

矿柱优化设计的随机介质方法^①

张家生 刘宝琛

(冶金工业部长沙矿冶研究院, 长沙 410012)

摘 要 以随机介质理论为基础, 探讨了在满足地表移动及变形限制条件下的矿柱优化设计方法, 并编制了相应的计算机程序(POOP), 同时给出了利用计算机程序进行矿柱优化设计的计算实例。

关键词 随机介质理论 矿柱优化设计

在实际采矿工程中, 通常开采范围较大而开采深度有限, 故开采的影响一般能发展到地表, 波及到上覆岩层内与地表上的一些与人类生产和生活有密切关系的对象, 如铁路、公路、房屋和管道等, 从而使工农业生产不能正常进行, 人们的安全得不到保护。因此必须采取措施进行防护, 以减小或者完全避免地下开采的有害影响, 通常采取的措施有两种: (1) 选择一种新的、地表沉降系数小的采矿方法; (2) 留下保安矿柱。

留设保安矿柱虽然是保护岩层内部和地面建筑物、构筑物免受开采影响的一种比较可靠的方法, 但也存在下述缺点: 一部分矿体留在地下暂时或永远不能采出, 造成资源的损失, 缩短矿井服务年限。由于这些缺点, 人们迫切需要对矿柱进行优化, 即在保护地表或岩层中重要对象的同时又能最大限度的开采出地下资源。本文研究的目的是根据地表建筑物的保护要求, 对矿柱进行优化, 使资源损失最小。

1 矿柱优化的基本原理

矿柱优化就是要在满足保护对象的保护要求下, 使留设的保安矿柱价值最小。通常保护对象的保护要求是以地表移动及变形给出的。即保护对象所处地表的移动及变形满足一定的

约束条件, 其形式为:

$$\begin{cases} |W_i| \leq W^* \\ |E_i| \leq E^* \\ |T_i| \leq T^* \\ |K_i| \leq K^* \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 W_i, E_i, T_i, K_i 为地表移动及变形值, W^*, E^*, T^*, K^* 为地表允许移动及变形值, 是由地面保护对象的保护等级以及其可以损害的程度而确定的。

设矿柱的平面形状为梯形, 如图 1 所示, 那么, 其体积为:

$$V = \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_1x_1+C_1}^{B_2x_1+C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2)$$

其中 $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ 是由矿体赋存情况所决定的。 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 是由矿体保安矿柱平面形状所确定的。所以目标函数(保安矿柱价值)为:

$$\begin{aligned} F(X) &= V \cdot V_u \\ &= B_u^* \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_1x_1+C_1}^{B_2x_1+C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (3)$$

其中 V_u 为矿柱体价格(元/米³)。

地表的移动及变形的确定方法如下: 见图 2, 在可采区域为 Ω 内保留矿柱 Ω_1 的情况下地表移动及变形为:

$$F = \iiint_{\Omega-\Omega_1} F_c dx_1 dx_2 dx_3$$

① 收稿日期: 1994-03-16; 修稿日期: 1995-04-19

$$= \int \int \int_{\Omega} F_e dx_1 dx_2 dx_3 - \int \int \int_{\Omega_1} F_e dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4)$$

其中 $F = \{W, E, T, K\}$

$F_e = \{W_e, E_e, T_e, K_e\}$

式中 W_e, E_e, T_e, K_e 为单位开采条件下地表移动及变形。

由于(4)式中的第一项为一常数, 设之为 F_1 , 则地表移动及变形可写为:

$$F = F_1 - \int \int \int_{\Omega_1} F_e dx_1 dx_2 dx_3 \quad (5)$$

当开采区域的平面形状为全平面时, 可以取其长, 宽均足够大(如, $8R$) 的范围作为 Ω 。根据矿柱形状假设为梯形的条件, (5) 式可写为:

$$F = F_1 - \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_2 x_1 + C_1}^{B_2 x_1 + C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} F_2(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6)$$

有了地表移动及变形, 可将约束条件(1) 写为:

$$g(X) = F^* - |F| \geq 0 \quad (7)$$

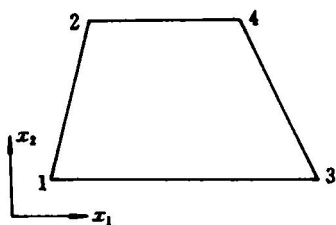


图1 矿柱平面形状图

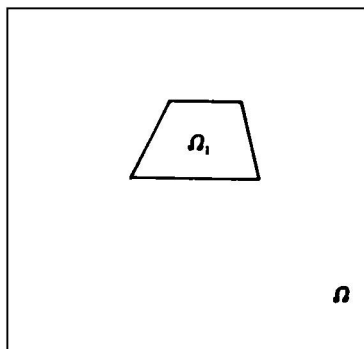


图2 可采区域 Ω 及保留矿柱 Ω_1 关系图

其中 $F^* = \{W^*, E^*, T^*, K^*\}$, 这样矿柱优化问题就变成一个有约束优化的数学问题, 即:
$$\begin{cases} \min F(X) \\ g(X) \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\{X\} = \{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$

当解决了问题(8), 求出了 $\{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$ 后即求确定矿柱的平面形状。

有时对矿柱边界还有要求, 如 $X_i - X_i^* \geq 0$ ($= 0$), 其中 X_i^* 为对 X_i 的限制值, 则原问题将变成:

$$\begin{cases} \min F(X) \\ h(X) = 0 \\ g(X) \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

以上推导仅针对地表面某个单点而进行的, 一般情况下, 对地面保护对象来讲, 需要对地面多个点移动及变形限制且要在多层矿体中留设矿柱, 故原问题将可写为:

$$\begin{cases} \min F(X) \\ h_i(X) = 0 & i = 1, 2, \dots, M \\ g_j(X) \geq 0 & j = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (10)$$

这就是矿柱优化的数学模型, 下面将讨论该模型的数学计算方法。

2 优化分析的基本方法

对有约束的优化问题

$$\begin{cases} \min F(X) \\ h_i(X) = 0 & i = 1, 2, \dots, M \\ g_j(X) \geq 0 & j = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (1)$$

对等式约束 $h_i(X) = 0$, 在本实际问题中, 由于其形式简单, 为 $X_i = X_i^*$, 此时可以将 X_i 不作为变量而做为参数进行优化计算。故在以后的讨论中不考虑 $h_i(X) = 0$ 的约束。

对于问题 I 可以写成:

$$\begin{cases} \min f(X) & X \in R \subset E^n \\ R = \{X | g_j(X) \geq 0 & j = 1, 2, \dots, L\} \end{cases} \quad (1')$$

现取一充分大的数 $M > 0$, 构成障碍函数

$$P(X, M) = f(X) + M \sum_{j=1}^L \psi(g_j(X)) \quad (11)$$

或 $P(X, M) = f(X) +$

$$M \sum_{j=1}^L [\min(0, g_j(X))]^2 \quad (12)$$

从而可使 $\min P(X, M)$ 的解 $X(M)$ 是原问题的极小解或近似极小解, 这样使原问题 (I) 或 (I') 即可转化无约束优化问题

$$\min P(X, M) \quad (\text{II})$$

函数 $P(X, M)$ 称为惩罚函数, 其中第二项 $M \sum_{j=1}^L \varphi(g_j(X))$ 称为惩罚项, M 称为惩罚因子。

对于某一惩罚因子 M_k 来说, 如果 (II) 的解 $X(M_k) \in R$, 就加大惩罚因子 M 的值, 随着 M 的增加, 当

$$0 < M_1 < M_2 < \dots < M_k < \dots \quad (13)$$

趋于无穷大时, 问题 (II) 的解 $X(M_k)$ 就可从可行域 R 外部趋于原问题 (I) 的极小点 $X_{\min}$ 。

3 目标函数与约束函数及其梯度的计算

(1) 目标函数

目标函数就是矿柱 Ω_1 的矿体价值, 矿柱 Ω_1 的体积为:

$$V = \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_1 x_1 + C_1}^{B_2 x_1 + C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 dx_3$$

矿柱的价值为:

$$F(X) = V_u V$$

$$= V_u \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_1 x_1 + C_1}^{B_2 x_1 + C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (14)$$

其中 V_u 为矿体价格 (单位体积矿体的价值, 元 / 米³);

$$\{X\} = \{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$$

(2) 目标函数的梯度

根据 (14) 式即可求出 $\frac{\partial F(X)}{\partial X}$, 即

$$\left\{ \frac{\partial F(X)}{\partial A_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial A_2}, \frac{\partial F(X)}{\partial B_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial B_2}, \frac{\partial F(X)}{\partial C_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial C_2} \right\}$$

(3) 约束函数及其导数

对地表某一点的移动及变形约束为四个, 即:

$$\begin{cases} W^* - W \geq 0 \\ E^* - |E| \geq 0 \\ T^* - |T| \geq 0 \\ K^* - |K| \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

其中 W^*, E^*, T^*, K^* 为根据地表保护对象的要求而确定的地表移动及变形允许值。而 E, T, K 均是指地变形中的主变形, 故必须先求出 $E_x, E_y, E_{xy}, T_x, T_y, K_x, K_{xy}$ 各变形分量, 而后方可确定约束函数。根据各变形分量, 其主变形分别为:

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [E_x + E_y \pm \sqrt{(E_x - E_y)^2 + E_{xy}^2}] \quad (16)$$

$$T_{\max} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{K_x + K_y \pm \sqrt{(K_x - K_y)^2 + 4K_{xy}^2}\} \quad (18)$$

根据 (16) 至 (18) 式, 针对各主变形的具体情况, 即可写出

$$g_i(X), \frac{\partial g_i(X)}{\partial X} \quad (i = 1, 4) \quad (\text{推导从略})$$

要确定约束函数及其导数, 首先应求出 9 个位移及变形分量 $W, E_x, E_y, E_{xy}, T_x, T_y, K_x, K_y, K_{xy}$ 以及 9 个位移及变形分量的导数: $\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial E_x}{\partial X}, \frac{\partial E_y}{\partial X}, \frac{\partial E_{xy}}{\partial X}, \frac{\partial T_x}{\partial X}, \frac{\partial T_y}{\partial X}, \frac{\partial K_x}{\partial X}, \frac{\partial K_y}{\partial X}, \frac{\partial K_{xy}}{\partial X}$, 而后即可确定约束函数及其导数。

(4) 各位移及变形分量及其梯度的确定

根据图 2 和 (5) 式, 各位移及变形分量为:

$$\begin{aligned} F &= F_1 - \int \int \int_{\Omega} F_e dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= F_1 - \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_1 x_1 + C_1}^{B_2 x_1 + C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} F_e(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $F = \{W, E_x, E_y, E_{xy}, T_x, T_y, K_x, K_y, K_{xy}\}$; $F_e = \{W_e, E_{ex}, E_{ey}, E_{exy}, T_{ex}, T_{ey}, K_{ex}, K_{ey}, K_{exy}\}$

根据 (19) 式, 即可得出各位移及变形分量的梯度 $\frac{\partial F}{\partial X}$, 即

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial A_1}, \frac{\partial F}{\partial A_2}, \frac{\partial F}{\partial B_1}, \frac{\partial F}{\partial B_2}, \frac{\partial F}{\partial C_1}, \frac{\partial F}{\partial C_2} \right\}$$

(5) 惩罚函数及其梯度

在优化计算中, 采用外点法进行计算, 即矿柱的初始形状大小不满足约束要求。所以惩罚函数为:

$$P(X, M) = f(X) + M \sum_{j=1}^l [\min(0, g_j(X))]^2 \quad (12)$$

其梯度为:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial f(X)}{\partial X} + 2M \sum_{j=1}^l [\min(0, g_j(X))] \frac{\partial g_j(X)}{\partial X} \quad (20)$$

4 矿柱优化计算机程序

矿柱优化计算、事实上就是求解有约束优化问题。本文采用惩罚函数法进行计算, 其计算程序框图如图3所示。

程序说明:

(1) 由于地表移动及变形为:

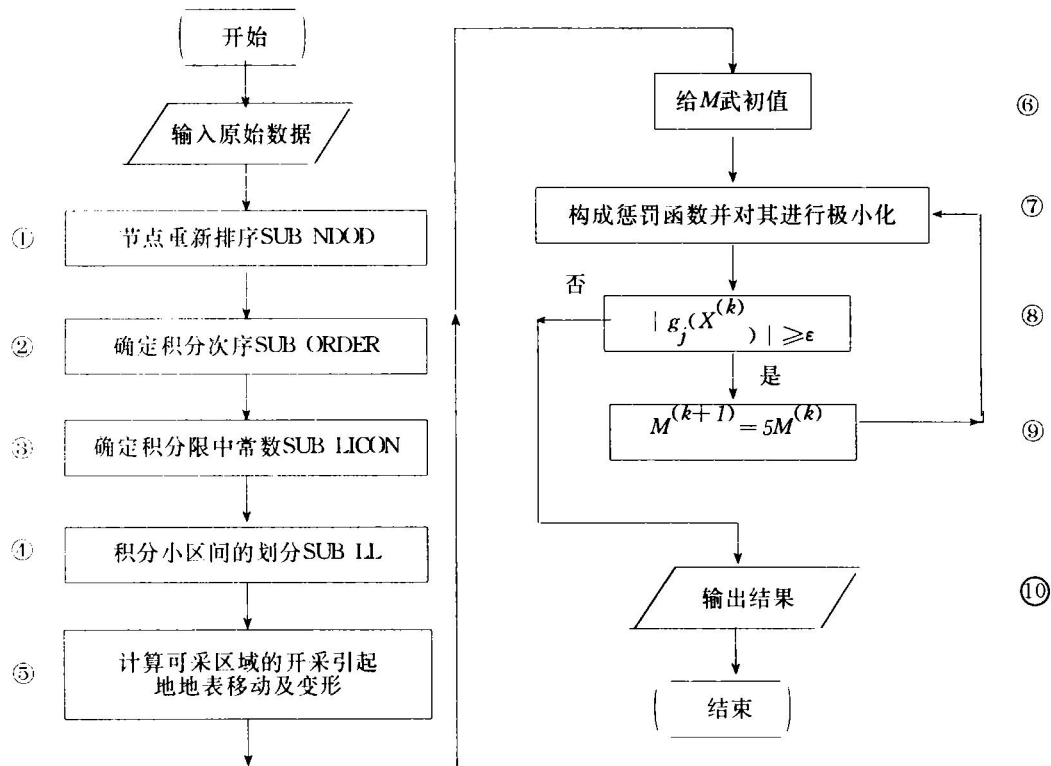


图3 矿柱优化计算框图

$$F = \int \int \int_{\Omega} F_c dx_1 dx_2 dx_3 - \int_{A_1}^{A_2} \int_{B_1 x_1 + C_1}^{B_2 x_1 + C_2} \int_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} F_c dx_1 dx_2 dx_3$$

程序①~⑤是确定 $\int \int \int_{\Omega} F_c dx_1 dx_2 dx_3$ 以及 $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ 中的常数。

(2) 程序⑥中给 M^0 赋 0.1 或 1

(3) 程序⑦中使用的核心程序为无约束优化中的变尺度方法程序(DFP)。

(4) 程序⑧中判断是否极小点的判据亦可使用下面的式子: $|X^{(k)} - X^{(k-1)}| \leq \epsilon$

(5) 程序⑨中, 改变 M 值时亦可为 $M^{(k+1)} = 10M^{(k)}$

5 实例分析

利用已建立的矿柱优化方法以及相应的电算程序, 分析计算了几个矿柱优化计算实例。地表移动基本参数为: $\text{tg}\beta_1 = \text{tg}\beta_2 = 1.0$, $\eta =$

0.8, $\theta = 0.0$, $b_1 = b_2 = 0.4$ 。现将一个分析实例计算结果介绍如下:

矿体赋存条件: I 号矿体: 厚度为 5.0m, 埋藏深度 100.0m。水平矿体; II 号矿体: 厚度为 5.0m, 埋藏深度为 200.0m, 水平矿体。两

层矿体价格相等, 取 1.0。
地表保护等级为 I 级, 即地表允许变形为:
 $E \leq 3.0\text{mm/m}$, $T \leq 5.0\text{mm/m}$, $K \leq 83 \times 10^{-6}/\text{m}$, 计算结果见图 4 及表 1。

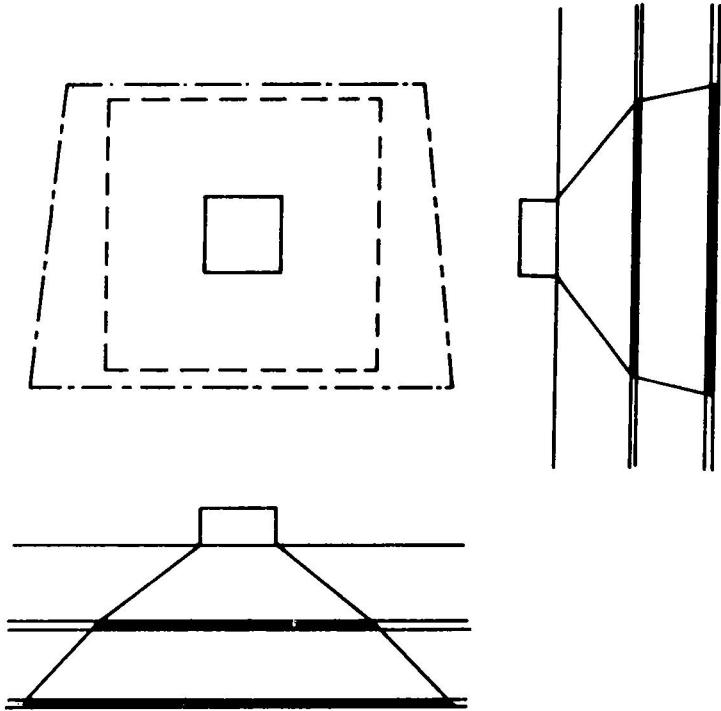


图 4 实例分析结果

附表 矿柱优化计算结果

矿柱平面形状(xoy)					地表移动及变形									
矿柱角点	I 号矿体		II 号矿体		地面点号	x	y	z	W/mm	E_1 /mm · m ⁻¹	E_2 /mm · m ⁻¹	K /10 ⁻⁶ · m ⁻¹	T /mm · m ⁻¹	备注
	x	y	x	y										
1	324.5	237.2	311.0	269.6	1	450.0	450.0	0.0	217.55	0.253	0.218	0.01	5.020	
2	677.2	341.3	695.5	232.3	2	450.0	550.0	0.0	215.77	0.254	0.218	0.01	5.000	
3	324.5	674.3	311.0	732.8	3	550.0	450.0	0.0	186.22	0.253	0.220	0.01	4.292	
4	677.2	647.7	695.5	774.8	4	550.0	550.0	0.0	189.24	0.255	0.220	0.01	4.487	

6 结语

由于在矿柱优化设计时采用了严密的数学优化方法, 克服了以往仅凭经验进行矿柱设计的种种不足。本文介绍的方法对于指导矿山生产及设计具有极其重要的意义。

参考文献

1 Litwiniszyn J. Colliery Eng, 1965, 10.
2 刘宝琛, 廖国华(著). 煤矿地表移动的基本规律. 北京: 中国工业出版社, 1965.
3 Budryk W. Przegląd Gór, 1952, (7, 8).
4 叶庆凯, 王肇明. 优化与最优控制中的计算方法. 北京: 科学出版社, 1986.