

具有平面型破坏面岩石边坡的随机 —模糊可靠度计算^①

李胡生

(同济大学, 上海 200092)

陈道清

(南方冶金学院采矿系, 赣州 341000)

丁向阳

(中南工业大学资开系, 长沙 410083)

摘 要

给出了具有平面型破坏面的边坡工程极限平衡分析中计算其随机-模糊可靠度的方法。这种方法将模糊数学的原理与可靠性理论结合起来, 导出了以模(糊事件)-精(确概率)指标表达的边坡工程随机-模糊可靠度公式, 同时既考虑了岩石边坡工程的客观本质, 又满足了稳定性定量评价的要求, 且具有确定的数学表达形式, 便于应用。

关键词: 岩石力学 边坡工程 可靠性理论 模糊可靠度

实际工程中, 有些岩坡的稳定主要受大型软弱结构面的控制, 这种情况下, 岩坡具有平面型破坏面, 于是衡量边坡的可靠性即成为计算这个平面型软弱结构面的可靠度。从滑床的整体极限平衡的角度看, 滑床可以看作为一个单元, 这时, 单元的可靠度即是边坡的可靠度。因此, 可采用计算单元可靠度的方法来计算滑床的可靠度。

岩土工程可靠性研究在八十年代后期形成热点^[1,2], 深入的研究表明, 岩体力学特性同时包含着随机性和模糊性, 而且其模糊性是一种比其随机性更深刻、更普遍的不确定性^[3]。随机性和模糊性相互渗透的影响, 使岩石边坡工程系统的状态、输入和输出都具有随机-模糊性, 用随机可靠性观念和方法不能客观地反映这种系统的可靠性, 将随机-模糊变量人为地用随机变量代替必然引起计算结果的人为歪曲, 而随机-模糊可靠度理论则避免了这一点。

作者在文献^[4]系统论述了岩石工程随机-模糊可靠度的概念和方法。本文从极限平衡的角度就具有平面型潜滑面边坡的随机-模糊可靠度计算作了详细论述。

1 岩石力学变量随机—模糊数字特征的确定

1.1 随机—模糊均值、方差

若试验获得的某岩石力学变量(如岩石力学参数)容量为 n 的样本值为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 记它们的平均值为 $\bar{x}$ 、方差为 σ^2 , 则样本值的随机-模糊均值为^[2]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \exp[-2(x_i - \bar{x})^2 / (d_{1\max} - d_{1\min})] \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \exp[-2(x_i - \bar{x})^2 / (d_{1\max} - d_{1\min})]} \quad (1)$$

而样本值的随机-模糊方差为

^① 属国家博士后基金资助课题; 于 1992 年 5 月 23 日收到初稿

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n \exp\{-2[(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2 / (d_{2\max} - d_{2\min})\} \cdot (x_i - \bar{x})^2 \div \sum_{i=1}^n \exp[-2(x_i - \bar{x})^2 / (d_{2\max} - d_{2\min})] \quad (2)$$

其中 $d_{1\max}$ 、 $d_{1\min}$ 和 $d_{2\max}$ 、 $d_{2\min}$ 分别是 $(x_i - \bar{x})^2$ 中和 $[(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2$ ($i=1, 2, \dots, n$) 中的最大、最小值。

1.2 随机-模糊协方差

设 x, y 的样本值分别为 x_i, y_i ($i=1, 2, \dots, n$), 它们之间的随机-模糊协方差为 m_{xy} , 则随机-模糊协方差为

$$m_{xy} = \sum_{i=1}^n \exp\{-2[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m_{xy}]^2 / (d_{3\max} - d_{3\min})\} \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \div \sum_{i=1}^n \exp\{-2[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m_{xy}]^2 / (d_{3\max} - d_{3\min})\} \quad (3)$$

这里 $d_{3\max}$ 、 $d_{3\min}$ 是 $[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m_{xy}]^2$ ($i=1, 2, \dots, n$) 中的最大、最小值。

显然, (1)~(3)式均为隐函数式, 实际计算中采用迭代法求解, 详见文献^[3]。

2 岩石力学变量随机-模糊概型的确定

岩石力学变量的概率分布问题, 可以通过求解如下的线性约束规划问题而获得:

$$\text{目标函数} \quad H = - \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i = \max \quad (4)$$

$$\text{约束条件} \quad \sum_{i=1}^n P_i \mu_i = \alpha \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i = \bar{x} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (7)$$

$$P_i > 0 \quad (8)$$

$$P(x_j) \leq P(x_i) \quad \text{当} \quad \mu_A(x_j) \leq \mu_A(x_i) \quad (9)$$

式中 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为变量 x 的样本值; $\bar{x}$ 为样本值的随机-模糊均值; P_i 为 x 取值 x_i 的概率; $\mu_i = \mu_A(x_i)$ 为隶属度; α 为一待定常数。

有关这个线性约束规划的建立和解法详见

文献^[5]。

3 荷载响应及其允许值的确定

如图1所示为具有平面滑动模式的岩石边坡, 滑体为 $ABCD$, 滑床为 AB , 滑床上的阻力力和剪力分别为

$$\tau_s = [(H^2 - Z^2) \cdot \text{ctg} \psi_f - H^2 \text{ctg} \psi_f] / (2 \sin \psi_p \cdot \underline{\gamma}) \quad (10)$$

$$\tau_R = \underline{C} \cdot (H - Z) / \sin \psi_p + [(H^2 - Z^2) \text{ctg} \psi_f - H^2 \text{ctg} \psi_f] / 2 \cos \psi_p \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{f} \quad (11)$$

这里 $\underline{C}$ 、 $\underline{f}$ 、 $\underline{\tau}$ 分别为岩体的内聚力、内摩擦系数和容重。(10)式即是单元的响应, (11)式为相应的允许值。记 τ_R 为 $\underline{R}$ 、记 τ_s 为 $\underline{S}$, 并取

$$K_1 = (H - Z) / \sin \psi_p \quad (12)$$

$$K_2 = [(H^2 - Z^2) \text{ctg} \psi_p - H^2 \text{ctg} \psi_f] / 2 \quad (13)$$

$$K_3 = \cos \psi_p \quad (14)$$

$$K_4 = \sin \psi_p \quad (15)$$

则(10)、(11)式可写成

$$\underline{R} = K_1 \underline{C} + K_2 K_3 \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{f} \quad (16)$$

$$\underline{S} = K_2 K_4 \cdot \underline{\tau} \quad (17)$$

安全裕度的定义为

$$\underline{Z} = \underline{R} - \underline{S} \quad (18)$$

显然 $\underline{Z}$ 也是随机-模糊变量。

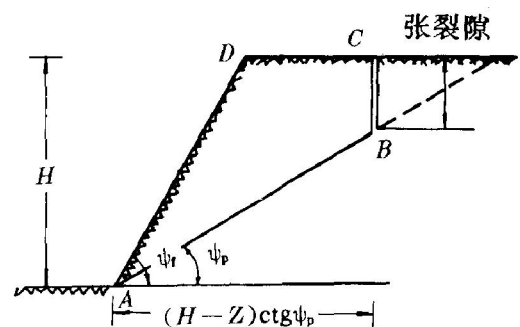


图1 边坡剖面

4 安全裕度概率密度函数的确定

在实际工作中, $\underline{R}$ 和 $\underline{S}$ 的概型不会是单一的, 但为了在保证一定精度的前提下使计算工作方便, 通常将它们进行当量正态化处理。因

此, 在这里假定 $\underline{R}$ 和 $\underline{S}$ 均具有正态分布, 这样安全裕度 $\underline{Z}$ 也是属正态分布。由(16)、(17)式得:

$$m_R = K_1 m_c + K_2 K_3 (m_r \cdot m_f + \sigma_{rf}) \quad (19)$$

$$m_S = K_2 K_4 \cdot m_r \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 = & K^2 \sigma_c^2 + 2K_1 K_2 K_3 m_r \cdot \sigma_{cf} \\ & + 2K_1 K_2 K_3 \cdot m_f \cdot \sigma_{cr} + 2K_2^2 K_3^2 \sigma_{rf} \\ & + K_2^2 K_3^2 m_r^2 \cdot \sigma_f^2 + K_2^2 K_3^2 m_f^2 \cdot \sigma_r^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\sigma_S^2 = K_2^2 K_4^2 \sigma_r^2 \quad (22)$$

这里 m_r 是随机-模糊变量 $\underline{x}$ 的随机-模糊期望 (在第二节用 $\bar{x}$ 表示); σ_r^2 是随机-模糊变量 $\underline{x}$ 的随机-模糊方差; σ_{xy} (在第二节用 m_{xy} 表示) 是随机-模糊变量 $\underline{x}$ 、 $\underline{y}$ 之间的随机-模糊协方差。

依据(19)~(20)式并顾及到 $\underline{c}$ 与 $\underline{r}$ 、 $\underline{f}$ 与 $\underline{r}$ 之间相互独立, 可求得安全裕度的期望和方差为

$$m_Z = K_1 m_c + K_2 K_3 m_r \cdot m_f - K_2 K_4 \cdot m_r \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 = & K_1^2 \sigma_c^2 + 2K_1 K_2 K_3 m_r \cdot \sigma_{cf} \\ & + K_2^2 K_3^2 m_r^2 \cdot \sigma_f^2 \\ & + K_2^2 K_3^2 m_f^2 \cdot \sigma_r^2 + K_2^2 K_4^2 \sigma_r^2 \end{aligned} \quad (24)$$

于是安全裕度 $\underline{Z}$ 的概率密度函数可写成

$$P(Z) = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right] \quad (25)$$

5 安全裕度隶属函数的确定

设 $\underline{Z} > 0$ 这一模糊事件的论域为 $\underline{A}$, 直接取安全裕度 $\underline{Z}$ 对 $\underline{A}$ 的隶属度为

$$\mu_{\underline{A}}(\underline{Z}) = \begin{cases} 1 & \underline{Z} \geq 3\sigma_Z \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi \underline{Z}}{6\sigma_Z} & -3\sigma_Z \leq \underline{Z} \leq 3\sigma_Z \\ 0 & \underline{Z} < -3\sigma_Z \end{cases} \quad (26)$$

选取上式是基于下面的考虑:

(1) 由该式可知, 当 $\underline{Z} = 3\sigma_Z$ 时, $\mu_{\underline{A}}(\underline{Z}) = 1$; 而当 $\underline{Z} = -3\sigma_Z$ 时, $\mu_{\underline{A}}(\underline{Z}) = 0$; 当 $\underline{Z} = 0$ 时, 则有 $\mu_{\underline{A}}(\underline{Z}) = 0.5$ 。这样就把模糊区间限于正、负三倍中误差以内, 且 $\underline{Z} = 0$ 以 0.5 的隶属度成为模糊区间的中点。

(2) 由(16)、(1)式可知, $\underline{R}$ 、 $\underline{S}$ 均为随机-模糊变量, 按照第二节的观点, 它们的隶属函数

应取为降半正态分布。由模糊数的运算法则可知, 安全裕度的隶属度 $\mu_{\underline{A}}(\underline{Z})$ 取 $\mu_{\underline{R}}(\underline{R})$ 和 $\mu_{\underline{S}}(\underline{S})$ 中较小者, 也会是降半正态分布或分段降半正态分布。但是, 降半正态分布有这样的特点: 当 $\underline{Z}$ 趋于负无穷时, $\mu_{\underline{A}}(\underline{Z})$ 趋于零, 这就意味着当响应比抗力极大的情况下滑体仍有不滑的可能 (只是可能性极小)。这显然与实际不符, 所以降半正态分布的隶属函数用于可靠度计算时其尾部必须修正。选择如(26)式的隶属函数既能截去降半正态分布的尾部, 也能较好地与降半正态分布吻合。

6 边坡随机-模糊可靠度的计算及算例

由岩石工程随机-模糊可靠度的概念和方法^[1]可知, 这里边坡的随机-模糊可靠度为

$$P_{\underline{Z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\underline{A}}(\underline{Z}) \cdot P(\underline{Z}) d\underline{Z} \quad (27)$$

将(26)、(25)式代入(27)式得

$$\begin{aligned} P_{\underline{Z}} = & \int_{-3\sigma_Z}^{3\sigma_Z} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi \underline{Z}}{6\sigma_Z} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \\ & \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{Z} - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right] d\underline{Z} \\ & + \int_{3\sigma_Z}^{\infty} \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \cdot \\ & \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{Z} - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right] d\underline{Z} \end{aligned} \quad (28)$$

整个随机-模糊可靠度的计算过程可按如下步骤进行:

(1) 由所获得的随机-模糊样本值, 按第二节的方法计算随机-模糊变量 $\underline{C}$ 、 $\underline{f}$ 、 $\underline{r}$ 的均值、方差、协方差: m_c 、 m_f 、 m_r 、 σ_c^2 、 σ_f^2 、 σ_r^2 和 σ_{cf} ;

(2) 依第三节的方法确定有关变量的概率分布和概型并进行正态当量化;

(3) 依(23)、(24)式计算安全裕度的均值、方差: m_Z 和 σ_Z^2 , 从而依(25)式确定安全裕度 $\underline{Z}$ 的概率密度函数;

(4) 依(26)式确定隶属函数;

(5) 按(28)式计算边坡的随机-模糊可靠度。

为了验证本文所述方法的可行性,笔者用其计算了一个由花岗闪长斑岩为主的岩石边坡,如图1所示。 $\overline{AB}$ 为中风化、强风化花岗闪长斑岩相间的软弱结构面,潜滑体以花岗闪长斑岩和大理岩为主组成,且 $m_c = 7(\text{T/m}^2)$, $m_f = 0.554$, $m_r = 2.77(\text{T/m}^3)$ (滑体); $\sigma_c^2 = 0.38$, $\sigma_f^2 = 0.0217$, $\sigma_r^2 = 0.017$, $\text{cov}(c, f) = -0.0239$; $H = 120\text{m}$, $Z = 40\text{m}$, $\phi_f = 60^\circ$, $\phi_p = 35^\circ$ 。利用本文给出的算式编辑 FORTRAN 语言程序,依以上所给数据在 IBM 机上运算,结果得到该边坡的随机-模糊可靠度为

$$P_r = 82.345\%$$

7 结语

本文所建议的极限平衡分析计算边坡随机-模糊可靠性的方法,包括了参数准备至可靠度计算的全过程,比较系统和完整,同时具有

确定的数学表达形式,计算工作也比较简便,因而具有较好的实用性,便于实际工作中应用。

由于文中所建议的方法同时考虑了岩体力学特性的随机不确定性和模糊不确定性,反映了岩体的客观本质,并实现了模(糊事件)-精(确概率)结合,从而又满足了对工程稳定性定量评价的需要,因而该方法优于传统的随机可靠度方法。

参考文献

- 1 吴世伟等,结构安全度与可靠度分析论文集,河海大学出版社,南京,1988.
- 2 Oka Y. J Geotech Engrg, ASCE, 1990, 106(8).
- 3 李胡生等,岩土工程学报,1992, 6.
- 4 李胡生等,岩土力学, 1993, 2.
- 5 李胡生等,固体力学学报,1993, 4.