正交异性非二次式新型屈服函数①

周维贤
(西北工业大学航空制造工程系，西安 710072)

摘　要　鉴于现有的正交异性屈服函数是将材料的屈服性能和变形性能这两种各向异性特性混在一起考虑，以致有时出现明显矛盾的情况，该文探讨并建立了一个能同时、分别考虑这两种特性的新型屈服函数。应用表明，它是可用和有效的。

关键词　正交异性　屈服性能　变形性能　屈服函数

Hill 最近指出[1]，各向异性材料某两方向上的屈服应力假如相等的话，按现有的各向异性塑性理论预测的这两个方向上的变形情况也相同；反之亦然。然而，有些试验数据明显显示并非如此。例如，70：30 黄铜板轧向的屈服应力是 126 MPa、横向的是 125 MPa，两者很接近；相应的塑性应变比却是 $r_0=0.51$、$r_{90}=0.37$，相差甚远。这表明，除别的问题外，应力-应变关系问题在迄今的塑性异性理论里尚未妥善解决。

产生上述问题的物理原因，Hill 在文献[1]中未作分析，只是从屈服轨迹方面解释了问题存在的客观可能性；他提出的屈服函数修正形式，也只是就主应力作用在板材的轧向和横向的情况作出的，缺乏普遍应用的意义；而只考虑 0°、90°两个方向的修正是否已足够，尚未有论证。

本文拟先从物理概念上分析产生上述问题的原因，而后在作者已有工作[2]的基础上建立一种新型屈服函数来解决所述的问题。

1　分析

显然，材料具各向异性性质的含意有二个，即屈服性能有各向异性和变形性能有各向异性。一般情况下，两者不一定同步。

板料的各向异性，通常可分为板面内的和板厚方向的来述说。

板料面内的屈服性能和变形性能的各向异性目前通用板材轧向、45°方向和横向的屈服应力 σ_0、σ_{45}、σ_{90} 和塑性应变比 r_0、r_{45}、r_{90} 分别表征。按定义，塑性应变比是与单拉试件宽度应变有关的量，故在此宜匹配互相垂直的两个方向上的性能来论述。按现有理论，如果 $\sigma_0=\sigma_{90}$，则 $r_0=r_{90}$。显然，这只有所述两种各向异性在这两个方向上完全同步才如此。假如不同步的话，$\sigma_0=\sigma_{90}$ 时，就不一定有 $r_0=r_{90}$ 了。故考虑这种因素时，据屈服函数导出的 r_0、r_{90} 的表示式与现有的应有所不同，使它们可以有不同的数值。

至于 r_{45}，情况有所不同。沿 45° 方向拉伸的试件宽度方向与板材轧向也成 45°；按正交异性定义，这两个方向上的性能是完全相同的。故 r_{45} 的数值与所述两种各向异性在板面内其他方向上是否同步无关，它只与板料的厚向异性有关，亦即据屈服函数导出的 r_{45} 的现有表示式仍可应用，无需改变。

由于尺寸的限制，板厚方向的性能是无法如板面内的那样通过制取单向拉伸试件测定的。其屈服性能目前是借单向压缩或板面内的双向等拉试验来间接测定，其变形性能则是借上述的塑性应变比(用板面内的平均值、或用

①　国家自然科学基金和航空科学基金资助项目　收稿日期：1994－10－29；修回日期：1995－02－08

r_{45}）来表达。现有的固定幂次值型屈服函数均预测当 $r=1$ 时，板面内的单拉、双向等拉屈服应力也相等。如所熟知，这与实际是不尽符合的，有时甚至相差甚大。自 Hill 在 1979 年提出的屈服函数的情况 Ⅳ[3] 开始的非固定幂次值型屈服函数实际上就是纠正这一偏差的；方法是变动屈服函数的幂次值（由单拉、双向等拉屈服应力和塑性应变比试验数据确定）来迎合上述两种各向异性在板厚方向与板面（可以 45° 方向为代表）间未必同步的情况。显然，不用调节屈服函数幂次值的方法而用调节（据屈服函数导出的）双向等拉屈服应力的表达式的方法，甚至两者兼用，原则上都是可以的，可视如何方便而定。

综上分析可知，采用变幂次值型屈服函数时，就板料来说，只需增添两个待定材料常数以变动 r_0、r_{90} 原来的表示式，就可适合容纳屈服性能与变形性能两种各向异性未必同步的情况。关于 r_{45} 和双向等拉屈服应力的表示式，则无需改变。

2 新型屈服函数的形式

2.1 增添项形式

用 x、y 表示板材的轧向和横向时，r_0、r_{90} 是当 $\sigma_x\neq 0$ 或 $\sigma_y\neq 0$ 时的应变增量 $d\epsilon_y$ 或 $d\epsilon_x$ 对 $d\epsilon_t(=-d\epsilon_x-d\epsilon_y)$ 的比值；而按 Drucker 公理，$d\epsilon_y$、$d\epsilon_x$ 是与屈服函数对 σ_y 或 σ_x 的一阶微分成正比的量。因而，设新增待定材料常数是 g_1、g_2 的话，它们联系的变量应是应力 σ_x、σ_y 的相乘项，即应分别是 $\sigma_x^m\sigma_y$ 或 $\sigma_x\sigma_y^m$ 的形式。这是因为无一个是一次方时，r_0、r_{90} 的表示式将不会有所改变；另一个不是 m 次方时，仅 $\sigma_x\neq 0$ 或 $\sigma_y\neq 0$ 时的 $d\epsilon_x$、$d\epsilon_y$、$d\epsilon_t(=-d\epsilon_x-d\epsilon_y)$ 将不是 σ_x^{m-1} 或 σ_y^{m-1} 的齐次式，r_0、r_{90} 将不是与应力大小无关的量，与原定义不符。但这样的相乘项比原屈服函数的应力高一幂次，故为维持幂次的一致，此相乘项应除以某一常数应力、例如可以是轧向单拉塑流应力 σ_0 或双向等拉塑流应力 σ_{bi}。

上述两相乘项可合写在一起，如 $\dfrac{g_1\sigma_x^m\sigma_y+g_2\sigma_x\sigma_y^m}{\sigma_0}=(g_1\sigma_x^{m-1}+g_2\sigma_y^{m-1})\dfrac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_0}$。一般情况下，$\sigma_x$、$\sigma_y$ 不是主应力；故后者宜按 $\sigma_1\sigma_2=\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2$ 的应力转换关系改写成 $\dfrac{\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2}{\sigma_0}$ 的形式。至于前者，为书写简洁，可设它有如下的一般形式，即 $(g_1\sigma_x^{m-1}+g_2\sigma_y^{m-1}+g_4\tau_{xy}^{m-1})$；常数 g_4 可借增添函数不影响 r_{45} 和 σ_{bi} 的原有表示式的条件确定。并且，从充分利用这两个条件和把括号内的函数看成齐次多项式看，至少还可合宜地加一项 $g_3(\sigma_x\sigma_y)^{(m-1)/2}$。这样，增添项可写成：

$$f_1=m\left[g_1\sigma_x^{m-1}+g_2\sigma_y^{m-1}+g_3(\sigma_x\sigma_y)^{\frac{m-1}{2}}+g_4\tau_{xy}^{m-1}\right]\frac{\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2}{\sigma_0} \tag{1}$$

等号后的 m 是为简化流动法则的式子而加的。

σ_{bi} 的表示式不受 f_1 的影响意味着在 $\sigma_x=\sigma_y$、$\tau_{xy}=0$ 的应力状态下，$f_1=0$，由此可得 $g_3=-(g_1+g_2)$。

如下将看到，r_{45} 与 $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=\dfrac{1}{2}\sigma_{45}$ 应力状态下的 $dr_{xy}(\propto\dfrac{\partial f}{\partial\tau_{xy}})$ 和 $d\epsilon_t[\propto(\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_y})]$ 有关。r_{45} 的表示式不受 f_1 的影响意味着在所述应力状态下，$\dfrac{\partial f_1}{\partial\tau_{xy}}=0$、$\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma_x}+\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma_y}=0$；由此得 $g_1+g_2+g_3+g_4=0$，将 $g_3=-(g_1+g_2)$ 代入，得 $g_4=0$。

2.2 新屈服函数形式与相应的流动法则

结合屈服函数的原有形式[2]，新屈服函数 f 的完整形式是：

$$\begin{aligned}f&=c[(\sigma_x+a\sigma_y)^2]^{m/2}+h[(\sigma_x-\sigma_y)^2+b\tau_{xy}^2]^{m/2}+m[g_1\sigma_x^{m-1}+g_2\sigma_y^{m-1}-\\&\quad(g_1+g_2)\cdot(\sigma_x\sigma_y)^{(m-1)/2}]\cdot\frac{\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2}{\sigma_0}\\&=\sigma_i^m=\sigma_0^m\end{aligned} \tag{2}$$

相应的流动法则可按如下关系得到：

$$\left.\begin{aligned}d\epsilon_{ij}&=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\quad(i,\ j=x,\ y)\\d\epsilon_t&=-(d\epsilon_x+d\epsilon_y)\\d\epsilon_i&=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_i}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2.3 材料常数的确定

将式(2)应用于沿板材轧向、45°方向和横向的单向拉伸试验，可得：

$$c + h = 1;\ h = 1 - c \tag{4a}$$

$$(\sigma_0/\sigma_{90})^m = c\alpha^m + h = 1 - c(1 - \alpha^m) \tag{4b}$$

$$(\sigma_0/\sigma_{45})^m = c(\frac{1+\alpha}{2})^m + (1-c)(\frac{b}{4})^{m/2} \tag{4c}$$

将式(2)应用于双向等拉场合，得：

$$(\sigma_0/\sigma_{bi})^m = c(1+\alpha)^m \tag{5}$$

将上述流动法则用于沿0、45、90°方向的单向拉伸试验，按塑性应变比定义和 $d\varepsilon_{45\pm 90^\circ} = \frac{d\varepsilon_x + d\varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2}dr_{xy}$ 的转换关系，再利用式(4)，得：

$$r_0 = \frac{d\varepsilon_y}{d\varepsilon_t} = -\frac{c\alpha - h + g_1}{c(1+\alpha) + g_1},$$

$$1 + r_0 = \frac{1}{c(1+\alpha)+g_1} \tag{6a}$$

$$r_{90} = \frac{d\varepsilon_y}{d\varepsilon_t} = -\frac{c\alpha^{m-1} - h + g_2\sigma_{90}/\sigma_0}{c(1+\alpha)\alpha^{m-1} + g_2\sigma_{90}/\sigma_0},$$

$$1 + r_{90} = \frac{(\alpha_0/\sigma_{90})^m}{c(1+\alpha)\alpha^{m-1} + g_2\sigma_{90}/\sigma_0} \tag{6b}$$

$$r_{45} = -\frac{1}{2}(1 + \frac{dr_{xy}}{d\varepsilon_t}) = -\frac{c(1+\alpha)^m - hb^{m/2}}{2c(1+\alpha)^m},$$

$$1 + r_{45} = \frac{(2\sigma_0/\sigma_{45})^m}{2c(1+\alpha)^m} \tag{6c}$$

由式(5)和式(6c)可得 m，由式(4b)、(4c)、(5)、(6a)及(6b)则可分别得 α、c 等如下：

$$m = \ln[2(1+r_{45})]/\ln(2\sigma_{45}/\sigma_{bi}) \tag{7a}$$

$$\alpha = \{1 - [1 - (\sigma_0/\sigma_{90})^m]/c\}^{1/m} \tag{7b}$$

$$c = (\sigma_0/\sigma_{bi})^m/(1+\alpha)^m,\ h = 1 - c \tag{7c}$$

$$b = [\frac{(2\sigma_0/\sigma_{45})^m - c(1+\alpha)^m}{1-c}]^{2/m} \tag{7d}$$

$$g_1 = \frac{1}{1+r_0} - c(1+\alpha) \tag{7e}$$

$$g_2 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}}[\frac{(\sigma_0/\sigma_{90})^m}{1+r_{90}} - c(1+\alpha)\alpha^{m-1}] \tag{7f}$$

其中　α、c 得按式(7b)、(7c)用迭代法计算。

2.4 可用性检查

由式(6a)和式(6b)可得：

$$\frac{1+r_{90}}{1+r_0} = (\frac{\sigma_0}{\sigma_{90}})^m \frac{c(1+\alpha)+g_1}{c(1+\alpha)\alpha^{m-1} + g_2\sigma_{90}/\sigma_0} \tag{8}$$

由此看到，只要 $g_1 \neq g_2$，即使是在 $\sigma_0 = \sigma_{90}$ 的情况下(由式(7b)，此时 $\alpha = 1$)，$r_0 \neq r_{90}$；反之亦然。材料不同的两种异性性质就可得到不同的描述。

3 应用举例

本文对[4]中列出的1100铝板的性能进行应用考察。为节省篇幅，在此只列出变形刚开始($\varepsilon = 0$)时的试验数据和计算结果(表1)。$\varepsilon = 0$时的轧向单拉塑流应力 $\sigma_0 = 51.1$MPa。为便于对比，其他塑流应力以对 σ_0 的比值列出，并与计算结果一并列于表2中。利用这些试验数据和式(7)，就可算得本文所提屈服函数式(2)中的所有材料常数的数值。

如上所述，预设式(2)中的 $g_1 = g_2 = 0$时，式(2)就蜕变成不考虑屈服性能与变形性能两种各向异性性质有所不同的屈服函数，此时的待定材料常数，如[2]中所述，可借塑流应力或塑性应变比确定。借前一种试验数据确定时所用的公式，事实上就是本文的式(7a)～(7d)。借后一种试验数据确定时所用的公式则是[2]：

$$\alpha^{m-1} = \frac{r_0 + \alpha(1+r_0)}{\alpha r_{90} + 1 + r_{90}} \tag{9a}$$

$$c = \frac{1}{(1+\alpha)(1+r_0)} \tag{9b}$$

$$b = [\frac{c(1+\alpha)^m(1+2r_{45})}{1-c}]^{2/m} \tag{9c}$$

m 值仍可按式(7a)确定。

用上述公式算得的材料常数列于表1中。

表1　1100铝板的材料常数

序号	应用公式	m	α	c	h	b	g_1	g_2
Ⅰ	(7)	1.691	0.824	0.309	0.691	5.008	0.001	0.028
Ⅱ	(7a-d)	1.691	0.824	0.309	0.691	5.008	—	—
Ⅲ	(9)	1.691	1.055	0.275	0.725	5.230	—	—

$g_1 \neq g_2 \neq 0$ 显示，1100 铝板的两种各向异性性质是不同步的。不考虑这一点、亦即应用原有的屈服函数时，在用塑流应力确定材料常数的情况下，其预测的塑性应变比必与实际的不尽符合；反之则是塑流应力与实际的不符，如表 2 所示。0、45、90° 以外的性能自然也是不尽符合了。

表 2　屈服函数描述准确度对比

序号	σ_{45}/σ_0	σ_{90}/σ_0	σ_{bi}/σ_0	r_0
Ⅰ	0.945	1.055	1.098	0.77
Ⅱ	0.945	1.055	1.098	0.78
Ⅲ	0.859	0.985	1.044	0.77
试验值	0.945	1.055	1.098	0.77
序号	r_{45}	r_{90}	σ_{p1}/σ_0	σ_{p2}/σ_0
Ⅰ	1.08	0.75	1.185	1.219
Ⅱ	1.08	0.85	1.180	1.226
Ⅲ	1.08	0.75	1.155	1.142
试验值	1.08	0.75	1.217	1.272

表 2 中的 σ_{p1}、σ_{p2} 分别表示沿板材轧向或横向单向拉伸，而试件宽度变形 $d\epsilon_y = 0$ 或 $d\epsilon_x = 0$ 时的塑流应力，习称平面应变塑流应力。应用已知的材料常数预测这两种塑流应力的计算方法可参见[2]。可以看到，采用式(2) 预测的结果依然是较好的。

4　结论

(1) 材料的屈服性能的各向异性与变形性能的各向异性不一定完全同步，宜分别考虑。

(2) 本文建立的屈服函数式(2)是可用的，能全面地拟合板材的基本性能、将上述的两种各向异性都反映出来。

参考文献

1　Hill R. Int J Mech Sci, 1993, 35: 19—25.

2　Zhou Weixian. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 1994, 4(2): 37—41.

3　Hill R. In: Math Proc Camb Phil Soc, 1979, 85: 179—191.

4　Montheillet F *et al.* Int J Mech Sci, 1991, 33: 197—209.

（编辑　李　军）

(上接 78 页) 烧结试样的性能比水雾化的好。初步的摩擦磨损试验表明，粉末冷压烧结试样的耐磨性比常规铸造试样的高 30%以上。

3　结论

(1) 用离心雾化法制得的 ZMJ 合金粉末比水雾化法制得的细，离心雾化粉末形状为近似的球形，水雾化粉末为不规则的多角形。

(2) 离心雾化粉的松装密度大于水雾化粉，流动性不及水雾化粉。

(3) 两种粉末的金相组织均为很细小的树枝晶。与铸造组织相比其枝晶间距大大减小。

(4) 快速冷却大幅度提高了溶质元素固溶度，使常规铸造条件下形成的金属间化合物受到抑制，基体相的固溶强化作用得到加强。

参考文献

1　杨留栓，庞礼军，杨根仓，周尧和. 金属学报，1995，31(6)：A254.

2　朱和祥等. 材料导报，1994，(1)：62.

3　黄培云. 粉末冶金原理. 北京：冶金工业出版社，1982.

4　韩凤麟. 粉末冶金机械零件. 北京：机械工业出版社. 1987.

5　杨留铨，杨根仓，周尧和. 材料导报，1994，(3)：15.

6　Li Yuanyuan *et al.* In: AMPT'93 International Conference, Dublin, Ireland, 1993, V.1: 603.

7　李月珠. 快速凝固技术和材料. 北京：国防工业出版社. 1993.

8　李隆盛. 铸造合金及熔炼. 北京：机械工业出版社，1989.

9　Grant Nicholas J. Journal of Metals, 1983, (1): 21.

（编辑　彭超群）