个区域分别代表了各类边值问题:图5(a)中0区为柯西边值问题;1区、2区、3区为黎曼边值问题;4区和5区为混合边值问题。图5(b)中0区为柯西边值问题;1区、2区、3区为黎曼边值问题;4区为混合边值问题。根据各类边值问题的特点编制相应的滑移线场计算程序,从自由边界  $AB$  开始可得出整个滑移线场的应力分布,进而可得出冲头的平均压力。理论计算中需要用到烧结材料等效屈服强度  $Y$ ,其值根据烧结材料圆柱体试样单向压缩确定。单向压缩中  $\sigma_r = \sigma_{\varphi} = \sigma_1 = 0, \sigma_z = \sigma_3 = -\sigma_s$ ,将其代入式(4)整理得:

$$Y = (\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4}} + \frac{\alpha}{2}) \sigma_s \quad (14)$$

式中  $\sigma_s$ —烧结材料单向压缩屈服应力

对于烧结铜，其单向压缩屈服应力  $\sigma_s$  按下式计算<sup>[7]</sup>：

$$\sigma_s = A \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{1 - \rho_0^2}{1 - \rho^2}} \right)^n$$
$$A = -196.81 + 656.69 \rho_0 \text{ (MPa)}$$
$$n = 0.9301 - 0.6171 \rho_0$$

(15)

式中  $\rho_0$ —烧结材料初始相对密度

理论计算的滑移线场和冲头端面的压力分布分别如图 6 和图 7 所示。

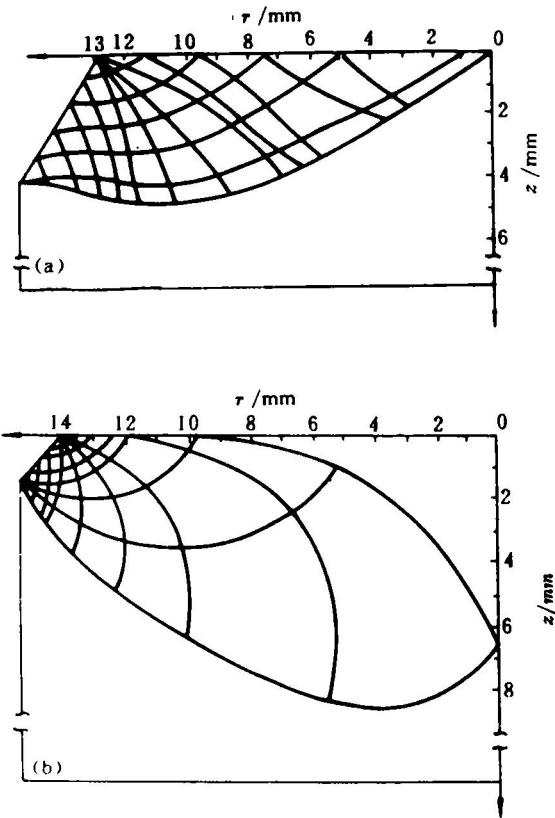


图 6 闭式镦粗滑移线场  
(a)—无摩擦；(b)—最大摩擦

5.2 实验验证

用烧结铜圆柱体试样进行闭式镦粗实验：试样材料为电解紫铜粉 ( $\text{Cu} \geq 99.8\%$ )，经压制、烧结制成圆柱体试样；烧结气氛为分解氨；烧结温度为  $920 \pm 10^\circ\text{C}$ ；烧结时间为 2 h；试验设备为 WI-60 材料试验机。为了模拟无摩擦边界条件，试样端面和冲头端面都经过抛

光，并涂以硬脂酸锌润滑剂。为了模拟最大摩擦条件，冲头端面加工成粗糙面，并涂以松香粉增加摩擦。

试样原始数据如表 1 所示。闭式镦粗实验测得的冲头平均压力和滑移线理论计算的冲头平均压力如表 2 所示。

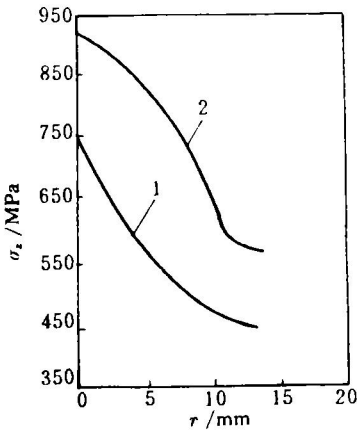


图 7 冲头端面压力分布  
1—无摩擦；2—最大摩擦

表 1 试样原始数据

| 试样号 | 重量/g  | 直径/mm | 高度/mm | 原始相对密度 |
|-----|-------|-------|-------|--------|
| 1   | 161.6 | 26.64 | 37.72 | 0.8508 |
| 2   | 209.4 | 29.23 | 40.84 | 0.8587 |

表 2 闭式镦粗冲头平均压力  
理论值与实验值

| 试样号 | 边界条件 | 镦粗后<br>相对密度 | $\sigma_1$ /MPa | $\sigma_e$ /MPa | $\frac{\sigma_1 - \sigma_e}{\sigma_e} \%$ |
|-----|------|-------------|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|
| 1   | 无摩擦  | 0.9762      | 511             | 642             | -20.4                                     |
| 2   | 最大摩擦 | 0.9734      | 718             | 693             | 3.6                                       |

注： $\sigma_1$ 、 $\sigma_e$  分别为冲头平均压力理论值和实验值

由表 2 可知，无摩擦边界条件下冲头平均压力的理论值比实验值小约 20%，最大摩擦边界条件下的冲头平均压力的理论值比实验值大约 4%，这个精度对于工程计算是许可的。由于实验条件下不可能完全消除冲头与试样接触面的摩擦，所以无摩擦边界条件下的实验值比理论值高出较多。最大摩擦边界条件下的理论

值与实验值相差较小,说明实验中模拟的最大摩擦条件比较接近于真实情况。

## 参考文献

## 6 结论

(1) 提出了烧结材料轴对称变形的滑移线方法,导出了滑移线方程和应力特征方程式(8)、(10),并给出了它们数值解的差分格式式(11a)。

(2) 应用轴对称变形的滑移线方法分析了烧结铜圆柱体闭式镦粗压力,理论值与实验值基本符合。

(3) 本文提出的方法可以用于分析一般可压缩材料的轴对称变形。

- 1 Doraivelu S M, Gegel H L, *et al.* Int J Mech Sci, 1984, 26(9/10): 527—535.
- 2 华 林, 赵仲治. 机械工程学报, 1992, 28(4): 94—102.
- 3 大矢根守哉, 田端强. 塑性与加工, 1974, 15(156): 43—51.
- 4 赵仲治, 华 林. 金属成形工艺, 1985, (4): 10—19.
- 5 Shield R T. Proc Roy Soc, 1955, A233: 267—287.
- 6 Березанцев, В Г. Расчет оснований сооружений. Изд. Литер. По Строит. 1970.
- 7 华 林, 赵仲治. 中国有色金属学报, 1992, 2(3): 81—84.
- 8 王 仁, 熊祝华, 黄文彬. 塑性力学基础. 北京: 科学出版社, 1982. 357.