变厚度悬臂矩形板的康托洛维奇法解①

林小松　戚跃然　刘锡军
（湘潭矿业学院建工系，湘潭 411201）

摘　要　首次用康氏法获得了变厚度悬臂板的挠度函数，从而扩大了康氏法的应用范围，所用的计算原则与步骤也同样适用于其他边界组合的变厚度矩形板。

关键词　变厚度矩形板　悬臂板　康托洛维奇法

根据文献[1]的方程(13－14)，变厚度矩形板的基本方程为：

$$D\nabla^4 w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + \nabla^2 D\nabla^2 w - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = q \tag{1}$$

方程(1)是关于挠度 w 的变系数偏微分方程，其中的变系数随着板厚的不同变化规律而具有不同的函数形式。由于是变系数，因而其求解相当困难。而对于悬臂板，由于其三个自由边界条件与两个自由角点条件的复杂性，给求解带来了更大的困难。本文用康氏法较简便地获得了变厚度悬臂板的挠度函数。因而为各种边界条件组合的变厚度矩形板探索了一条新的解题途径。

1　方程解法

设变厚度悬臂矩形板的坐标如图 1 所示，板面受均布荷载，集度为 q。根据最小势能原理，泛函为：

$$\Pi(w) = \int_0^a\int_{-b/2}^{b/2}\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\times\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \int_0^a\int_{-b/2}^{b/2} qw\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{2}$$

按照康氏法，我们选择的挠度函数可只满足固定边而不必满足自由边的边界条件，自由边的边界条件是按边界积分的形式满足的。

下面将研究板厚沿 x 方向线性变化的情况。设板厚的变化情况如图 2 所示，

并令　$\lambda = \dfrac{\Delta t}{t_0}$

则：

$$t = t_0 - \lambda\frac{x}{a}t_0 = t_0\left(1-\lambda\frac{x}{a}\right),$$

$$I = \frac{1}{12}bt^3 = \frac{1}{12}bt_0^3\left(1-\lambda\frac{x}{a}\right)^3,$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Et_0^3}{12(1-\nu^2)}\left(1-\lambda\frac{x}{a}\right)^3$$

其中　D— 薄板的弯曲刚度；E— 板材料的弹

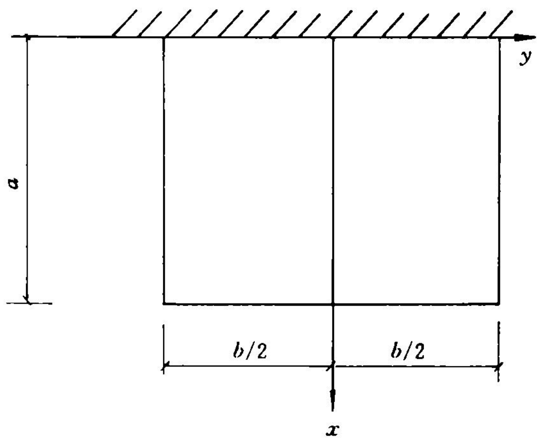

图 1　悬臂矩形板的座标设置

① 收稿日期：1994－12－27

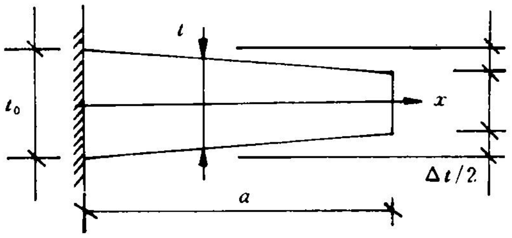

图 2 悬臂矩形板的剖面

性模量；ν— 板材料的泊松比；I— 板截面的转动惯量。

对于大多数工程中的板，λ 均是一个小量。若略去含因子 λ^2 及其以上幂的项，则易得到纵剖面与图 2 相同的悬臂梁的挠度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{4(1-\nu^2)b}\cdot\frac{q}{D_0}[(\frac{x^4}{6}-\frac{2}{3}ax^3+a^2x^2)+\frac{\lambda}{a}(\frac{3}{10}x^5-ax^4+a^2x^3)] \tag{3}$$

式中 $D_0=\dfrac{Et_0^3}{12(1-\nu^2)}$

设板的挠度函数具有形式：

$$w(x,y)=w_0(x)\cdot u(y) \tag{4}$$

并将 $w_0(x)$ 取为 $f(x)$ 的倍数，则显然能使 $w(x,y)$ 满足固支边的边界条件。为计算方便起见，将 $w_0(x)$ 取为：

$$w_0(x)=(5x^4-20ax^3+30a^2x^2)+\frac{\lambda}{a}(9x^5-30ax^4+30a^2x^3)$$

即：
$$w_0(x)=9\frac{\lambda}{a}x^5+(5-30\lambda)x^4-(20-30\lambda)ax^3+30a^2x^2$$

于是挠度函数(4)成为：

$$w(x,y)=[9\frac{\lambda}{a}x^5+(5-30\lambda)x^4-(20-30\lambda)ax^3+30a^2x^2]\cdot u(y) \tag{5}$$

将式(5)代入式(2)，对 x 积分并略去含 λ^2 及其更高次幂的项，得：

$$\Pi(u)=\frac{D_0a^5}{2}\int_{-b/2}^{b/2}[(720+360\lambda)u^2+2\nu(\frac{300}{7}+\frac{225}{14}\lambda)a^2uu''+(\frac{520}{9}-\frac{1616}{21}\lambda)a^4(u'')^2+\frac{2(1-\nu)}{7}(1\,800-1\,215\lambda)a^2(u')^2]\mathrm{d}y-q\int_{-b/2}^{b/2}(6+3\lambda)a^5u\mathrm{d}y \tag{6}$$

变分，并用分部积分整理，得：

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&\frac{D_6a^5}{2}\int_{-b/2}^{b/2}[(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^4u^{(4)}+(\frac{-7\,200+8\,400\nu}{7}+\frac{4\,860-4\,410\nu}{7}\lambda)a^2u''\\&+(1\,440+720\lambda)u-\frac{2q}{D_6}(6+3\lambda)\delta u\mathrm{d}y\\&+\frac{D_0}{2}[(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^9u''+\frac{\nu}{7}(600+225\lambda)a^7u]\delta u'\Big|_{-b/2}^{b/2}\\&+\frac{D_0}{2}[-(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^9u'''+(\frac{7\,200-7\,800\nu}{7}+\frac{-4\,860+4\,635\nu}{7}\lambda)\cdot a^7u']\delta u\Big|_{-b/2}^{b/2}\end{aligned} \tag{7}$$

欧拉方程为：

$$(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^4u^{(4)}+(\frac{-7\,200+8\,400\nu}{7}+\frac{4\,860-4\,410\nu}{7}\lambda)a^2u''+(1\,440+720\lambda)u-\frac{6q}{D_0}(2+\lambda)=0 \tag{8}$$

u 的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^2u''+\frac{\nu}{7}(600+225\lambda)u=0;\quad(y=\pm\frac{b}{2})\\&(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^2u'''-(\frac{7\,200-7\,800\nu}{7}+\frac{-4\,860+4\,635}{7}\lambda)u'=0;\\&(y=\pm\frac{b}{2})\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

方程(8)为非齐次常系数线性微分方程，其对应齐次方程的特征方程为：

$$(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda)a^4\rho^4+(\frac{-7\,200+8\,400\nu}{7}+\frac{4\,860-4\,410\upsilon}{7}\lambda)a^2\rho^2$$

$$+(1\,440+720\lambda)=0 \tag{10-a}$$

令：

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21} \\ B &= \frac{-7\,200+8\,400\nu}{7}+\frac{4\,860-4\,410\nu}{7}\lambda \\ C &= 1\,440+720\lambda \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

则方程(10-a)成为：

$$A(a\rho)^4+B(\rho a)^2+C=0 \tag{10}$$

易求得方程(10)的根为：

$$\rho=\pm\frac{1}{a}(\alpha\pm i\beta) \tag{12}$$

式(12)中：

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{\sqrt{AC}-B/2}{2A}\right]^{1/2} \\ \beta &= \left[\frac{\sqrt{AC}+B/2}{2A}\right]^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

于是，欧拉方程(8)的对应齐次方程的通解可写为：

$$u=\frac{q}{1\,20D_0}\left[A^*\operatorname{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a}+B^*\operatorname{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}\right. \\ \left.+C^*\operatorname{ch}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}+D^*\operatorname{sh}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a}\right] \tag{14}$$

将方程(8)的一个特解取为

$$\bar{u}=\frac{1}{120}\frac{q}{D_0} \tag{15}$$

迭加式(14)、(15)即得到欧拉方程(8)的通解：

$$u=\frac{q}{120D_0}\left[1+A^*\operatorname{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a}\right. \\ +B^*\operatorname{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}+C^*\operatorname{ch}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a} \\ \left.+D^*\operatorname{sh}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a}\right] \tag{16}$$

通解(16)中的积分常数 A^*，B^*，C^*，D^* 应由边界条件(9)确定。将通解(16)求导后代入式(9)，即得到关于 A^*，B^*，C^*，D^* 的代数方程组，由此可解得：

$$\left.\begin{aligned} A^* &= \frac{-S_2\nu(600+225\lambda)}{7(R_1S_2-R_2S_1)} \\ B^* &= \frac{S_1\nu(600+225\lambda)}{7(R_1S_2-R_2S_1)} \\ C^* &= D^*=0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式(17)中：

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \left(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda\right)\left[(\alpha^2-\beta^2)\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}-2\alpha\beta\operatorname{sh}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}\right] \\ &\quad +\nu\left(\frac{600}{7}+\frac{225}{7}\lambda\right)\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}; \\ R_2 &= \left(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda\right)\left[(\alpha^2-\beta^2)\operatorname{sh}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}+2\alpha\beta\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}\right] \\ &\quad +\nu\left(\frac{600}{7}+\frac{225}{7}\lambda\right)\operatorname{sh}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}; \\ S_1 &= \left(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda\right)\left[(\alpha^2-3\beta^2)\alpha\operatorname{sh}\frac{\alpha b}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}+\beta(\beta^2-3\alpha^2)\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}\right] \\ &\quad -\left(\frac{7\,200-7\,800\nu}{7}-\frac{4\,860-4\,635\nu}{7}\lambda\right)\left(\alpha\operatorname{sh}\frac{\alpha h}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}-\beta\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}\right); \\ S_2 &= \left(\frac{1\,040}{9}-\frac{3\,232}{21}\lambda\right)\left[\beta(3\alpha^2-\beta^2)\operatorname{sh}\frac{\alpha b}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}+\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}\right] \\ &\quad -\left(\frac{7\,200-7\,800\nu}{7}-\frac{4\,860-4\,635\nu}{7}\lambda\right)\cdot\left(\beta\operatorname{sh}\frac{\alpha h}{2a}\cos\frac{\beta b}{2a}+\alpha\operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2a}\sin\frac{\beta b}{2a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

将式(17)代入式(16)，并加以整理，得：

$$u=\frac{q}{56D_0}\frac{\nu(40+15\lambda)}{R_1S_2-R_2S_1}\left[\frac{7(R_1S_2-R_2S_1)}{\nu(600+225\lambda)}\right. \\ \left.-S_2\operatorname{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a}+S_1\operatorname{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}\right] \tag{19}$$

再将式(19)代入式(5)，即最终得到变厚度矩

形悬臂板的挠度函数表达式如下：

$$w(x, y) = \frac{\nu q}{56D_0} \frac{40 + 15\lambda}{R_1S_2 - R_2S_1}[9 \frac{\lambda}{a}x^5 + (5 - 30\lambda)x^4 - (20 - 30\lambda)x^3 + 30a^2x^2] \cdot [\frac{7(R_1S_2 - R_2S_1)}{\nu(600 + 225\lambda)} - S_2\mathrm{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a} + S_1\mathrm{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}] \tag{20}$$

根据式(20)，即可由板壳理论的公式求得板的各内力分量。例如对于悬臂板，工程中最关心的是自由边的挠度$(w)_{x=a}$和固定边的弯矩$(M_x)_{x=0}$，从式(20)可求得这二者的计算公式如下：

$$\left.\begin{aligned}(w)_{x=a} &= \frac{\nu q a^4}{56D_0} \frac{(40 + 15\lambda)(15 + 9\lambda)}{R_1S_2 - R_2S_1} \cdot [\frac{7(R_1S_2 - R_2S_1)}{\nu(600 + 225\lambda)} - S_2\mathrm{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a} + S_1\mathrm{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}];\\ (M_x)_{x=0} &= -\frac{75}{14}\nu q a^2 \frac{8 + 3\lambda}{R_1S_2 - R_2S_1} \cdot [\frac{7(R_1S_2 - R_2S_1)}{\nu(600 + 225\lambda)} - S_2\mathrm{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a} + S_1\mathrm{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}]\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

2 算例

$\lambda = \frac{\Delta t}{t} = 0.25$，方形板：$a = b$，$\nu = 1/3$

依次由公式(11)，(13)，(18)可计算得：

$A = 77.07937$，$B = -507.5$，$C = 1620$；

$\alpha = 1.984505$，$\beta = 0.8038661$；

$R_1 = 290.4400$，$R_2 = 476.8864$；

$S_1 = -972.5349$，$S_2 = -180.8332$

将已知数据与以上R_1，R_2，S_1，S_2值代入式(21)，经运算得：

$$(w)_{x=a} = (0.14375 + 0.001975203\mathrm{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a} - 0.01062279\mathrm{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}) \cdot \frac{qa^4}{D_0}$$

$$(M)_{x=0} = (-0.5 - 0.006858872\mathrm{ch}\frac{\alpha y}{a}\cos\frac{\beta y}{a} + 0.03694884\mathrm{sh}\frac{\alpha y}{a}\sin\frac{\beta y}{a}) \cdot qa^2$$

附表列出了以上 2 种量在一些点的值。

附表 $(w)_{x=a}$，$(M_x)_{x=0}$沿 y 方向的分布

y/a	0	0.125	0.25
$(w)_{x=a}/\frac{qa^4}{D_0}$	0.14573	0.14551	0.14483
$(M_x)_{x=0}/qa^2$	−0.50686	−0.50611	−0.50375

y/a	0.375	0.5
$(w)_{x=a}/\frac{qa^4}{D_0}$	0.14361	0.14170
$(M_x)_{x=0}/qa^2$	−0.49951	−0.49287

参考文献

1 徐芝纶. 弹性力学(下册). 北京：人民教育出版社，1979. 42−45.

2 钱伟长. 变分法及有限元(上册). 北京：科学出版社，1980，260−279.

3 张福范. 应用数学和力学. 1980，3(1)：349−362.

4 林小松，袁文伯. 应用数学和力学，1985，8(6)：735−745.