

金属连续挤压的应力和温度

(I) 基本理论^①

彭岳林

(中南工业大学应用数学系, 长沙 410083)

黄宪曾

(中南工业大学机械系, 长沙 410083)

摘 要 从动量定理、动量矩定理和能量守恒定律出发, 导出了金属连续挤压的应力和温度微分方程; 由材料力学、弹性力学和塑性力学给出定解条件, 求出应力和温度微分方程的解析解, 为连续挤压(CONFORM)的正确分析和设备改进提供了理论基础。

关键词 连续挤压 应力 温度 控制方程及定解条件 解析解

1 金属连续挤压和连续挤压机

现行金属连续挤压方法是英国原子能局的 Springfields 研究所 Green D 提出并开发成功的新型金属无切削特种加工技术^[1], 其特点是由旋转运动的金属坯料本身的一部分作为挤压轴, 利用摩擦力作为驱动力和对坯料加热, 连续生产具有严格公差和性能均匀的无限长金属线、棒、管和其它各种截面形状的型材。这种方法几乎无压余和切头切尾量, 材料利用率极高; 大大缩短了工序和几乎消除了非生产时间, 生产率极高; 通常金属加工中的有害摩擦得到了有效利用并取消了中间加热, 能量利用率极高。

连续挤压已在世界范围内用于铝中小型材及电缆包复工业生产。据文献[2]数据, C500H 型连续挤压机转速 25 r/min, 每小时挤压 d 25 mm 铝杆 2 t, 尺寸精度和表面光洁度较常规挤压高, 耗能仅常规挤压的 1/3, 材料利用率由一般金属切削加工的 42% 提高到 98.5%, 非挤压时间由常规挤压的 30%~70% 减少到几乎为零; 在相同产品相同年产量时, C400H 型连续挤压机与 1600T 常规挤压机比较, 吨产品设备投资减少 49.82%, 吨产品生产费用减少 52.17%。

现行金属连续挤压生产由图 1 所示连续挤压机实现。连续挤压机的挤压轮是轮缘具有凹进沟槽并由驱动轴带动匀速旋转的钢轮, 固定不动的挤压靴有凸起的圆弧形槽封块插入挤压靴的凹槽中, 这样形成一个与常规挤压不同的、部分壁旋转运动部分壁固定不动的挤压型腔。在挤压型腔的出口端固定有堵头和横向出口的挤压模。金属坯杆在压轮处发生弯曲变形后, 摩擦力使其附着挤压轮一起旋转, 其应力和温度不断变化, 并推挤先期进入挤压腔的坯杆, 使它受到强烈挤压和剪切作用。由于温度升高, 材料的流动应力降低, 若堵头和挤压模的位置选择适当, 坯料在挤压模口附近屈服并沿挤压模孔流出, 经冷却后成为具挤压模口截面形状的无限长金属制品。

连续挤压过程中坯料应力和温度变化规律的分析对连续挤压生产具有基础性的意义。也许是因为这种新的加工方法问世的历史还不够长, 人们正忙于开发产品, 至今很少见到有关基础理论研究的报道。有影响的是 Tirosh J 等人^[3]于 1979 年提出的分析, 他们认为坯料横截面正应力 σ 满

^① 收稿日期: 1994-10-20; 修回日期: 1995-04-07

足方程:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 2\mu p R_w / R_i \quad (1)$$

式中 μ 为有效摩擦系数, 即:

$$\mu = (1 - S)\mu_w - S\mu_s$$

S 是坯料压在槽封块上的周长部分, μ_w 和 μ_s 是坯料与挤压轮及槽封块接触界面上的摩擦系数, R_w 和 R_i 是挤压轮和坯杆的半径。

式(1)以及由它导出的应力变化规律一直为人们所袭用。但是, Tirosh 等人是由图 2 所示力分析得到(1)式的。对图 2 所示坯料质心 o 点取矩, 可知图 2 所示各力不满足动量矩定理; 而且, 在挤压轮半径方向坯料的长度变化是有限长度 $2R_i$, 不能当成无穷小长度来分析, 因此挤压靴对坯料的作用力不能认为是 $p + \frac{\partial p}{\partial r} dr$ 。这两点是致命的错误, 我们有必要对连续挤压的应力变化规律作新的讨论。

2 应力微分方程

考虑连续挤压的理想稳定状态, 此时, 经挤压作用的坯料仅在挤压模口处达到屈服极限发生塑性变形经挤压模口流出。

设坯料密度为 ρ , 由挤压轮带动以匀角速度 ω 无滑动旋转, 坯料横截面与挤压轮和槽封块接触界面的圆心角分别为 π 和 $\alpha\pi (\alpha < 1)$, 摩擦系数分别为 μ_1 和 μ_2 。在坯料接触界面上作用着均匀的正应力 p_1 、 p_2 和切应力 τ_1 、 τ_2 。坯料横截面上, 因对称性, 只考虑平均正应力 σ 和挤压轮半径方向的平均切应力 τ , 由摩擦定律

$$\tau_1 = \mu_1 p_1; \tau_2 = \mu_2 p_2 \quad (2)$$

记挤压轮和坯料的半径为 R 和 r , 并引入参数

$$k = R/r; \beta = \mu_2/\mu_1; \gamma = k + \frac{1 + \cos(\alpha\pi/2)}{2};$$

$$b = k/\mu_1; c = k\pi/2 - 1; \delta = \sqrt{b^2 + 4c}.$$

如图 3, 取距挤压轮中垂线角度为 φ 的小段坯料, 其圆心角为 $d\varphi$, 各面上应力和温度已在图中注明。

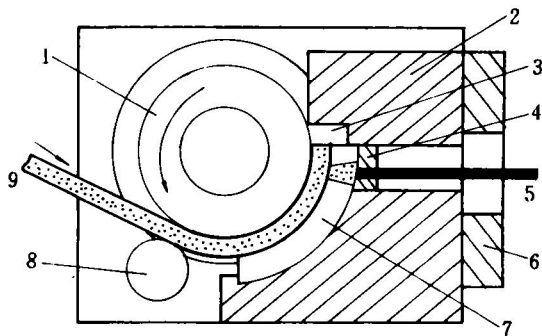


图 1 连续挤压机结构

- 1—挤压轮; 2—挤压靴;
3—堵头; 4—挤压模;
5—制品; 6—靴后压紧;
7—槽封块; 8—压轮; 9—坯杆

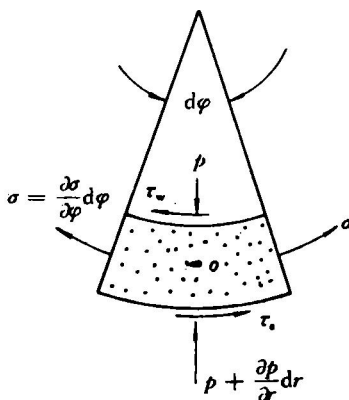


图 2 Tirosh 的受力图

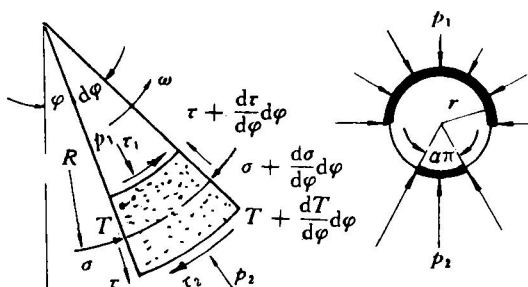


图 3 微元体的应力和温度

在挤压轮半径方向应用动量定理, 有

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^{\pi/2} p_1 r (R - \frac{r}{2}) \cos \theta d\theta d\varphi + 2 \int_0^{\pi/2} p_2 r [R + \frac{r(1 + \cos(\alpha\pi/2))}{2}] \cos \theta d\theta d\varphi - \tau \pi r^2 \cos \frac{d\varphi}{2} \\ & + (\tau + \frac{d\tau}{d\varphi}) \pi r^2 \cos \frac{d\varphi}{2} - \sigma \pi r^2 \sin \frac{d\varphi}{2} - (\sigma + \frac{d\sigma}{d\varphi}) \pi r^2 \sin \frac{d\varphi}{2} - \rho R \pi r^2 g \cos(\varphi + \frac{d\varphi}{2}) d\varphi \\ & = \rho R^2 \pi r^2 \omega d\varphi \end{aligned}$$

略去高阶小量, 得到:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \sigma + \rho \omega^2 R^2 + \rho R g \cos \varphi + \frac{2}{\pi} (k - \frac{1}{2}) p_1 - \frac{2\gamma}{\pi} \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) p_2 \quad (3)$$

式中 g 为重力加速度。

在挤压轮旋转方向应用动量定理, 有:

$$\begin{aligned} & \sigma \pi r^2 \cos \frac{d\varphi}{2} - (\sigma + \frac{d\sigma}{d\varphi}) \pi r^2 \cos \frac{d\varphi}{2} - \tau \pi r^2 \sin \frac{d\varphi}{2} - (\tau + \frac{d\tau}{d\varphi}) \pi r^2 \sin \frac{d\varphi}{2} \\ & + \tau_1 \pi r (R - \frac{r}{2}) d\varphi - \tau_2 \alpha \pi r [R + \frac{r(1 + \cos(\alpha\pi/2))}{2}] d\varphi - \rho R \pi r^2 g \sin(\varphi + \frac{d\varphi}{2}) d\varphi = 0 \end{aligned}$$

略去高阶小量, 得到:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = -\tau - \rho R g \sin \varphi + (k - \frac{1}{2}) \tau_1 - \alpha \gamma \tau_2 \quad (4)$$

对通过挤压轮中心的转轴应用动量矩定理, 有:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\pi/2} \tau_1 (R - \frac{r}{2}) (R - r \cos \theta) r d\theta d\varphi - 2 \int_0^{\pi/2} \tau_2 (R + r \cos \theta) [R + \frac{r(1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2})}{2}] r d\theta d\varphi \\ & + \sigma \pi r^2 R - (\sigma + \frac{d\sigma}{d\varphi}) \pi r^2 R = \rho \pi r^2 R^2 g \sin(\varphi + \frac{d\varphi}{2}) d\varphi \end{aligned}$$

略去高阶小量, 得到:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = (k - \frac{1}{2}) (1 - \frac{2}{k\pi}) \tau_1 - \gamma (\alpha + \frac{2}{k\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \tau_2 - \rho R g \sin \varphi \quad (5)$$

由(4)式和(5)式, 有:

$$\tau = \frac{2}{k\pi} (k - \frac{1}{2}) \tau_1 + \frac{2\gamma}{k\pi} \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \tau_2 \quad (6)$$

它也可直接对质心取矩得到。联立(2)、(3)、(4)、(6)各式, 消去 p_1 、 τ_1 和 τ_2 , 得到:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = b\tau + \sigma + \rho \omega^2 R^2 + \rho R g \cos \varphi - \frac{2\gamma(1 + \beta)}{\pi} \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) p_2 \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = c\tau - \rho R g \sin \varphi - \gamma (\alpha + \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \mu_2 p_2 \quad (8)$$

这是非齐次常系数线性常微分方程组, 可由经典的特征值方法求解, 不过我们还是分别微分并代入, 求出:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} - b \frac{d\sigma}{d\varphi} - c\sigma = c\rho \omega^2 R^2 + \rho R g [b \sin \varphi + (c - 1) \cos \varphi] + [k\alpha\beta + (\frac{2}{\pi} - k + \frac{2}{\pi}\beta) \sin \frac{\alpha\pi}{2}] \gamma p_2 \\ & - \gamma (\alpha + \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \mu_2 \frac{dp_2}{d\varphi} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d^2\tau}{d\varphi^2} - b \frac{d\tau}{d\varphi} - c\tau = -2\rho R g \sin \varphi - \frac{2\gamma(1 + \beta)}{\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \frac{dp_2}{d\varphi} - \gamma (\alpha + \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \mu_2 p_2 \quad (10)$$

它们就是连续挤压时坯料横截面平均应力的控制微分方程, 它们都是常系数二阶线性常微分方

程, 可以用线性迭加原理求解。

3 应力微分方程的解

首先考虑常系数齐次方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - b \frac{dy}{dx} - cy = 0 \quad (11)$$

其特征方程

$$\lambda^2 - b\lambda - c = 0$$

有两个不相等的实特征根。记

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\delta + b); \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\delta - b)$$

则 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 = \delta$; $\lambda_1 - \lambda_2 = b$; $\lambda_1 \lambda_2 = c$

而齐次方程(11)的基本解是 $e^{\lambda_1 x}$ 和 $e^{-\lambda_2 x}$ 。

再设常系数非齐次方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - b \frac{dy}{dx} - cy = A \sin x + B \cos x + D \quad (12)$$

有形如

$$y_1 = G \sin x + H \cos x + I$$

的特解, 微分 y_1 并代入(12)式, 比较系数, 有:

$$G = -\frac{(1+c)A + bB}{b^2 + (1+c)^2}; \quad H = \frac{bA - (1+c)B}{b^2 + (1+c)^2}; \quad I = -\frac{D}{c}$$

$$\text{记} \quad \cos \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}}; \quad \sin \theta_1 = \frac{1+c}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}}$$

则方程(12)有特解

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}} [A \cos(\theta_1 + x) - B \sin(\theta_1 + x)] - \frac{D}{c} \quad (13)$$

由于齐次方程(11)的基本解组的 Wronsky 行列式

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{-\lambda_2 x} \\ (e^{\lambda_1 x})' & (e^{-\lambda_2 x})' \end{vmatrix} = -\delta e^{bx}$$

不为零, 非齐次方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - b \frac{dy}{dx} - cy = A \frac{dp}{dx} + Bp \quad (14)$$

有特解

$$y_2 = -e^{\lambda_1 x} \int \frac{e^{-\lambda_2 x} (A \frac{dp}{dx} + Bp)}{W} dx + e^{-\lambda_2 x} \int \frac{e^{\lambda_1 x} (A \frac{dp}{dx} + Bp)}{W} dx$$

而由分部积分有:

$$\int \frac{e^{\lambda x} (A \frac{dp}{dx} + Bp)}{e^{bx}} dx = A p e^{(\lambda-b)x} + [B - (\lambda-b)A] \int e^{(\lambda-b)x} p dx$$

因此非齐次方程(14)有特解

$$y_2 = \frac{B + A\lambda_1}{\delta} e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} p dx - \frac{B - A\lambda_2}{\delta} e^{-\lambda_2 x} \int e^{\lambda_2 x} p dx \quad (15)$$

这样, 由迭加原理, 方程(9)和(10)的通解是:

$$\sigma = c_1 e^{\lambda_1 \varphi} + c_2 e^{-\lambda_2 \varphi} - \rho \omega^2 R^2 + \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{b^2 + (1+c)^2}} \rho R g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi) \\ + (s_1 - t_1 \lambda_1) e^{\lambda_1 \varphi} \int e^{-\lambda_1 \varphi} p_2 d\varphi - (s_1 + t_1 \lambda_2) e^{-\lambda_2 \varphi} \int e^{\lambda_2 \varphi} p_2 d\varphi \quad (16)$$

$$\tau = c_3 e^{\lambda_1 \varphi} + c_4 e^{-\lambda_2 \varphi} - \frac{2\rho R g}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}} \cos(\theta_1 + \varphi) \\ - (s_2 + t_2 \lambda_1) e^{\lambda_1 \varphi} \int e^{-\lambda_1 \varphi} p_2 d\varphi + (s_2 - t_2 \lambda_2) e^{-\lambda_2 \varphi} \int e^{\lambda_2 \varphi} p_2 d\varphi \quad (17)$$

式中

$$\sin \theta_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (1-c)^2}}; \quad \cos \theta_2 = \frac{1-c}{\sqrt{b^2 + (1-c)^2}}; \\ s_1 = [k\alpha\beta + (\frac{2}{\pi} - k + \frac{2}{\pi}\beta) \sin \frac{\alpha\pi}{2}] \gamma / \delta; \quad t_1 = \gamma(\alpha + \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \mu_2 / \delta \\ s_2 = t_1; \quad t_2 = 2\gamma(1 + \beta) \sin \frac{\alpha\pi}{2} / \pi \delta$$

若已知 $\varphi = \varphi_0$ 处的边值 σ_0 和 τ_0 , 应用(7)式和(8)式, 应力表达式(16)和(17)的积分常数是:

$$c_1 = \{ \lambda_2 (\sigma_0 + \rho \omega^2 R^2) + c\tau_0 - \rho R g [\sin \varphi_0 + \lambda_2 \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{b^2 + (1+c)^2}} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi_0) \\ + \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{b^2 + (1+c)^2}} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi_0)] \} e^{-\lambda_1 \varphi_0} / \delta - (s_1 - t_1 \lambda_1) \int e^{-\lambda_1 \varphi} p_2 d\varphi |_{\varphi=\varphi_0} \quad (18)$$

$$c_2 = \{ \lambda_1 (\sigma_0 + \rho \omega^2 R^2) - c\tau_0 + \rho R g [\sin \varphi_0 - \lambda_1 \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{b^2 + (1+c)^2}} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \varphi_0) \\ - \sqrt{\frac{b^2 + (1-c)^2}{b^2 + (1+c)^2}} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \varphi_0)] \} e^{\lambda_2 \varphi_0} / \delta + (s_1 + t_1 \lambda_2) \int e^{\lambda_2 \varphi} p_2 d\varphi |_{\varphi=\varphi_0} \quad (19)$$

$$c_3 = \{ \lambda_1 \tau_0 + \sigma_0 + \rho \omega^2 R^2 + \rho R g [\cos \varphi_0 + \frac{2\lambda_2}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}} \cos(\theta_1 + \varphi_0) \\ - \frac{2}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}} \sin(\theta_1 + \varphi_0)] \} e^{-\lambda_1 \varphi_0} / \delta + (s_2 + t_2 \lambda_1) \int e^{-\lambda_1 \varphi} p_2 d\varphi |_{\varphi=\varphi_0} \quad (20)$$

$$c_4 = \{ \lambda_2 \tau_0 - (\sigma_0 + \rho \omega^2 R^2) - \rho R g [\cos \varphi_0 - \frac{2\lambda_1}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}} \cos(\theta_1 + \varphi_0) \\ - \frac{2}{\sqrt{b^2 + (1+c)^2}} \sin(\theta_1 + \varphi_0)] \} e^{\lambda_2 \varphi_0} / \delta - (s_2 - t_2 \lambda_2) \int e^{\lambda_2 \varphi} p_2 d\varphi |_{\varphi=\varphi_0} \quad (21)$$

4 温度微分方程和应力边界条件

设坯料的比热为 c_0 , 坯料与槽封块之间的摩擦对坯料的加热效率为 η , 则由能量平衡式

$$\eta \tau_2 \alpha \pi r [R + \frac{r(1 + \cos \frac{2\pi}{2})}{2}] (R + r) d\varphi = J c_0 \rho \pi r^2 R d\varphi dT$$

得到坯料温度 T 的微分方程

$$\frac{dT}{d\varphi} = \frac{\eta\alpha}{\rho c_0 J} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(k + \frac{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{2}\right) \mu_2 p_2$$

式中 J 为热功当量。记挤压腔入口处的几何位置和温度为 φ_1 和 T_1 , 则几何位置为 φ_2 的挤压模口处的温度 T_2 可求出为:

$$T_2 = T_1 + \frac{\eta\alpha\mu_2}{\rho c_0 J} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(k + \frac{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{2}\right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_2 d\varphi \quad (22)$$

设计连续挤压机时, 应适当选择几何参数、力学参数和热力学参数, 使坯料应力增大和温度升高之间有良好的匹配, 比较理想的情况是恰好在挤压模口处, 材料达到温度升高到 T_2 时的剪切屈服应力 τ_s , 同时压应力也恰好达到克服坯料屈服后经挤压模孔道流出的沿程阻力和其它消耗所需的压力 σ_2 。因此, 挤压模口处的边界条件是:

$$\varphi = \varphi_2, \sigma = \sigma_2, \tau = \tau_s$$

由此可以按式(18)~(21)确定积分常数再由式(16)和(17)确定挤压腔内应力的变化。特别地, 挤压腔入口处的压力和剪力可以求出:

$$\varphi = \varphi_1, \sigma = \sigma_1, \tau = \tau_1$$

它们作为边值条件又可确定挤压腔入口到处到压轮这一段的应力变化并得到压轮处的应力

$$\varphi = \varphi_0, \sigma = \sigma_0, \tau = \tau_0$$

它们应和压轮处的作用应力相符。

5 小结

现行金属连续挤压机中, 材料经历四个不同的区域。第一个区域是压轮处, 材料应力达到屈服极限而弯曲; 第二个区域由压轮处到挤压腔入口处, 材料拉应力不断减少; 第三个区域是挤压腔内, 材料压应力和剪应力都不断增大, 温度也不断升高; 第四个区域是挤压模口处, 材料塑性流动。第一个区域和第四个区域的应力条件为第二个区域和第三个区域的应力求解提供了定解条件, 在这两个区域中, 应力变化是二阶线性常微分方程控制, 温度变化是一阶常微分方程控制。其解可由式(16)、(17)和(22)解析表出。因此, 我们可以适当选择连续挤压机的几何参数、力学参数和热力学参数, 把现行连续挤压技术向前推进, 不但努力实现对包括常用铜材和钢材在内的多种材料的连续挤压工业生产, 而且把连续挤压的生产率和能量节省科学地大幅度地提高到更先进的水平。

参考文献

- 1 Green D. J Institute of Metal, 1971, 76-99.
- 2 Church Fred L. Modern Metals, 1984, (11): 34-40.
- 3 Tirosh J, Grossman G, Gordon G. J of Eng for Ind, 1979, 101: 116-120.