

冲锤-杆撞击反问题研究(I)^①

刘德顺

(湘潭矿业学院机械系, 湘潭 411201)

杨襄壁

(中南工业大学机械系, 长沙 410083)

摘要 首次提出了冲锤-杆撞击反问题概念, 论述了反问题的类型及其工程背景, 建立了冲锤-杆撞击离散化数学模型, 最后结合实例说明了冲锤-杆撞击反问题的一般求解原理。

关键词 撞击 反问题 应力波 系统设计

1 问题的提出

自本世纪五十年代末期以来, 世界各国学者结合工程实践, 对冲锤-杆撞击进行了大量的研究工作。用波动理论研究冲击式凿岩, 在理论和实践方面都有很大的进展。Fairhurst^[1,2]、Fischer^[3]、Dutta^[4]、Lundberg^[5]、赵统武^[6]、徐小荷^[7]等对冲锤-杆-岩石撞击系统进行了大量的理论与实验研究, 他们应用解析法、图解法和计算机技术研究冲锤-杆撞击系统在凿岩过程中应力波的性质和传输规律, 较系统地掌握了冲锤-杆撞击系统在冲击凿岩过程中的应力状态、不同形状冲锤产生的应力波及其对凿岩效率的影响, 这些研究成果对冲击式凿岩设备的设计起到了较好的指导作用。

然而, 综合分析各个时期冲锤-杆撞击研究工作, 就不难发现: 所有研究工作的核心无一例外地是冲锤-杆撞击的正问题, 即已知冲锤-杆撞击系统的材料性质和几何结构, 求解该系统的应力状态或系统输出的应力波。与此相对应, 称已知系统输出的应力波, 求解冲锤-杆撞击系统的性能和(或)结构参数为其反问题。冲锤-杆撞击反问题有两种类型, 一类反问题是根据实测的撞击系统的输出应力波, 求其描述产生该应力波的模型参数, 由于测量结果存在一定的随机性, 这类问题实质上是属于系

统辨识; 第二类反问题是, 针对撞击系统的工作对象, 如岩石, 确定一最佳的应力波形, 要求设计能产生该应力波形的冲锤, 这实质上是系统设计问题。

在六十年代, Fairhurst^[1]曾提出了在冲击凿岩中有利于能量传递的最优应力波形, 如何设计相应的冲锤一直是矿业机械设计理论中悬而未决的课题。显而易见, 冲锤-杆撞击系统反问题的提出和解决, 对冲击式凿岩设备和沉桩设备的设计具有非常重要的理论意义和实用价值。这里还需指出, 由于已有研究^[8]表明: 在用霍布金生装置(SHPB)进行材料动态性能测试中, 采用适当的应力波形加载可以消除材料的动态应力-应变曲线的 Pochhammer Chree 振荡。因此, 冲锤-杆撞击反问题的解决, 对材料动态性能测试中冲锤的改进具有直接指导意义。

2 数学模型

2.1 理论准备

根据应力波通过冲锤-杆撞击系统所遵循的动量守恒条件, 可以推导出单波使冲锤-杆撞击系统的截面积所受力必和其运动速度成正比, 其比例系数称为广义波阻, 即

$$p = mv \quad (1)$$

式中 p — 冲锤或杆受力值, 以压力为正, N;

① 国家自然科学基金资助课题 收稿日期: 1994-04-26; 修回日期: 1994-10-27

m —冲锤或杆的广义波阻(以下简称波阻), $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$; v —冲锤或杆中所考察的截面的运动速度, m/s 。

并且

$$m = \rho \cdot \alpha \cdot A \quad (2)$$

式中 ρ —冲锤或杆的密度, kg/m^3 ; α —纵波在冲锤或杆中的传播速度, m/s ; A —冲锤或杆中所考察截面的面积, m^2 。

由于冲锤或杆一般是等质的, 其波速和密度在各截面上可视为恒定, 故冲锤在其长度上的波阻变化取决于截面面积的变化。

研究表明^[7], 整体速度为 V 的冲锤与冲锤中同时传播有 $\pm \frac{1}{2}mV$ 的顺、逆两波相等效, 即可以认为在冲锤撞击的初始时刻, 冲锤的各个截面上都有以下两种波存在。

$$\begin{cases} p_k^0 = \frac{1}{2}m_k V \\ q_k^0 = -\frac{1}{2}m_k V \end{cases} \quad (3)$$

式中 p_k^0, q_k^0 —冲锤中 k 截面上初始顺、逆波, N ; m_k —冲锤中 k 截面的波阻, $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$; V —冲锤撞击速度, m/s 。

这样, 撞击问题就转化为波的透、反射问题。

2.2 离散化处理

设有某一形状的等质冲锤, 以速度为 V 撞击静止并可视无限长的杆, 在杆中产生一应力波, 如图1所示。

众所周知, 形状较复杂的冲锤-杆撞击系统的波动方程是不便用解析方法直接求解的, 通常的办法是将系统进行离散化处理。这里, 将长为 L 的冲锤均分为 n 个等长度段, 每段长 $\Delta L = L/n$, 并将各段依次编上 $1, 2, \dots, n$ 号,

设第 k 段的截面各为 A_k , 波阻 m_k ; 段内截面上受力 R_k 可以视作是顺、逆两波合成的结果。设顺、逆两波分别为 p_k, q_k , 故 $R_k = p_k + q_k$ 。因为杆假定为等径同质, 故杆中每个截面通过的波是相同的, 因而只需取一段来考察, 编号为 0 。根据无限长杆假设, 杆中无逆波 $q_0 = 0$ 。因此, 杆的顺波也就是系统所输出的应力波 $R_0 = p_0$, 当 ΔL 很小时, 可以认为每段内无面积、波阻变化, 所以段内各截面也无应力变化, 这样, 经离散化处理的撞击系统就可以由一组向量来表征:

$$\text{截面积向量 } A = (A_0, A_1, \dots, A_n)^T$$

$$\text{波阻向量 } m = (m_0, m_1, \dots, m_n)^T$$

$$\text{顺波向量 } p = (p_0, p_1, \dots, p_n)^T$$

$$\text{波阻向量 } q = (q_0, q_1, \dots, q_n)^T$$

2.3 数学描述

冲锤-杆撞击系统数学模型就是用数学方法描述系统的几何和物理向量 A, m 与系统受力状态向量 p, q 之间的关系。为此, 考察第 k 段中的顺、逆两波的变化规律, 设在撞击后的 t 时刻, 该段内的顺、逆两波分别为 p_k^t, q_k^t , 经历 $\Delta \tau = \Delta L/a$ 时间后, 即在 $t+1$ 时刻, 该段顺、逆两波变为

$$\begin{cases} P_k^{t+1} = u_k p_{k+1}^t + (1 - u_k) q_k^t \\ (k = 0, 1, \dots, n-1) \\ q_k^{t+1} = (u_{k-1} - 1) p_k^t + (2 - u_{k-1}) q_{k-1}^t \\ (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases} \quad (4)$$

式中 u_k —波从第 $k+1$ 段截面向第 k 段截面的透射系数, 并且

$$u_k = \frac{2m_k}{m_{k+1} + m_k} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5)$$

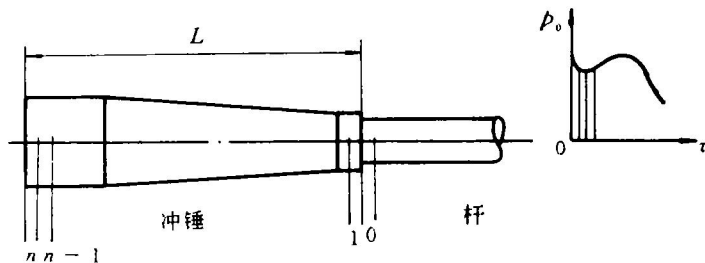


图1 冲锤-杆撞击系统

当冲锤和杆的材料相同时

$$u_k = \frac{2A_k}{A_{k+1} + A_k} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (6)$$

考虑到冲锤的非撞击端为自由端, 波阻可视为 0, 故 $p_{n+1}' = -q_n'$, 这样, 可以用矩阵形式来表示整个系统中各段的顺、逆两波为

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & u_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & u_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 1-u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-u_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}^t \quad (7a)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & u_0-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_1-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & u_{n-2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & u_{n-1}-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 2-u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2-u_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2-u_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}^t \quad (7b)$$

综合(7a), (7b)式, 并考虑到杆中无逆波 $q_0 = 0$, 即在综合矩阵中去掉其对应的列可得(8)式, 令(8)式中的 $2n+1$ 阶方阵为 G , 则(8)式可简化为

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^{t+1} = G \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^t \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & u_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 1-u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & u_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1-u_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 & \cdots & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1-1 & 0 & \cdots & 0 & 2-u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & u_{n-2}-1 & 0 & 0 & \cdots & 2-u_{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & u_{n-1}-1 & 0 & 0 & \cdots & 2-u_{n-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}^t \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^{t+1} = G \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^0 \quad (10)$$

根据(5)式, 将撞击等效关系(3)式变换为

$$\begin{aligned} p_k^0 &= -q_k^0 = (1/2)m_k V \\ &= (1/2)m_0 V \prod_{j=1}^k \frac{2-u_{j-1}}{u_{j-1}} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

杆初始为静止, 故

$$p_0^0 = 0 \quad (12)$$

将(11)、(12)两式代入(10)式并展开得(13)式, (10)、(13)式就是冲锤-杆撞击系统离散化数学模型。等式左边诸元素表征了系统的受力状态, 当撞击参数 m_0 和 V 一定时, 系统的受力状态完全取决于冲锤的几何形状。这是因为右边矩阵中的诸元素 $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, 是由冲锤各段的截面积 A 决定的。

当系统的几何形状向量 $A = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ 为已知时, 由(5)或(6)式能方便地求得系统模型中右边矩阵中的诸元素 $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ 的值。从而求得任一时刻系统中各处的受力状态。这也就是说冲锤-杆撞击正问题可以通过矩阵相乘运算而方便地解决。

当系统中某处的各时刻的受力状态为已知时, 一般多为杆的受力状态为已知, 即已知 $R_0 = (R_0^1, R_0^2, \dots, R_0^{2n})$ 时, 通过求解模型右边矩阵中的诸元素 $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$, 从而求得 A 向量中诸元素, 这就是冲锤-杆撞击反问题。

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}^{t+1} = \frac{m_0 V}{2} \begin{bmatrix} 0 & u_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 - u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots \\ 0 & u_0 - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & u_{n-1} - 1 & 0 & \cdots & 2 - u_{n-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (2 - u_0)/u_0 \\ \vdots \\ \prod_{j=1}^n \frac{2 - u_{j-1}}{u_{j-1}} \\ - (2 - u_0)/u_0 \\ \vdots \\ - \prod_{j=1}^n \frac{2 - u_{j-1}}{u_{j-1}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

3 实例求解

已知冲锤-杆撞击系统冲锤长 $L = 0.12 \text{ m}$, 冲击速度为 $V = 5 \text{ m/s}$, 冲锤材料的密度为 $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, 纵波速度 $a = 5000 \text{ m/s}$; 杆的波阻 $m_0 = 16 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$; 杆中受力状态变化如图2所示(即系统的输出)。求冲锤轮廓尺寸。

求解思路如下:

(1) 将已知的杆中波形离散化, 考虑到波的透反射规律, 取样的时间间隔为 $2\Delta\tau$ 。这里, 取 $n = 2$, 故 $2\Delta\tau = 2\Delta L/a = 24 \mu\text{s}$ 。取样开始时间为 $\Delta\tau = 12 \mu\text{s}$ 。这样, 就得到了杆中相应时刻的值, 即

$$\begin{aligned} p_0 &= (p_0^1, p_0^3) \\ &= (4 \times 10^4 \text{ N}, 4.8 \times 10^4 \text{ N}) \end{aligned}$$

(2) 逐步求解方程组。由系统数学模型(13)式可得方程组:

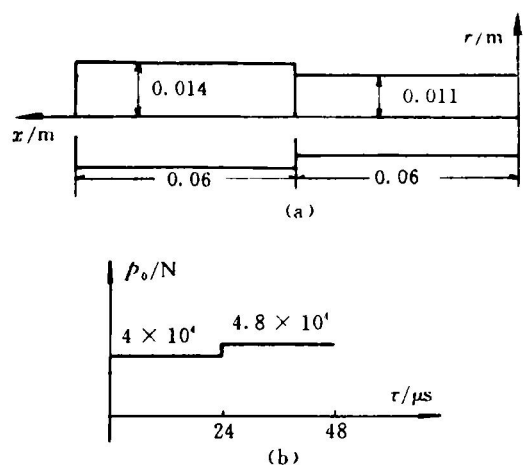


图2 冲锤轮廓(a)与杆中波形(b)

$$\begin{cases} p_0^1 = \frac{1}{2} m_0 V (2 - \mu_0) \\ p_0^3 = \frac{1}{2} m_0 V (2 - \mu_0) (2 - \mu_0) \\ \quad \cdot [(\mu_0 - 1)(1 - \mu_1) + (2 - \mu_1)] \end{cases}$$

逐步求解方程组可得

$$\mu = (\mu_0, \mu_1) = (1, 0.8)$$

(3) 递推求解轮廓尺寸: 由(5)式 $\mu_k = 2m_k/(m_{k+1} + m_k)$ ($k = 0, 1$) 得到 $m_1 = 16 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $m_2 = 24 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$; 由(2)式 $m = \rho \cdot a \cdot A$ 得到 $A_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_2 = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; 一般冲锤为回转体, 当第 k 段的截面积为 A_k 时, 则其半径 $r_k = (A_k/\pi)^{1/2}$, 由此可求得 $r_1 \approx 1.1 \times 10^{-2} \text{ m}$, $r_2 \approx 1.4 \times 10^{-2} \text{ m}$ (图2)。

由上可知, 冲锤-杆撞击反问题归结于求解 n 元方程组, 当要求输出的理想波形较复杂时, 在一定精度要求下, 系统分段必须更细, n 取较大值, 方程组就更庞大, 求解就变得较为复杂, 这时就必须寻求合适的求解方法借助于计算机进行, 这将在另文介绍。

参考文献

- 1 Fairhurst C A. Mine and Quarry Engineering, 1961, 27: 327-328.
- 2 Hustrulid W A, Fairhurst C A. Int Rock Mech Min Sci, 1972, 9: 417-449.
- 3 Fischer H C. Appl Scient Res, 1958, A8: 105-139; A9: 9-42.
- 4 Dutta P K. Int Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1968, 5(6): 501-518.
- 5 Lundberg B. Int Rock Mech. Min Sci & Geomech Abstr, 1973, 10: 381-399-401-419, 421-435.
- 6 赵统武. 金属学报, 1980, 16(2): 262-275.
- 7 徐小荷. 冲击凿岩理论基础与电算方法. 沈阳: 东北工学院出版社, 1986. 75-144.
- 8 李夕兵等. 爆破与冲击, 1993, 13: 125-130.