# 冲锤-杆撞击反问题研究(Ⅱ)①

刘德顺　杨襄璧
(中南工业大学机械系，长沙 410083)

李夕兵
(中南工业大学资开系，长沙 410083)

**摘　要**　基于冲锤-杆撞击离散数学模型。通过对冲锤-杆撞击系统中波的传递规律及其相应矩阵的分析，提出了冲锤-杆撞击反问题的计算方法及其电算程序。最后对电算结果和计算精度进行了分析和讨论。

**关键词**　冲锤　杆撞击　反问题

冲锤-杆撞击反问题已被定义为[1]：已知冲锤-杆系统输出的应力波，求解产生这种波形的冲锤的几何形状。这一问题的解决，将对凿岩机械、桩工机械和 SHPB 实验装置等撞击式机械与装置的设计具有重要意义。

## 1　计算模型

将设定的应力波波形 $\tau \in [0, 2L/a]$ 段离散成 $2n$ 等分后，$\Delta\tau = L/(n \times a)$，冲锤-杆撞击反问题就可以表述为[1]：已知杆中应力波波形 $p_0 = (p_0^1, p_0^3, \cdots, p_0^{2n-1})$。求解冲锤各段截面的回转半径向量 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$。$p_0$ 与 $r$ 的关系隐含在以下矩阵方程中：

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^t = G^t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^0 \qquad (1)$$

附表列出了式(1)的展开式。

## 2　计算方法与电算程序

### 2.1　波传播特性分析

求解撞击反问题，必须寻找合适的计算方法，为了避免复杂的数学推演，本文将从波的传播特性入手来寻找较简便的计算策略。

冲锤的回转半径向量 $r$ 对波的透反射影响是由透射系数向量 $u = (u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$ 来表征的，任一时刻的力波值可表示为 $u$ 的函数

$$p_0^t = f(u) = f(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}) \qquad (2)$$

冲锤撞击杆后，在撞击面产生两道压缩波，一道沿杆顺向传递，即成为输出应力波；另一道沿冲锤向其自由面逆向传播。当经过时间 $k \cdot \Delta\tau$ 后，该波达到了冲锤中的第 $k$ 段，并在 $k$ 段与 $k-1$ 段的界面上发生透反射。透射过去的波将继续朝自由端传播，而反射回的波将沿冲锤向撞击面顺向传播，经 $(k-1)\Delta\tau$ 时间后，将传到杆中成为输出应力波。这就是说 $(k + k - 1) = 2k - 1$ 时刻的输出应力波值 $p_0^{2k-1}$ 包含着冲锤第 1 至 $k$ 段的几何形状信息，即：

$$p_0^{2k-1} = f(u_0, u_1, \cdots, u_{k-1})$$

或　$$p_0^{2k-1} = \varphi(u_0, u_1, \cdots, u_{k-2}) p_{k-1}^k \qquad (3)$$

再由波的透反射关系可知：

$$p_{k-1}^k = u_{k-1} p_k^{k-1} + (1 - u_{k-1}) q_{k-1}^{k-1} \qquad (4)$$

式中　$p_k^{k-1}$ 与扰动无关，$p_k^{k-1} = p_k^0 = \frac{1}{2} m_k v$，或 $p_k^{k-1} = \frac{1}{2} m_0 v \cdot \frac{2 - u_{k-1}}{u_{k-1}} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2 - u_{j-1}}{u_{j-1}}$。而 $q_{k-1}^{k-1}$ 只与冲锤第 1 至 $k-1$ 段的几何形状有关，即 $q_{k-1}^{k-1} = \psi(u_0, u_1, \cdots, u_{k-2})$，这样，将(4)式代入(3)式整理可得：

$$p_0^{2k-1} = f_1(u_0, u_1, \cdots, u_{k-2}) + f_2(u_0, u_1 k, \cdots, u_{k-2}) u_{k-1} \qquad (5)$$

① 国家自然科学基金资助　收稿日期：1994－12－16；修回日期：1995－05－04

**附表　式(1)的展开式**

$$
\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} p_0^t \\ p_1^t \\ \vdots \\ p_n^t \\ q_1^t \\ \vdots \\ q_n^t \end{bmatrix};\quad
\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^{0} = \begin{bmatrix} p_0^0 \\ p_1^0 \\ \vdots \\ p_n^0 \\ q_1^0 \\ \vdots \\ q_n^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m_0 v \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2-u_0}{u_0} \\ \vdots \\ \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{2-u_{j-1}}{u_{j-1}} \\ -\dfrac{2-u_0}{u_0} \\ \vdots \\ -\prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{2-u_{j-1}}{u_{j-1}} \end{bmatrix}
$$

$$
G = \left[\begin{array}{cccccc}
0 & u_0 & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & 0 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \vdots \\
0 & & \cdots & & 0 & u_{n-1} \\
0 & & \cdots & & & 0 \\
0 & u_0-1 & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & 0 & u_1-1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & \cdots \\
0 & & \cdots & 0 & u_{n-2}-1 & 0 \\
0 & & \cdots & & 0 & u_{n-1}-1
\end{array}\quad
\begin{array}{ccccc}
0 & & \cdots & & 0 \\
1-u_1 & 0 & \cdots & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \\
0 & \cdots & 0 & 1-u_{n-1} & 0 \\
0 & & \cdots & 0 & -1 \\
0 & & \cdots & & 0 \\
2-u_1 & 0 & \cdots & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 2-u_{n-1} & 0
\end{array}\right]
$$

式中　$p_0^t$—$t$ 时刻杆中的力波值，即系统输出的力波，N；$p_i^t$，$q_q^t$— 冲锤第 $i$ 段在 $t$ 时刻的顺、逆波值，N；$u_i$— 透射系数，$u_i = 2r_i^2/(r_{i+1}^2 + r_i^2)$；$m_0$— 杆的波阻，N · S/m；$v$— 撞击速度，m/s；$L$— 冲锤长度，m；$a$— 冲锤的纵波速度，m/s；$r_i$— 冲锤第 $i$ 段截面的回转半径，m。

上式表明：$2k-1$ 时刻的输出力波 $P_0^{2k-1}$ 与透射系统 $u_{k-1}$ 存在线性关系。这样，可以先设定 $u_{k-1}$ 分别等于 $x_1$，$x_2$，将 $x_1$，$x_2$ 及已知透射系数分别代入(1) 式计算，可得对应的杆中 $2k-1$ 时刻应力波值 $y_1$，$y_2$。故：

$$
u_{k-1} = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(p_0^{2k-1} - y_1) \tag{6}
$$

因此，根据(6) 式和(1) 式可以逐次迭代，求解出 $u_0$，$u_1$，$\cdots$，$u_{n-1}$，从而求解出 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$。

## 2.2　运算方式

在利用(1) 式迭代求解时，必须进行矩阵 $G$ 的相乘运算。注意到矩阵 $G$ 中的零元素较多，因而可以选择合适的运算方法，减少其运算工作量。

由(1) 式可知，各时刻的输出力波 $p_0^t$ 只与矩阵 $G^t$ 中的第一行元素有关，并且第一行第一列元素在矩阵相乘运算中恒为 0，为方便推导，设第 1 行其它元素分别为 $g_1^t$，$g_2^t$，$\cdots$，$g_{2n}^t$。

当 $t = 1$ 时，$g_1^1 = u_0$；

$$
g_i^1 = 0,\ i = 2, 3, \cdots, 2n \tag{7}
$$

当 $t > 1$ 时，由 $G^t = G^{t-1} \cdot G$ 递推求解得：

$$
\left.\begin{aligned}
& g_1^t = (u_0 - 1) g_{n+1}^{t-1} \\
& g_i^t = u_{i-1} g_{i-1}^{t-1} + (u_{i-1} - 1) g_{n+i}^{t-1}, \\
& \qquad i = 2, \cdots, n \\
& g_{n+i}^t = (1 - u_i) g_i^{t-1} + (2 - \\
& u_i) g_{n+i+1}^{t-1},\ i = 1, \cdots, n-1 \\
& g_{2n}^t = -\, g_n^{t-1}
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

这样，$t$ 时刻的力波值

$$p_0^t = \sum_{j=1}^{n}(g_j^t p_j^0 + g_{n+j}^t q_j^0) \tag{9}$$

由于 $p_j^0 = -q_j^0 = \frac{1}{2}m_j v = \frac{2-u_{j-1}}{u_{j-1}}\cdot p_{j-1}^0$，故

$$p_0^t = \sum_{j=1}^{n}(g_j^t - g_{n+j}^t)p_j^0 \tag{10}$$

将(8)式代入(10)式并展开整理可得：

$$p_0^t = p_0^{t-1} + u_0 g_{n+1}^{t-1} p_1^0,\quad t = 2, \cdots, 2n \tag{11}$$

或

$$p_0^t = (1 + \sum_{i=1}^{t-1} g_{n+1}^i)p_0^1,\quad t = 2, \cdots, 2n \tag{12}$$

式中

$$p_0^1 = u_0 p_1^0 = \frac{1}{2}m_0 v(2-u_0) \tag{13}$$

采用(11)或(12)时迭代逐次计算，运算量可大为减少。事实上，由(11)式和(8)式也可推导出(5)式，只是较繁杂而已。

### 2.3　电算程序

电算程序采用 quick-basic 语言编制[2]。程序框图如图 1 所示。其中的初值按下列式子计算：

$$u_0 = (2 - 2p_0^1)/m_0 v_0 \tag{14}$$

$$m_1 = \frac{2-u_0}{u_0}\cdot m_0 \tag{15}$$

$$r_1 = \sqrt{m_1/\pi\rho a} \tag{16}$$

$$r_k = \sqrt{\frac{2-u_{k-1}}{u_{k-1}}}\cdot r_{k-1},\quad k = 2, \cdots, n \tag{17}$$

并由此递推可得 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$。为了便于研究冲锤的形状与输出应力波波形的关系，该程序还具有由冲锤几何尺寸正演计算系统输出应力波的功能，并同时计算出冲锤的质量 $W$ 及各时刻输出应力波能量占冲锤总动能的比重 $\eta^t$。当 $\eta^t \geqslant 0.99$ 或 $p_0^t < 0$ 时，则停止计算，前者意味着绝大部分能量已传到杆中输出，剩下部分能量可忽略不计；后者意味着冲锤与杆已处于分离状态。$W$ 与 $\eta^t$ 由下列两式求得：

$$W = (\pi\cdot L\cdot\rho/n)\cdot\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \quad (\mathrm{kg}) \tag{18}$$

$$\eta^t = \frac{2L\sum_{i=1}^{t}(p_0^i)^2}{m_0\cdot W\cdot n\cdot a\cdot v^2} \tag{19}$$

## 3　实例计算

应用计算机可以方便地进行各种波形的反演计算。图 2 给出了一个具有正弦函数特征的波形的反演计算结果。该例中 $m_0 = 16\,000\,\mathrm{N\cdot s/m}$，$\rho = 8\,000\,\mathrm{kg}$，$a = 5\,000\,\mathrm{m/s}$，$v = 3\,\mathrm{m/s}$，$L = 0.12\,\mathrm{m}$。图中波形 $\tau\in[0, 60\mu s]$ 部分是设定的，由此反演计算冲锤的几何尺寸，然后正演计算冲锤所输出的力波的其余部分。这一计算结果已被应用于 SHPB 加载冲锤的设计加工中[3]。

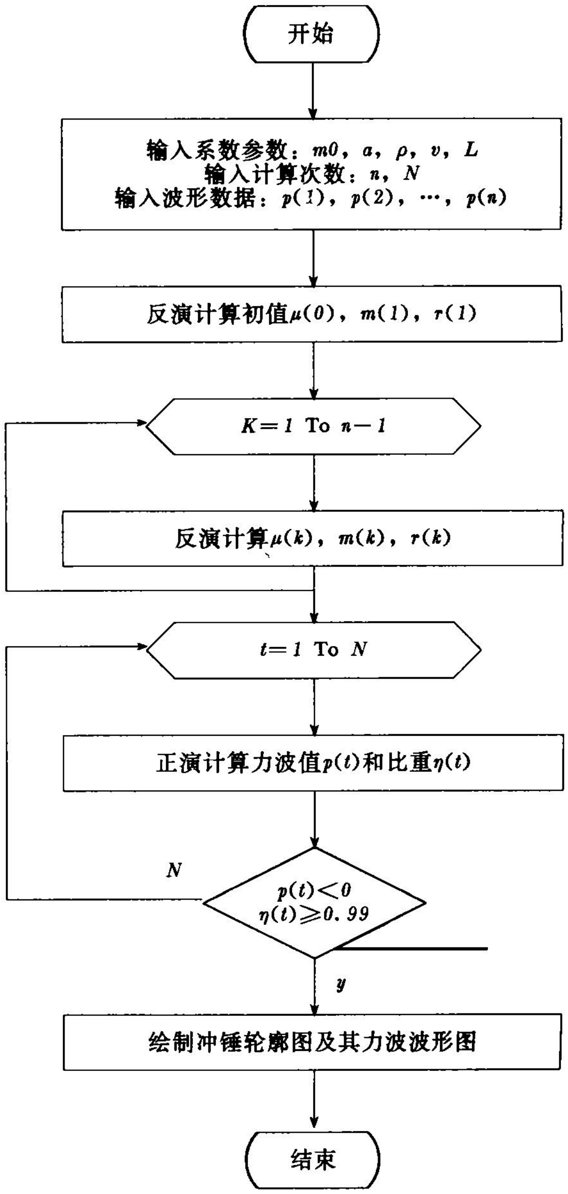


图 1　电算程序框图

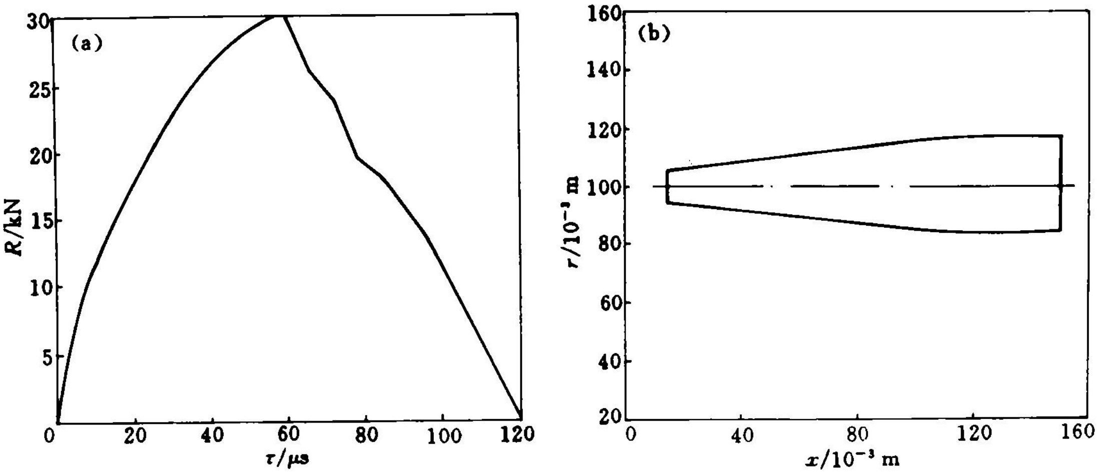


图 2　近似正弦函数波形及其冲锤轮廓

根据波动理论，截面呈台阶状突变的冲锤与杆撞击产生的力波必然具有台阶函数形式。从本文的理论推导可知，当给定一台阶函数形式的力波时，由于输出力波波形值与透射系数和截面半径是一一对应的，因此，这种情况下的反演计算理论上是无误差的。但是，在实际的冲锤与杆撞击时，两撞击面不可能瞬间完全接触，而有一个从小到大的接触过程，因而力波也有一个从 0 到大的递增过程，而不能是阶跃变化的。另外，冲锤的截面变化可能有突变和连续变化两种。所以，实际的力波波形不是一个台阶函数，而是一个连续变化的函数。这时，用一个台阶函数去近似，就必须产生一定的计算误差，这一问题有待进一步研究。

## 参考文献

1　刘德顺，杨襄壁．中国有色金属学报，1995，5(1)：14－17.

2　秦笃列．Quick BASIC 4.0 高级结构化程序设计技术．北京：海洋出版社，1990：38－48.

3　Liu Deshun, Li Xibing, Yang Xiangbi. In: Proceedings of International Workshop on Rock Foundations, Tokyo, Japan. 1995.

(编辑　何学锋)