

突变理论研究单轴加载

失稳与实验验证^①

费鸿禄^② 唐春安 徐小荷

(东北大学采矿系, 沈阳 110006)

摘 要 为研究岩石失稳的破坏过程, 将试验机与试样作为一个系统, 利用突变理论研究该系统的失稳机制, 建立系统失稳时的位移突跳量计算式; 利用自制的模拟材料在试验机上模拟了位移现象, 并测定了失稳时的位移突跳量, 理论与实验结果相吻合, 解释了注水软化抑制岩爆的原因。

关键词 突变理论 失稳 位移 岩爆

二百多年前, 欧拉解出了压杆横向屈曲的第一个弹性稳定性问题, 随后结构稳定性便一直是人们研究的课题。但经典固体力学研究的稳定性问题, 只考虑系统本身平衡和运动的稳定性。岩石是一种条件不稳定的地质材料, 因为在对岩石试样进行单轴加载时, 有的破坏是突发的, 而有的是渐变的, 这种现象给岩石力学工作者以重要的启发。本世纪六十年代中期, 很多地下工程的破坏已经影响到生产和人身安全, 此时人们才注意到岩石破坏过程研究的重要性。1965年 Cook 在普通试验机上加了一组与试样长轴平行的钢管柱, 有效地减轻了岩石破坏的猛烈程度, 测得了田纳西大理岩和圣克乐德花岗岩的全过程应力-应变曲线; 同年 Cook 和 Hojem 设计制造了一台刚性试验机, 从而对岩石破裂的力学现象有了更进一步的认识, 搞清了试样产生猛烈破坏的原因是由于试件刚度大于试验机刚度所致^[1]。Cook 的结论用于解释矿山发生岩爆的现象, 在一定程度上揭示了岩爆的本质, 但它掩盖了岩石失稳的本质。为揭示岩石失稳的某些特征和本质, 加深对岩爆机理的认识, 本文采用突变理论来加以分析。

1 岩石本构方程的建立与结构效应分析

1.1 岩石本构方程

岩石的内部缺陷在外载荷的作用下繁衍、发展, 在缺陷密集的地方支承载荷的能力被削弱、丧失、最后汇集成宏观裂纹, 破坏成一系列尺寸不同的岩块。

假设缺陷是随机分布的, 缺陷间相互独立, 各处平均密度是稳定的, 也就是说可以用泊松分布来描述这些缺陷的分布。

在一维情况下(图1), 将岩石化分成 Δl 的微元, 它是破裂的最小单元, 但要比晶胞大得多。

以 λ 表示单位长度的缺陷数目的数学期望值。设在长度为 l 的区段内出现 k 个缺陷的概率为^[2]:

$$p(k/l) = \frac{(\lambda l)^k}{k!} e^{-\lambda l} \quad (1)$$

由给定条件知 $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ 是缺陷的平均间距。

缺陷间距为 l 的概率密度为:

$$\varphi(l) = \frac{p_0(l)p_1(l)}{\Delta l} = \lambda e^{-\lambda l} \quad (2)$$

① 国家教委博士点基金和煤炭科学基金资助项目 收稿日期: 1994-05-19

② 阜新矿业学院矿山建设工程系

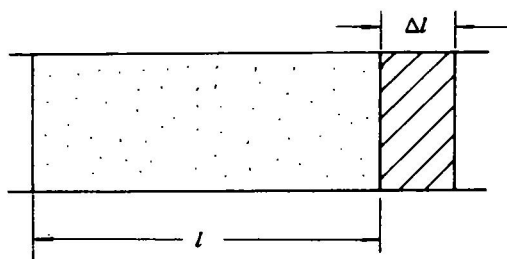


图1 岩石损伤示意图

式中 $p_0(l)$ —在 Δl 内没有缺陷的概率;
 $p_1(l)$ —在 Δl 内有一个缺陷的概率。

缺陷间距小于 x 的微元体都丧失承载能力, 则有损伤因子 ω

$$\omega = \frac{\int_0^x l\varphi(l)dl}{\int_0^\infty l\varphi(l)dl} \quad (3)$$

由(2)、(3)式得:

$$\omega = 1 - \left(\frac{x}{\alpha} + 1\right)e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad (4)$$

(4)式是在一维情况下推导出来的, 在三维情况下存在着线、面体、体多种缺陷, 分布在三维空间。

在(4)式中以 $(x/\alpha)^m$ 代替 $(x/\alpha)^1$ 有:

$$\omega = 1 - \left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + 1\right]e^{-(x/\alpha)^m} \quad (5)$$

式中 m 可理解为与岩石性质有关的参数; α 为完整度, 具有长度量纲, 它取决于载荷的大小, 若载荷大, 则 α 小。

1.2 岩石应力-应变全过程曲线

由损伤力学知, 岩石的本构方程为:

$$\sigma = E\epsilon(1 - \omega) \quad (6)$$

式中 E —弹性模量。

将(5)式代入(6)式, 有:

$$\sigma = E\epsilon \left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + 1 \right] e^{-(x/\alpha)^m} \quad (7)$$

由于应变值与缺陷的平均距离成反比, 故

$$\text{可设定: } \alpha = \frac{c}{\epsilon} \quad (8)$$

式中 c —与材料有关的常数。

$$\text{再令 } h = \frac{c}{x} \quad (9)$$

式中 h —与材料有关的常数。

为方便起见, 令: $\sigma_* = \frac{\sigma}{Eh}$, $\epsilon_* = \frac{\epsilon}{h}$, 则

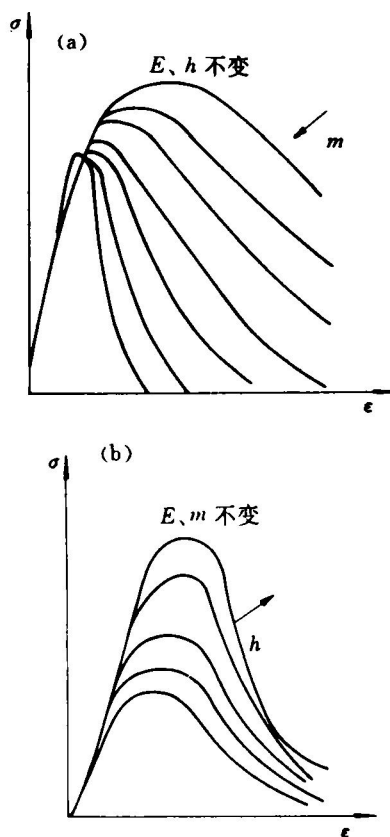
(7)式变成无量纲表达式:

$$\sigma_* = \epsilon_* (\epsilon_*^m + 1) e^{-\epsilon_*^m} \quad (10)$$

m 、 h 对全过程曲线的影响见图2, 从图中可以看出 m 、 h 的改变能使峰值后区变陡, 正是它们控制着岩石的内部结构。利用得到的本构方程对实测曲线拟合结果(图3)看出, 它较好地表征了岩石本构关系。工程上为减缓或消除岩爆, 对煤(岩)体实行压力注水, 实际上就是降低 m 值, 增加岩体的损伤程度, 使其不易积存变形能(图4)^[3]。

2 失稳的突变理论分析

为应用突变理论来研究试验机-试样这一

图2 m 、 h 对全程曲线的影响

(a)— m 的影响; (b)— h 的影响

系统的失稳, 最关键的是构造系统的势函数^[4], 其力学模型见图5。

这个系统是由试验机和试样共同组成的, 所以系统势能为上述两部份之和, 即总势能:

$$U = \int_0^u p du + \frac{1}{2}(a - u)^2 \quad (11)$$

式中 p —外力, 是 u 的函数; k —试验机的刚

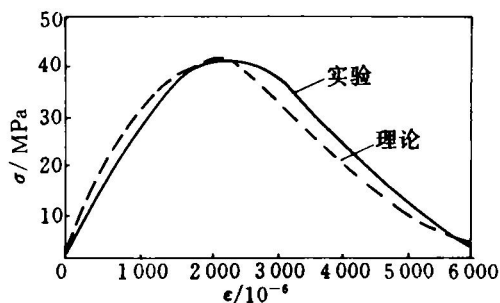


图3 理论曲线与实验曲线的比较

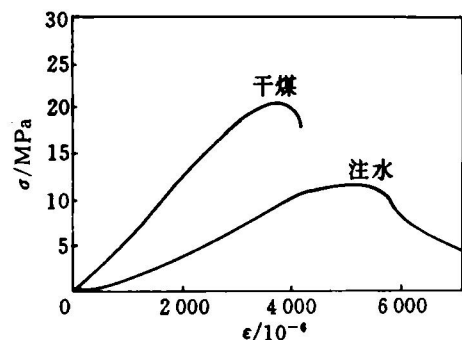


图4 煤注水前后的 σ - ϵ 关系

注水前 $m = 2.7$, 注水后 $m = 2.2$

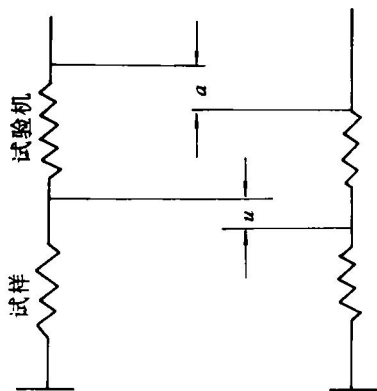


图5 简单力学模型

度; u —试样的变形; a —系统的全位移。

这样便可用突变理论来研究这一系统的失稳机制, 由(11)式(将(10)式代入积分)展开成幂级数, 可以得到平衡曲面方程^[3]:

$$y^3 + gy + f = 0 \quad (12)$$

其中

$$y = \frac{\epsilon_* - \epsilon_{*1}}{\epsilon_{*1}} \quad (13)$$

$$\alpha_* = \frac{EAh^2L}{ka^2}, \quad \lambda_0 = \frac{L}{a} \quad (14)$$

$$g = \{\alpha_* (\epsilon_{*1}^m - m\epsilon_{*1}^{2m} + 1)e^{-\epsilon_{*1}^m} + \lambda_0^2 h^2\} / \{\alpha_* \epsilon_{*1}^{2m} e^{-\epsilon_{*1}^m} [5m^3 \epsilon_{*1}^m - m^3 \epsilon_{*1}^{2m} - m(4m^2 - 1)]\} \quad (15)$$

$$f = \{\alpha_* \epsilon_{*1} (\epsilon_{*1}^m + 1)e^{-\epsilon_{*1}^m} - (1 - \lambda_0 h \epsilon_{*1}) \lambda_0 h\} / \{\alpha_* \epsilon_{*1}^{2m+1} e^{-\epsilon_{*1}^m} [5m^3 \epsilon_{*1}^m - m^3 \epsilon_{*1}^{2m} - m(4m^2 - 1)]\} \quad (16)$$

式中 ϵ_{*1} —尖点; L —试样长度; A —试样横截面积; g 、 f —控制变量。

这样可得到单轴加载系统失稳的充分条件

$$4g^3 + 27f^2 = 0 \quad (17)$$

从(17)式看出, 只有 $g \leq 0$ 时, 才能成立, 依此有:

$$K - K_m \leq 0 \quad (18)$$

其中 $K_m = K_{m0}(4m + 1)e^{-(2+1/m)}$; K_{m0} —试样的初始刚度。

这样我们就得到了失稳准则(17)、(18)式。从失稳的必要条件(18)式可以看出, 如果岩石材料是理想硬化的或是理想塑性的, 那么系统一定是稳定的, 只有材料具有一定软化程度时(18)式才能满足, 由此知试样破坏猛烈程度的原因。Романов等采用橡胶、松香的组合体做了岩体失稳试验^[5], 实际上这完全是刚度效应所致。

若失稳, 单轴加载时, 利用(13)式可得位移突跳量为:

$$\Delta u = \epsilon_{*1} h l \Delta y \quad (19)$$

这样便可根据(19)式确定失稳时位移的突跳量。

3 系统失稳时突跳测试与分析

为对岩石失稳进行室内详细研究与分析，自制了模拟材料，主要原料为水泥、砂、松香酒精溶液、重晶石、硅藻土。自行设计了拉伸式载荷传感器和高频响应的位移传感器，载荷、位移等信号由 HP7090A 绘图系统记录，试验是在普通试验机上进行的，为保证失稳的客

观性，在一定供油量条件下，保持控制阀不动，部分试验结果见附表、图 6。

从上表中可看出，失稳时位移的突跳量理论结果与实验结果吻合很好，这表明用突变理论研究失稳现象(比如冲击地压、岩爆)具有很强的实用性，为进一步利用突变理论研究失稳现象奠定了基础。

从图 6 可看出，失稳点不在峰值处，而是在峰值后的某一点，失稳点由系统特性所决定，失稳过程中有明显的位移突跳。

附表 试样失稳时位移突跳量的理论与实验结果

试样	材料常数 m	材料常数 h	试样尺寸 高度 × 直径 /cm	实验结果 /mm	理论结果 /mm
22 [#]	1.8	3.5×10^{-3}	10.21 × 4.64	0.15	0.18
23 [#]	2.0	4.0×10^{-3}	9.55 × 4.77	0.12	0.16

4 结论

(1) 通过理论分析，引入 m 、 h 参数，较好地解释了岩体结构效应及注水软化消除或减缓岩爆的机理。

(2) 利用突变理论研究失稳破坏，可给出失稳准则，能够深入地了解失稳的本质。

(3) 由理论与实验结果的比较可知，突变理论研究岩爆等现象具有很强的适用性。

参考文献

1 活特科里 V S, 拉马 R D, 萨鲁加 S S 著. 岩石力学试验. 北京: 水利出版社, 1981: 15~40.
2 徐小荷, 唐春安. 中国矿业, 1993, (1).
3 费鸿禄. 东北大学博士学位论文. 1993: 12.
4 桑德斯 P T(著), 凌复华(译). 突变理论入门. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983: 10~40.
5 Романов А Н, Цыганков С С. Обобщенная модель ударов. ФТИРПИ. 1992: 5.

(编辑 何学锋)

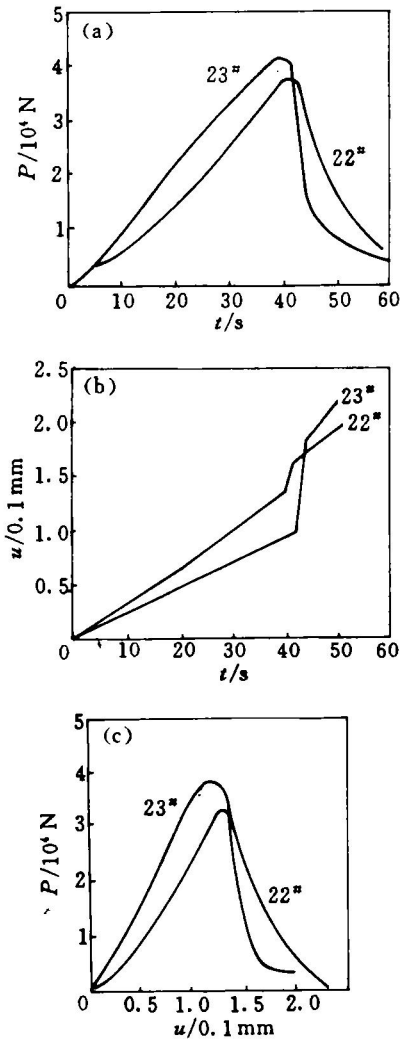


图 6 模拟材料的载荷、位移曲线
(a) — 压力 - 时间曲线;
(b) — 位移 - 时间曲线;
(c) — 压力 - 位移曲线