

层复合阻尼镗杆的动力学分析^①

何将三

(中南工业大学机械系, 长沙 410083)

摘 要 从弹性力学基本理论出发, 建立了层复合阻尼镗杆的数学模型, 得出了纯扭转动载荷情况下的解析解, 实例计算结果与有限元计算结果和实际测试数据基本一致。

关键词 动力学 阻尼 镗杆

在金属切削中, 镗削常用来进行孔的粗加工和精加工。由于镗刀处于半封闭空间中, 镗杆的结构尺寸受到限制, 因此, 镗孔时常常发生振动而影响了加工质量, 限制了生产率的提高。人们寻求阻尼技术来抑制振动^[1]。除了冲击阻尼吸振器外, 直接粘附的阻尼结构对提高镗杆的抗振性、稳定性和降低噪声辐射有明显的效果。本文称具有直接粘附阻尼结构的镗杆为层复合阻尼镗杆。为了研究各种因素对层复合阻尼镗杆动态特性的影响, 有必要对它作动力学分析。

1 层复合阻尼镗杆的结构

层复合阻尼镗杆的结构主要有自由阻尼结构和约束阻尼结构两种类型。自由阻尼结构是将一层具有大阻尼的材料直接粘附在镗杆基体上, 所附加阻尼材料称为自由阻尼层, 而基体称为基本弹性层。约束阻尼结构则是在基本弹性层上粘附一层阻尼材料层, 再在阻尼层上部牢固地粘附一层弹性材料层, 称为约束层。图1示出了约束阻尼镗杆的结构, 其中1为基本弹性层, 2为阻尼材料层, 3为约束层。对于管状镗杆, 阻尼材料也可以粘附在孔表面上。

镗杆发生机械振动时, 粘附的阻尼层随镗杆作弯曲振动, 阻尼材料产生交变的拉压应力

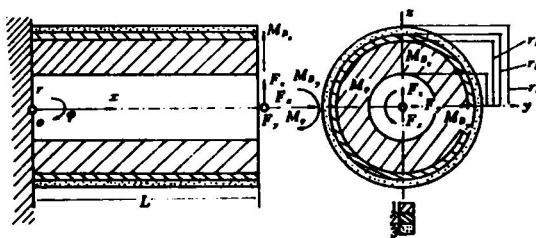


图1 复合阻尼镗杆结构

和应变, 且应变滞后于应力, 由阻尼材料的耗能原理, 使结构的振动能量得到损耗而达到减振降噪的目的。约束阻尼结构中阻尼层上下表面各自产生压缩和拉伸的不同变形, 使阻尼层受剪切应力和应变, 因而比自由阻尼结构可耗散更多的能量, 具有更好的减振效果。

2 动力学模型

对于制作良好的层复合阻尼镗杆, 弹性体的力学关系仍适用于基本弹性层、阻尼材料层和约束层^[2]。采用圆柱坐标系, 图2所示单元体有下列关系:

(a) 应变

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{rx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \\ \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial \varphi} \right) \quad (1) \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(U_r + \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

① 收稿日期: 1995-03-23; 修回日期: 1995-04-17

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{U_{\varphi}}{r} \right)$$

(b) 应力

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left[\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{xx}) \right], \\ \sigma_{rz} &= 2G \varepsilon_{rz} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{xx}) \right], \\ \sigma_{\varphi z} &= 2G \varepsilon_{\varphi z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{xx} = 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{xx}) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G \varepsilon_{\varphi\varphi}$$

(c) 应力平衡条件

径向:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} \quad (3)$$

轴向:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (4)$$

切向:

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial x} + \frac{2}{r} \sigma_{\varphi r} = \rho \frac{\partial^2 U_{\varphi}}{\partial t^2} \quad (5)$$

上面各式中 σ 表示应力, ε 表示应变, U 表示位移, G 为剪切模量, ν 为泊松比, ρ 为材料密度。

约束阻尼镗杆在使用中可看作是具有固定支座的悬臂梁, 其边界条件如下(参见图1):

(1) 固定支座($x=0$)处位移为零:

$$U_{r(x=0)} = 0, U_{\varphi(x=0)} = 0, U_{x(x=0)} = 0 \quad (6)$$

(2) 相邻两层过渡区有相同的位移:

$$\begin{aligned} U_{r_1(r=r_k)} &= U_{r_2(r=r_k)}, U_{r_2(r=r_1)} = U_{r_3(r=r_1)} \\ U_{\varphi_1(r=r_k)} &= U_{\varphi_2(r=r_k)}, U_{\varphi_2(r=r_1)} = U_{\varphi_3(r=r_1)} \\ U_{x_1(r=r_k)} &= U_{x_2(r=r_k)}, U_{x_2(r=r_1)} = U_{x_3(r=r_1)} \end{aligned} \quad (7)$$

(3) 相邻两层过渡区有相同的应力:

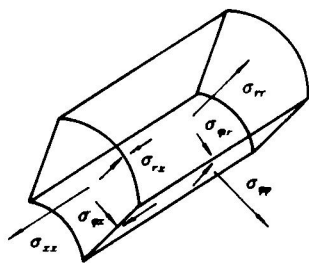


图2 单元体的应力

$$\sigma_{rr_1(r=r_k)} = \sigma_{rr_2(r=r_k)}, \sigma_{rr_2(r=r_1)} = \sigma_{rr_3(r=r_1)}$$

$$\sigma_{\varphi_1(r=r_k)} = \sigma_{\varphi_2(r=r_k)}, \sigma_{\varphi_2(r=r_1)} = \sigma_{\varphi_3(r=r_1)} \quad (8)$$

$$\sigma_{rx_1(r=r_k)} = \sigma_{rx_2(r=r_k)}, \sigma_{rx_2(r=r_1)} = \sigma_{rx_3(r=r_1)}$$

(4) 内、外表面上应力为零:

$$\sigma_{rr_1(r=r_i)} = 0, \sigma_{rr_3(r=r_o)} = 0$$

$$\sigma_{\varphi_1(r=r_i)} = 0, \sigma_{\varphi_3(r=r_o)} = 0 \quad (9)$$

$$\sigma_{rx_1(r=r_i)} = 0, \sigma_{rx_3(r=r_o)} = 0$$

(5) 第2、3层自由端面上应力为零:

$$\sigma_{xx_2(x=L)} = 0, \sigma_{xx_3(x=L)} = 0$$

$$\sigma_{\varphi x_2(x=L)} = 0, \sigma_{\varphi x_3(x=L)} = 0 \quad (10)$$

$$\sigma_{rx_2(x=L)} = 0, \sigma_{rx_3(x=L)} = 0$$

(6) 第1层自由端的动载荷为:

$$M_{\varphi_1(x=L)} = M_{\varphi}(t), F_{x_1(x=L)} = F_x(t)$$

$$M_{y_1(x=L)} = M_{B_y}(t), F_{y_1(x=L)} = F_y(t) \quad (11)$$

$$M_{z_1(x=L)} = M_{B_z}(t), F_{z_1(x=L)} = F_z(t)$$

上面各式中下标数字1、2、3表示对应的层。

镗削时切刀受到切削力 F_s 的作用, 将 F_s 分解(图3)并忽略镗杆的弯曲, 得到下列关系:

$$F_x(t) = F_v(t), M_{\varphi}(t) = F_c(t) \cdot r_s$$

$$F_y(t) = F_p(t), M_{B_y}(t) = 0 \quad (12)$$

$$F_z(t) = -F_c(t), M_{B_z}(t) = F_v(t) \cdot r_s$$

利用式(1)和(2), 以位移 U 为基本变量代入式(3)、(4)、(5), 就可以建立层复合阻尼镗杆的运动微分方程, 它们是一组偏微分方程, 如下:

径向:

$$\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} \right) +$$

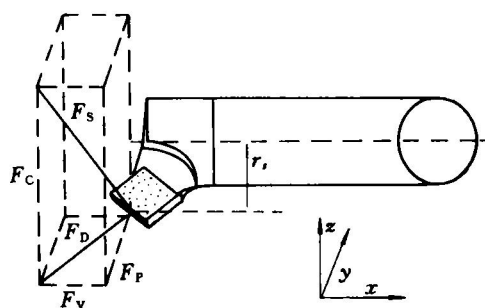


图3 切削力分解

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \\ & \frac{1}{2r(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 U_x}{\partial r \partial x} \\ & = \frac{\rho}{2G} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (13)$$

轴向:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(1-2\nu)} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial x} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi \partial x} \right) \\ & + \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} \\ & + \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{\partial^2 U_x}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial r} \\ & = \frac{\rho}{2G} \cdot \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14)$$

切向:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu} \right) \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial \varphi \partial r} \\ & + \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r^2} \\ & + \frac{2(1-\nu)}{r^2(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{1}{r(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 U_x}{\partial \varphi \partial x} \\ & = \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (15)$$

解这组偏微分方程要结合镗杆的边界条件。一般说来,由于这组偏微分方程相互耦合,要得出普遍解析解是困难的。只有在某些特殊情况下,才有可能得出解析解。

3 纯扭转载荷作用时的解析解

层复合阻尼镗杆承受纯扭转载荷时,运动微分方程较为简单,可得出解析解。下面以约束阻尼结构为例来说明求解方法,它同样适合于自由阻尼结构。

对于约束阻尼结构,作一阶近似,只存在切线方向的位移,即

$$U_\varphi = U_{\varphi(r, x, t)}, U_r = 0, U_x = 0, \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (16)$$

这样,径向和轴向运动微分方程(13)、(14)自动,满足切向运动微分方程(15)成为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r^2} \\ & = \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (17)$$

为分离变量,把位移 U_φ 表达为:

$$U_\varphi = Z_{(r)} \cdot y_{(x)} \cdot A \sin(\omega t + \theta)$$

则式(17)成为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_{(r)}} \cdot \frac{\partial^2 Z_{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r Z_{(r)}} \cdot \frac{\partial Z_{(r)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \\ & = -\frac{1}{y_{(x)}} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x)}}{\partial x^2} - \frac{\rho \omega^2}{G} = \varphi_1^2 \end{aligned} \quad (18)$$

因为上式左边和右边分别只跟 r 和 x 有关,故必然等于一个共同常数 φ_1^2 。方程(18)等价于下列两个方程:

$$-\frac{1}{y_{(x)}} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x)}}{\partial x^2} - \frac{\rho \omega^2}{G} = \varphi_1^2 \quad (19)$$

$$\frac{1}{Z_{(r)}} \cdot \frac{\partial^2 Z_{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r Z_{(r)}} \cdot \frac{\partial Z_{(r)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} = \varphi_1^2 \quad (20)$$

解方程(19)得到:

若 $\varphi_1^2 = 0$,

$$y_{(x)} = C_1 e^{j\omega \cdot \sqrt{\rho/G} x} + C_2 e^{-j\omega \cdot \sqrt{\rho/G} x};$$

若 $\varphi_1^2 \neq 0$,

$$y_{(x)} = C_3 e^{j \sqrt{\varphi_1^2 + \omega^2 \rho/G} x} + C_4 e^{-j \sqrt{\varphi_1^2 + \omega^2 \rho/G} x} \quad (21)$$

解方程(20)得到:

若 $\varphi_1^2 = 0$,

$$Z_{(r)} = D_1 r + D_2 / r;$$

若 $\varphi_1^2 \neq 0$,

$$Z_{(r)} = D_3 B_1^1(\varphi_1 r) + D_4 B_k^1(\varphi_1 r) \quad (22)$$

式中 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 为权系数, B_1^1 为一阶修正第一类贝塞尔函数, B_k^1 为一阶修正第二类贝塞尔函数。

于是得到通解为:

$$\begin{aligned} U_{\varphi(r, x, t)} &= Z_{(r)} \cdot y_{(x)} \cdot A \sin(\omega t + \theta) \\ &= \sin(\omega t + \theta) [(C_1 e^{j\Omega x} + C_2 e^{-j\Omega x}) \\ &\quad \cdot (D_1 r + \frac{D_2}{r}) + (C_3 e^{j\varphi_2 x} + C_4 e^{-j\varphi_2 x}) \\ &\quad \cdot (D_3 B_1^1(\varphi_1 r) + D_4 B_k^1(\varphi_1 r))] \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\Omega = \omega \sqrt{\rho/G}$, $\varphi_2 = \sqrt{\varphi_1^2 + \omega^2 \rho/G}$ 。

由边界条件(6)可知 $C_1 = -C_2$, $C_3 = -C_4$,

于是式(23)成为:

$$U_{\varphi(r, x, t)} = \sin(\omega t + \theta) [(e^{j\Omega x} - e^{-j\Omega x})$$

$$\begin{aligned} & \cdot (D_1 r + D_2/r) + (e^{j\varphi_2 x} - e^{-j\varphi_2 x}) \\ & \cdot (D_3 B_1^l(\varphi_1 r) + D_4 B_1^k(\varphi_1 r)) \end{aligned} \quad (24)$$

再考虑自由端的边界条件(11)。第1层的自由端作用了转矩 $M_{\varphi(t)}$, 因而剪应力 $\sigma_{\varphi(t)}$ 存在并跟半径 r 成正比。由式(1)和(2)可知, 剪应力 $\sigma_{\varphi(t)}$ 跟 $\partial U_{\varphi}/\partial x$ 成正比, 故式(24)中 $D_2=0$ 且有 $e^{j\varphi_2 L} + e^{-j\varphi_2 L} = 2\cos(\varphi_2 L) = 0$

$$\text{得到 } \varphi_n = \frac{\pi}{2L}(2n-1) \quad (25)$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$ 表示振型的阶次。

考虑镗杆的连续性, 显然式(25)也适合第2、3层, 也就是说阻尼层、约束层应该与基本弹性层有相同的振型。结合边界条件(10), 对于第2、3层可得出 $D_1=0$ 。采用 $i=1, 2, 3$ 表示层次, 则解(24)可统一表示为:

$$\begin{aligned} U_{\varphi}(r, x, t) = & \sin(\omega t + \theta) [(e^{j\Omega_i x} - e^{-j\Omega_i x}) D_{i1} r \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\varphi_n x) (D_{i3} B_1^l(\varphi_n r) \\ & + D_{i4} B_1^k(\varphi_n r))] \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\varphi_n = \sqrt{\varphi_n^2 - \omega^2 \rho_i / G_i}$, $\Omega_i = \omega \sqrt{\rho_i / G_i}$ 。对于第2、3层, $D_{i1}=0$ 。由于剪切模量 G_i 是复数, 故 φ_n 也是复数, 因而解析表达式中既出现标准贝塞尔函数又出现修正贝塞尔函数。

将式(26)代入式(2)可得出应力 $\sigma_{\varphi i}$ 和 $\sigma_{\varphi i}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi i} = & G_i \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial x} = G_i \sin(\omega t + \theta) [(e^{j\Omega_i x} \\ & + e^{-j\Omega_i x}) j\Omega_i D_{i1} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(\varphi_n x) (D_{i3} B_1^l(\varphi_n r) \\ & + D_{i4} B_1^k(\varphi_n r))] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi i} = & G_i \left(\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} - \frac{U_{\varphi}}{r} \right) \\ = & G_i \sin(\omega t + \theta) \sin(\varphi_n x) \cdot \\ & \sum_{n=1}^{\infty} [D_{i3} \left(\frac{\partial B_1^l(\varphi_n r)}{\partial r} + \frac{B_1^l(\varphi_n r)}{r} \right) \\ & + D_{i4} \left(\frac{\partial B_1^k(\varphi_n r)}{\partial r} + \frac{B_1^k(\varphi_n r)}{r} \right)] \end{aligned} \quad (28)$$

如果镗杆的自由端受到下列式子表示的简谐转矩 $M_{\varphi}(t) = M_T \sin(\omega t + \theta)$ 的作用, 那么因为 $M_{\varphi}(t) = 2\pi \int_{r_i}^{r_k} \sigma_{\varphi i}(x=L) r^2 dr$, 由式(27)可以得到:

$$D_{11} = \frac{2M_T}{G_1 \pi (r_k^4 - r_i^4) j\Omega_1 (e^{j\Omega_1 L} + e^{-j\Omega_1 L})} \quad (29)$$

每一振型下的其余6个常数 D_{i3} 和 D_{i4} 可利用边界条件(7)、(8)、(9)求出。为使计算过程简化, 利用傅里叶级数展开:

$$\begin{aligned} e^{j\Omega_1 x} - e^{-j\Omega_1 x} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \\ & \cdot \frac{8Lj\Omega_1 (e^{j\Omega_1 L} + e^{-j\Omega_1 L})}{(2n-1)^2 \pi^2 - 4L^2 \Omega_1^2} \cdot \sin(\varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_{10_n} \sin(\varphi_n) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } D_{10_n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{8L\Omega_1 (e^{j\Omega_1 L} + e^{-j\Omega_1 L})}{(2n-1)^2 \pi^2 - 4L^2 \Omega_1^2}$$

引入下列函数:

$$\begin{aligned} I^l(\varphi_{1_n} r_m) &= \left[\frac{\partial B_1^l(\varphi_{1_n} r)}{\partial r} \right]_{r=r_m} - \frac{B_1^l(\varphi_{1_n} r_m)}{r_m} \\ K^l(\varphi_{1_n} r_m) &= \left[\frac{\partial B_1^k(\varphi_{1_n} r)}{\partial r} \right]_{r=r_m} - \frac{B_1^k(\varphi_{1_n} r_m)}{r_m} \end{aligned}$$

定义下列矩阵元素:

$$\begin{aligned} a_{11_n} &= B_1^l(\varphi_{1_n} r_k), \quad a_{12_n} = B_1^k(\varphi_{1_n} r_k), \quad a_{13_n} = B_1^l(\varphi_{2_n} r_k), \\ a_{14_n} &= B_1^k(\varphi_{2_n} r_k), \quad a_{23_n} = B_1^l(\varphi_{2_n} r_L), \quad a_{24_n} = B_1^k(\varphi_{2_n} r_L), \\ a_{25_n} &= B_1^l(\varphi_{3_n} r_L), \quad a_{26_n} = B_1^k(\varphi_{3_n} r_L), \quad a_{31_n} = I^l(\varphi_{1_n} r_i), \\ a_{32_n} &= K^l(\varphi_{1_n} r_i), \quad a_{41_n} = G_1 I^l(\varphi_{1_n} r_k), \quad a_{42_n} = G_1 K^l(\varphi_{1_n} r_k), \\ a_{43_n} &= G_2 I^l(\varphi_{2_n} r_k), \quad a_{44_n} = G_2 K^l(\varphi_{2_n} r_k), \quad a_{53_n} = G_2 I^l(\varphi_{2_n} r_L), \\ a_{54_n} &= G_2 K^l(\varphi_{2_n} r_L), \quad a_{55_n} = G_3 I^l(\varphi_{3_n} r_L), \quad a_{56_n} = G_3 K^l(\varphi_{3_n} r_L), \\ a_{65_n} &= I^l(\varphi_{3_n} r_a), \quad a_{66_n} = K^l(\varphi_{3_n} r_a), \end{aligned}$$

可将其余边界条件归纳为一个线性方程组:

$$[A_n] \{D_n\} = \{B_n\} \quad (30)$$

式中 $[A_n]$ 为 6×6 阶矩阵, $\{D_n\}$ 、 $\{B_n\}$ 为列向量:

$$[A_n] = \begin{bmatrix} a_{11_n} & a_{12_n} & -a_{13_n} & -a_{14_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23_n} & a_{24_n} & -a_{25_n} & -a_{26_n} \\ a_{31_n} & a_{32_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41_n} & a_{42_n} & -a_{43_n} & -a_{44_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53_n} & a_{54_n} & -a_{55_n} & -a_{56_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65_n} & a_{66_n} \end{bmatrix}$$

$$\{D_n\} = \{D_{13_n} \quad D_{14_n} \quad D_{23_n} \quad D_{24_n} \quad D_{33_n} \quad D_{34_n}\}^T$$

$$\{B_n\} = \{-D_{10_n} D_{11_n} r_k \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

解这个线性方程组可确定权系数 D_{i3} 和 D_{i4} , 代入有关表达式可计算 U_{φ} 、 σ_{φ} 、 σ_{φ} 以及扭转动柔度 φ/M_{φ} :

$$\frac{\varphi}{M_{\varphi}} = \frac{U_{\varphi}(r_k, L, \omega)}{M_{\varphi} \cdot r_k} \quad (31)$$

表 1 解析计算结果与有限元计算结果的比较

序号	类型	阻尼材料	解析计算结果		有限元计算结果	
			f/Hz	$\eta(\times 10^{-4})$	f/Hz	$\eta(\times 10^{-4})$
1	CL-A	Balcoflex42	2 584.7	6.78	2 580.7	5.97
2	CL-A	Epotuf Ep100+610	2 585.8	3.40	2582.6	3.26
3	CL-I	Balcoflex 42	2 618.3	3.62	2 597.1	5.72
4	CL-I	Epotuf Ep100+610	2 618.9	2.80	2 598.9	3.21

4 实例计算比较

对实际层复合阻尼镗杆在承受纯扭转动载荷时的动力特性作解析计算，并将所得结果与有限元计算结果和实际测试数据作比较，如表 1 和表 2 所示。

表 2 解析计算结果与测试结果的比较

序号	类型	解析计算结果		测试数据	
		f/Hz	$\eta(\times 10^{-4})$	f/Hz	$\eta(\times 10^{-4})$
1	内孔表面粘贴	624.1	2.77	623.7	2.7
2	外表面粘贴	676.3	5.16	677.5	4.6

表 1 有关的镗杆结构参数如下：

- (1) 基体和约束层材料：钢， $G=81\times 10^9\text{ N/m}^2$ ， $\eta=2.6\times 10^{-4}$ ， $\rho=7\,870\text{ kg/m}^3$ 。
- (2) 阻尼层材料：Balcoflex 42(100 : 50)， $G=1.46\times 10^8\text{ N/m}^2$ ， $\eta=0.92$ ， $\rho=1\,117\text{ kg/m}^3$ ；Epotuf Ep100+610： $G=1.55\times 10^8\text{ N/m}^2$ ， $\eta=0.17$ ， $\rho=1\,089\text{ kg/m}^3$ 。
- (3) 结构尺寸： $L=305\text{ mm}$ ；外表面粘贴 (CL-A)： $r_i=8\text{ mm}$ ， $r_k=14\text{ mm}$ ， $r_l=15\text{ mm}$ ， $r_a=16\text{ mm}$ ；内孔表面粘贴 (CL-I)： $r_i=8\text{ mm}$ ， $r_k=9\text{ mm}$ ， $r_l=10\text{ mm}$ ， $r_a=16\text{ mm}$ 。

表 2 有关的镗杆结构参数如下：

- (1) 基体和约束层材料：钢， $E=210\times 10^9\text{ N/m}^2$ ， $\rho=7\,870\text{ kg/m}^3$ ， $\eta=0.000\,26$ (测量数据)。
- (2) 阻尼层材料：Biresin U1316， $G=1.47\times 10^8\text{ N/m}^2$ ， $\rho=965\text{ kg/m}^3$ ， $\eta=0.02$ 。
- (3) 结构尺寸：内孔表面粘贴： $r_i=6\text{ mm}$ ，

$r_k=7\text{ mm}$ ， $r_l=8\text{ mm}$ ， $r_a=16\text{ mm}$ ， $L=500\text{ mm}$ ；
外表面粘贴： $r_i=8\text{ mm}$ ， $r_k=16\text{ mm}$ ， $r_l=17\text{ mm}$ ， $r_a=18\text{ mm}$ ， $L=500\text{ mm}$ 。

从表 1 和表 2 可以看出，解析计算结果与有限元计算结果和实际测试数据基本一致。因此，利用解析计算预估层复合阻尼镗杆的动态特性具有足够的精度。

5 结论

- (1) 层复合阻尼镗杆的动力学分析，仍适合应用弹性力学基本理论建模。但由于运动微分方程耦联，一般难于求出解析解。对于承受纯扭转动载荷的特殊情况，经适当简化，可求出一般解析解。
- (2) 承受纯扭转动载荷情况的解析计算结果与有限元计算结果和实际测试数据基本一致。因此，解析计算可应用于设计阻尼镗杆时预估镗杆动态特性。
- (3) 计算结果比较也说明用有限元法计算层复合阻尼镗杆的动态特性有足够的精度。在承受弯曲动载荷情况，可以采用有限元法估计阻尼镗杆的动态特性。

参考文献

1 戴德沛. 阻尼技术的工程应用. 北京: 清华大学出版社, 1991.
2 Dual J. Mechanik der Verbundwerkstoffe, Vorlesung an der ETH Zürich, Institut für Mechanik, WS91/92.