陀螺定向全面计时法中两种观测值的定权方法[①]

刘洪奇
(中南工业大学资源开发工程系，长沙 410083)

摘　要　先从理论上讨论了陀螺定向全面计时法中时间和分划板刻线读数两种观测值的定权问题，导出了定权公式。然后用两种模型对实验室、井下和野外的定向数据进行了平差计算。通过对计时精度的比较，验证了定权公式的可行性。

关键词　陀螺定向全面计明法　定权　平差公式

1　平差模型

高速旋转陀螺轴的摆动是按指数衰减的简谐运动，运动曲线见图1，运动方程如下：

$$\alpha(t) = B + A\{\sin(t - t_0)\frac{2\pi}{T}\}$$
$$\exp\{-\lambda(t - t_0)\} \qquad (1)$$

式中　t—陀螺轴摆动到某一位置的时间；$\alpha(t)$—时间陀螺轴位置在分划板上的格值读数；B—陀螺轴摆动平衡位置在分划板上的格值读数；A—摆动振幅；T—摆动周期；t_0—初始时间常数；λ—摆动衰减系数

全面计时法是一种非跟踪法。它通过测量

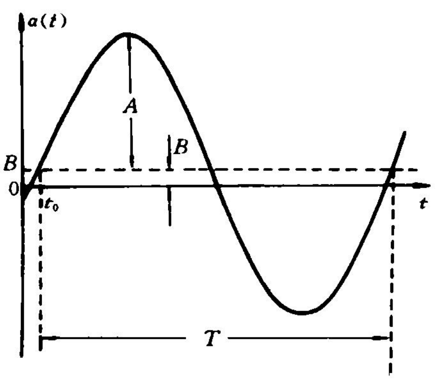

图1　陀螺轴运动曲线

陀螺光标经过分划板上大部分刻线或全部刻线的时间，同时读取摆幅，采用一定的平差模型对观测值数据处理，从而求得摆动的平衡位置。有下列三种平差模型：

Ⅰ 把时间作为有误差的观测值，而把分划板刻线读数看成没有误差；

Ⅱ 把分划板刻线读数作为有误差的观测值，而把时间读数看成没有误差；

Ⅲ 把时间和分划板刻线读数均看成有误差的观测值。

对中等精度仪器而言，模型Ⅰ采用较多。但模型Ⅲ把时间和分划板刻线读数均作含有误差的观测值，更加合乎实际情况，是一种较理想的平差模型，以下的讨论就在它的基础上进行。考虑到每一点处的线差总是与曲线垂直，见图2，对(1)式线性化，用附有未知数的条件平差来处理，由此获得模型Ⅲ的一般线性形式：

$$-v_{\alpha i} + v_{ti}\mathrm{tg}\beta_i + a_{i1}\delta t_0 + a_{i1}\delta T + a_{i3}\delta B$$
$$+ a_{i4}\delta A + a_{i5}\delta\lambda + \omega_i = 0 \qquad (2)$$

式中　$v_{\alpha i}$、v_{ti}—分别为观测值$\alpha(t_i)$、t_i的改正数；δt_0、δT、δB、δA、$\delta\lambda$—分别为各未知数近似值t_0^0、T^0、B^0、A^0、λ^0的改正数；ω_i—闭合

① 收稿日期：1993-10-09

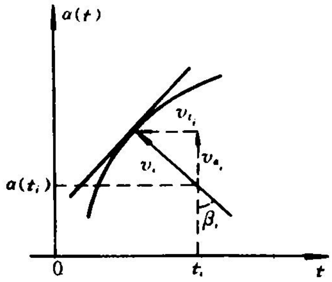

图 2　残差与曲线垂直

差，$\omega_i = \alpha_i^0 - \alpha(t_i)$，$\alpha_i^0$ 由 t_i 及各未知数近似值代入(1) 式求得

各系数 a_{ij} 用下列各式计算：

$$a_{i1} = -\frac{2\pi}{T^0}A^0C_i + \lambda^0A^0S_i$$

$$a_{i2} = -A^0\frac{2\pi(t_i - t_i^0)}{(T^0)^2}C_i$$

$$a_{i3} = 1$$

$$a_{i4} = S_i$$

$$a_{i5} = -A^0(t_i - t_0^0)S_i$$

$$S_i = \{\sin(t_i - t_0^0)\frac{2\pi}{T^0}\} \times \exp\{-\lambda^0(t_i - t_0)\}$$

$$C_i = \{\cos(t_i - t_0)\frac{2\pi}{T^0}\} \times \exp\{-\lambda^0(t_i - t_0)\}$$

$$\mathrm{tg}\beta_i = A^0(\frac{2\pi}{T^0}C_i - \lambda^0S_i)$$

2　观测值的定权方法

利用(2) 式进行平差时，涉及时间读数和分划板刻线读数两种观测值，况且不同刻线上的测时精度也不同，显然不能将全部观测值视为等权观测值，因此存在观测值定权问题。

分划板刻线读数存在误差，实际上是由于判断陀螺光标与分划板刻线重合存在的误差所引起的，亦即由测时误差所引起的。对(1) 式略去衰减影响后求微分得：

$$\mathrm{d}\alpha(t_i) = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t_i - t_0)\mathrm{d}t_i$$

设测定时间 t_i 的中误差为 m_{ti}，由此引起 $\alpha(t_i)$ 的中误差为 m_{ai}，由误差传定律得：

$$m_{a_i}^2 = \{\frac{2\pi A}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t_i - t_0)\}^2 m_{t_i}^2 \tag{3}$$

$$m_{a_i}^2 = m_{a_i}^2/\{\frac{2\pi A}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t_i - t_0)\}^2 \tag{3'}$$

根据劳耶劳夫斯(1950 年) 的描述，对于天文观测而言，瞄准误差与星体在穿过点的速度无关。假定在记量一个星体经过固定十字丝的时间和记量陀螺光标经过辅助分划板上固定刻线的时间有直接相似之处是合理的。因此，可以认为 m_{ai}^2 是一常数 σ_0^2。取 t_i 为摆动中心附近的“0” 刻线上测得的中天时间，则有

$\cos\frac{2\pi}{T}(t_i - t_0) \approx 1$，代入(3) 和(3)′ 两式得：

$$\sigma_0^2 = (\frac{2\pi A}{T})^2 m_0^2 \tag{4}$$

$$m_0^2 = \sigma_0^2/(\frac{2\pi A}{T})^2 \tag{4'}$$

式中　m_0 为测定“0” 刻线上中天时间的中误差。由(3)、(3)′、(4)、(4)′ 就可定出各观测值的权，取 m_0 为单位权中误差，由定权公式得：

$$P_{t_i} = \frac{m_0^2}{m_{t_i}^2} = \cos^2\frac{2\pi}{T}(t_i - t_0) \tag{5}$$

$$P_{\alpha(t_i)} = \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} = (\frac{T}{2\pi A})^2 \tag{6}$$

(5)、(6) 就是两种观测值的定权公式。由定权公式可以看出：通过“0” 刻线的时间观测值的权为 1(因为此时 $t_i - t_0 \approx T/2, T, \cdots$)；而计时最困难的逆转点上时间观测值的权为 0(因为此时 $t_i - t_0 = T/4, 3T/4, \cdots$)。这与计时的实际情况是相吻合的。有实际操作经验的观测人员都会有这样的感觉：只要摆幅适中，在“0” 刻线及其附近的刻线上，判断陀螺光标与刻线重合的精度最高，亦即测时精度高；而愈靠近逆转点，判断二者重合的精度就愈低，亦即测时精度愈低。分划板各刻线读数为等权观测值，但权不是 1，而加大为$(T/(2\pi A))^2$，这是由于分划刻线读数精度比测时精度高的缘故，这样定权是符合实际的。

3　对定权公式可行性的验证

根据实验室 31 测面全面计时法观测值，

野外 25 测面观测值和井下 14 测面观测值，分别按模型 Ⅰ 和模型 Ⅲ 进行平差。按模型 Ⅰ 平差时计算了两种情况：

(1) 将时间观测值当作等权观测值；

(2) 将时间观测值按(5) 式定权，即

$P(t_i) = \cos^2(2\pi/T)(t_i - t_0)$。

在各种观测条件下，每测面观测值经平差后可获得一单位权中误差 m_{o_i}，m_{o_i} 即为“0” 刻线上测量中天时间的中误差。对同一观测条件下各测面的单位权中误差按(7) 式加以综合，得出的综合中误差列于表 1。用这种综合中误差来表示“0” 刻线上的测时精度是比较合适的，它包含各测面的信息，具有较强的代表性。求综合中误差的公式如下：

$$m_{综} = \pm \sqrt{\frac{\sum m_{o_i}^2}{n}} \tag{7}$$

式中　$m_{综}$ — 综合中误差；n— 测面数。

表 1 中还列出了每一观测条件下由各测面所得独立周期值(由“0” 刻线的中天时间算得) 按白塞尔公式求得的一次测量周期的中误差 m_T 和由 m_T 按(8) 式求得的“0” 刻线上的测时中误差 m_0。$m_{综}$ 和 m_0 均代表“0” 刻线上的测时精度，可将二者作比较。

$$m_0 = \frac{m_T}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

从表 1 可以发现：用模型 Ⅰ 平差时，对时间观测值按(5) 式定权后求得的综合中误差明显要比将时间观测值看成等权观测值求得的综合中误差要小，后者更接近由周期求得的 m_0，因此用模型 Ⅰ 平差时，将时间观测值当作等精度观测值不合适，而应对其按(5) 式加权；用模型 Ⅲ 按(5)、(6) 式对观测值定权后求得的综合中误差最小，且与由周期求得的 m_0 接近，因此用模型 Ⅲ 按(5)、(6) 式对观测值定权后进行平差，能改善计算精度，这说明定权公式(5)、(6) 是可行的。

表 1　计时精度比较

精度比较		观测条件		
		实验室 31	野外 25	井下 14
Ⅰ	时间观测值取等权，$m_{综}$	$\pm 0\overset{s}{.}143$	± 0.197	± 0.172
	时间观测值按(5) 定权，$m_{综}$	$\pm 0\overset{s}{.}103$	± 0.150	± 0.144
Ⅲ	两种观测值按(1 − 6) 定权，$m_{综}$	$\pm 0\overset{s}{.}084$	± 0.125	± 0.118
	m_T	$\pm 0\overset{s}{.}136$	± 0.188	± 0.178
	m_0	$\pm 0\overset{s}{.}092$	± 0.133	± 0.126

4　结论

(1) 陀螺定向全面计时法用模型 Ⅰ 进行平差计算时，应对时间观测值进行加权，定权公式为 $P_{t_i} = (t_i - t_0)\cos^2(2\pi/T)$，其中周期 T 和初始时间常数 t_0 可以取近似值代入计算。

(2) 陀螺定向全面计时法用模型 Ⅲ 进行平差最为理想。此时时间和分划板刻线读数两种观测值的定权公式为：

$$P_{t_i} = \cos^2 \frac{2\pi}{T}(t_i - t_0)$$

$$P_{a(t_i)} = (\frac{T}{2\pi A})^2$$

其中　周期 T、初始时间常数 t_0 和振幅 A 均可取近似值代入计算。

参考文献

1　Von W Caspary. Ein erweitertes Chronometrisches Kreiselmeβverfahren, AVN, 1982, 4.