GM 模型的几何性质及统计检验①

靳奉祥* 曾卓乔** 徐 斌*
(* 山东矿业学院地科系, 泰安 271019; ** 中南工业大学资开系, 长沙, 410083)

摘 要 以空间向量几何理论为基础, 详细地分析了 Gauss-Markov 线性模型的几何性质; 在实现了模型图形化描述的基础上, 利用各解向量的几何及统计性质构造出了不同情形下的统计检验方法和相应的检验统计量, 为全面、深入地研究和灵活运用该模型提出了一种简洁直观的数学方法。

关键词 线性子空间 几何特性 统计特性 约束条件 统计检验 统计量

Gauss-Markov(GM)模型在测量数据处理中起着极其重要的作用。该模型的有关理论已由许多学者进行过深入的研究[1-7], 其内容涉及到回归诊断、参数估计及统计检验等领域, 对模型的估计量在进行了细致地分析的基础上, 给出了有关特性的描述, 但是这些描述大都基于复杂的代数公式, 因而缺乏直观性。为了能够简单直观地认识该模型、灵活运用该模型理论, 本文利用空间向量几何理论实现了模型的图形化描述, 并在上述基础上给出了模型统计检验中的统计量的构成及统计性质, 所有这些是对代数研究方法的补充。有许多学者采用这种研究方法对该模型进行了研究[8-12], 取得了一定的成果, 本文将对此进行更加系统和完整的研究。

1 GM 模型理论的几何描述

设 GM 模型

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{l}^*} = \underset{n\times 1}{\boldsymbol{U}^*} + \underset{n\times 1}{\Delta^*} = \underset{n\times t}{A^*}\boldsymbol{X} + \underset{n\times 1}{\Delta^*} \tag{1}$$

$$\Delta^* \sim N(0, \sigma^2 Q_\Delta^*);\quad \underset{n\times n}{Q_\Delta^*} = \underset{n\times n}{p^{-1}} \tag{2}$$

可变换为等价模型

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{l}} = \underset{n\times 1}{\boldsymbol{U}} + \underset{n\times 1}{\Delta} = \underset{n\times t}{A}\underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}} + \underset{n\times 1}{\Delta} \tag{3}$$

$$\Delta \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{l}$ 为等价观测值向量, $\boldsymbol{U}$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的期望值向量, A 为设计矩阵, $\boldsymbol{X}$ 为未知参数向量, Δ 为随机误差向量, σ 为单位权方差, P 为观测向量 $\boldsymbol{l}^*$ 的权阵, 且有 $R(A)=t$。

向量 $\boldsymbol{U}=A\boldsymbol{X}$ 的定义域为 R^n 中的 t 维线性子空间 $\Omega=S\{A\}$(即矩阵 A 的列向量张成的空间), 设 J 为该子空间的投影阵, $J_\perp$ 为其正交补空间的投影阵, 有

$$J = AN^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$J_\perp = I - J = I - AN^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

式中 $N = A^{\mathrm{T}}A = (A^*)^{\mathrm{T}}P(A^*)$

模型(3)的最小二乘解向量可用图 1 表示出来。

模型中各向量的最小二乘解向量分别为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = N^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{U}} = J\boldsymbol{l} = AN^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} \tag{8}$$

$$\hat{\Delta} = -\hat{\boldsymbol{V}} = J_\perp\boldsymbol{l} = J_\perp\Delta = \boldsymbol{l} - J\boldsymbol{l} \quad (\hat{V}\text{ 为改正数向量}) \tag{9}$$

残差平方和及单位权方差估计分别为

$$RSS = \hat{\Delta}^T\hat{\Delta} = \hat{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{V}} = \|J_\perp\Delta\|^2 = \|J_\perp\boldsymbol{l}\|^2 = \Delta^T J_\perp\Delta = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}J_\perp\boldsymbol{l} \tag{10}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (n-t)^{-1}RSS \tag{11}$$

当模型(3)带有 $HX=0$ 约束条件时各最小二乘解向量分别为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_H = \hat{\boldsymbol{X}} - N^{-1}H^{\mathrm{T}}(HN^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1}H\hat{\boldsymbol{X}} \tag{12}$$

$$\hat{\boldsymbol{U}}_H = J_\omega\boldsymbol{l} = J\boldsymbol{l} - J_{\omega 1}\boldsymbol{l} = A\hat{\boldsymbol{X}}_H \tag{13}$$

① 收稿日期: 1995-03-31, 修回日期: 1995-09-14 第一作者靳奉祥, 男, 教授

图 1　模型(3)的最小二乘解向量

$$\hat{\Delta}_H = -\hat{V}_H = (I - J_\omega)\Delta = (I - J_\omega)\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l} - A\hat{X}_H \tag{14}$$

残差平方和与单位权方差估计为

$$RSS_H = \hat{\Delta}_H^{\mathrm{T}}\hat{\Delta}_H = \hat{V}_H^{\mathrm{T}}\hat{V}_H = \| (I - J_\omega)\Delta \|^2 = \| (I - J_\omega) l \|^2 = \Delta^{\mathrm{T}}(I - J_\omega)\Delta = \boldsymbol{l}^T (I - J_\omega)\boldsymbol{l} = RSS + \| J_{\omega 1}\Delta \|^2 \tag{15}$$

$$\hat{\sigma}_H^2 = (n - t + k)^{-1} RSS_H \tag{16}$$

式中　$\hat{X}$ 为式(7)的结果; ω 为 $\Omega = S\{A\}$ 中一个$(t - k)$维子空间; ω_1 为 ω 的正交补空间与 Ω 的交集生成的一个 k 维子空间, 即: $\Omega = \omega \oplus \omega_1$, $\omega \perp \omega_1$。J_ω 和 $J_{\omega 1}$ 分别为子空间 ω 和 ω_1 的投影阵。模型在 $HX = 0$ 条件约束下等价于将向量 U 限制在 Ω 的某一子空间内, 设该空间为 ω_1 则有 $\omega_1 = S\{AN^{-1}H^{\mathrm{T}}\}$, (即矩阵 $AN^{-1}H^{\mathrm{T}}$ 列向量张成的空间)。各解向量之间的关系见图 2 所示。

其中

$$J_{\omega 1} = AN^{-1}H^{\mathrm{T}}(HN^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1}HN^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

图 2　各解向量的关系

当模型(3)带有约束条件 $HX = W$ 时, U 向量在 ω_1 上的投影被限制为一常向量, 即

$$J_{\omega 1}U = AN^{-1}H^{\mathrm{T}}(HN^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1}W \tag{18}$$

而 U 的解向量被限制在 ω 的一个线性流形 $\tilde{\omega}$ 上, 且有 $\tilde{\omega} = U + \omega$. 设 $\tilde{\omega}$ 的投影阵为 $J_{\tilde{\omega}}$, 其正交补空间的投影阵为 $J_{\tilde{\omega}\perp}$, 则各向量的最小二乘解向量分别为

$$\hat{X}_W = \hat{X} - N^{-1}H^{\mathrm{T}}(HN^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1}(H\hat{X} - w) \tag{19}$$

$$\hat{U}_W = J_{\tilde{\omega}}\boldsymbol{l} = J\boldsymbol{l} - J_{\omega 1}U = A\hat{X}_W \tag{20}$$

$$\hat{\Delta}_W = -\hat{V}_W = J_{\tilde{\omega}\perp}\Delta = (I - J_\omega)\boldsymbol{l} - J_{\omega 1}U = \boldsymbol{l} - A\hat{X}_W \tag{21}$$

且有

$$RSS_W = \hat{\Delta}_W^{\mathrm{T}}\hat{\Delta}_W = \hat{V}_W^{\mathrm{T}}\hat{V}_W = \| J_{\tilde{\omega}\perp}\Delta \|^2 = RSS + \| J_{\omega 1}\boldsymbol{l} - J_{\omega 1}U \|^2 \tag{22}$$

$$\hat{\sigma}_W^2 = (n - t + k)^{-1} RSS_W \tag{23}$$

各解向量的关系可用向量图(图 3)描述出来。

图 3　各解的向量图

2　参数估计的置信域及假设检验统计量

为了能够通过上面的向量图清楚地了解各向量之间的统计关系, 将其统计关系归纳为表 1, 将各向量自身的统计性质归纳为表 2。

应该指出的是: GM 模型是在假设I 和假设II 成立下建立的, 对不满足上述两个假设的

表 1　各向量之间的统计关系

	向量						
	$J\Delta$ $(J\boldsymbol{l}-U)$	$J_{\perp}\Delta$	$J_{\omega 1}\Delta$	$(I-J_{\omega})\Delta$	$J_{\omega}\Delta$ $(J_{\omega}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{U})$	$J_{\tilde{\omega}}\Delta$ $(J_{\tilde{\omega}}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{U})$	$J_{\tilde{\omega}\perp}\Delta$
$J\Delta(J\boldsymbol{l}-\boldsymbol{U})$		独立					
$J_{\perp}\Delta$	独立		独立		独立	独立	
$J_{\omega 1}\Delta$		独立			独立	独立	
$(I-J_{\omega})\Delta$					独立		
$J_{\omega}\Delta(J_{\omega}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{U})$		独立	独立	独立			
$J_{\tilde{\omega}}\Delta(J_{\tilde{\omega}}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{U})$		独立	独立				独立
$J_{\tilde{\omega}\perp}\Delta$						独立	

表 2　各向量的统计性质

情形	假设			统计量及统计性质						
	I	II	III	$\Vert J\Delta\Vert^2$	$\Vert J_{\perp}\Delta\Vert^2$ (RSS)	$\Vert J_{\omega 1}\Delta\Vert^2$	$\Vert(I-J_{\omega})\Delta\Vert^2$ (RSS_H)	$\Vert J_W\Delta\Vert^2$	$\Vert J_{\tilde{\omega}}\Delta\Vert^2$	$\Vert J_{\tilde{\omega}\perp}\Delta\Vert^2$ (RSS_W)
1	$\boldsymbol{U}\in\Omega$	$\Delta\sim N(0,\sigma^2 I)$		$\sigma^2\chi^2(t)$	$\sigma^2\chi^2(n-t)$					
2	$\boldsymbol{U}\in\Omega$	$\Delta\sim N(0,\sigma^2 I)$	$H\boldsymbol{X}=0$ 或 $\boldsymbol{U}\in\omega$	$\sigma^2\chi^2(t)$	$\sigma^2\chi^2(n-t)$	$\sigma^2\chi^2(k)$	$\sigma^2\chi^2(n-t+k)$	$\sigma^2\chi^2(t-k)$		
3	$\boldsymbol{U}\in\Omega$	$(0,\sigma^2,I)$	$H\boldsymbol{X}=w$ 或 $\boldsymbol{U}=AH^-w+A(I-N^-H)M$	$\sigma^2\chi^2(t)$	$\sigma^2\chi^2(n-t)$	$\sigma^2\chi^2(k)$			$\sigma^2\chi^2(t-k)$	$\sigma^2\chi^2(n-t+k)$

模型及数据读者可参阅文献[10]和[13]，本文在此不加以讨论。

2.1　参数估计的置信区域

根据表 1 和表 2 可构成 F 统计量以表示出参数 $\boldsymbol{X}$ 估计的置信域：

情形 1：

$$F=\frac{\Vert J\Delta\Vert}{\Vert J_{\perp}\Delta\Vert^2}\cdot\frac{n-t}{t}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}-x)}{\sigma^2\cdot t}\sim F(t,n-t)\tag{24}$$

情形 2：

$$F=\frac{\Vert J_{\omega}\Delta\Vert^2}{\Vert(I-J_{\omega})\Delta\Vert^2}\cdot\frac{n-t+k}{t-k}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)}{\sigma_H^2\cdot(t-k)}\sim F(t-k,n-t+k)\tag{25}$$

$$F=\frac{\Vert J_{\omega}\Delta\Vert^2}{\Vert(J_{\perp}\Delta)\Vert^2}\cdot\frac{n-t}{t-k}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)}{\sigma^2\cdot(t-k)}\sim F(t-k,n-t)\tag{26}$$

$$F=\frac{\Vert J_{\omega}\Delta\Vert^2}{\Vert J_{\omega 1}\Delta\Vert^2}\cdot\frac{k}{t-k}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)}{(H\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(HN^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1}H\boldsymbol{X}}\cdot\frac{k}{(t-k)}\sim F(t-k,k)\tag{27}$$

情形 3：

$$F=\frac{\Vert J_{\tilde{\omega}}\Delta\Vert^2}{\Vert J_{\tilde{\omega}\perp}\Delta\Vert^2}\cdot\frac{n-t+k}{t-k}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}_W-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}_W-x)}{\sigma_W^2\cdot(t-k)}\sim F(t-k,n-t+k)\tag{28}$$

$$F=\frac{\Vert J_{\omega}\Delta\Vert^2}{\Vert J_{\perp}\Delta\Vert^2}\cdot\frac{k}{t-k}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}_H-x)}{\sigma^2(t-k)}\sim F(t-k,n-t)\tag{29}$$

$$F=\frac{\Vert J_{\tilde{\omega}}\Delta\Vert^2}{\Vert J_{\omega 1}\Delta\Vert^2}\cdot\frac{k}{t-k}=\frac{(\hat{\boldsymbol{X}}_W-x)^{\mathrm{T}}N(\hat{\boldsymbol{X}}_W-x)}{(H\hat{\boldsymbol{X}}-W)^{\mathrm{T}}(HN^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1}(H\hat{\boldsymbol{X}}-W)}\cdot\frac{k}{t-k}\sim F(t-k,k)\tag{30}$$

式(24)～(30)式　便是假设Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ均成立时参数 $\boldsymbol{X}$ 估计的置信域。

2.2　假设 $H\boldsymbol{X}=0$ 及 $H\boldsymbol{X}=W$ 的检验统计量

根据图 2, 对 $HX=0$ 的检验可构成 F—统计量

$$F=\frac{\|J_{\omega 1}\Delta\|^2}{\|J_{\perp}\Delta\|^2}\cdot\frac{n-t}{k}=\frac{RSS_H-RSS}{\hat{R}SS}\cdot\frac{n-t}{k}=\frac{(H\hat{X})^T(HN^{-1}H^T)^{-1}H\hat{X}}{\hat{\sigma}^2 k}\sim F(k,n-t)\tag{31}$$

根据图 3, 对 $HX=W$ 的检验可构成 F—统计量

$$F=\frac{\|J_{\omega 1}\Delta\|^2}{\|J_{\perp}\Delta\|^2}\cdot\frac{n-t}{k}=\frac{RSS_W-RSS}{\hat{R}SS}\cdot\frac{n-t}{k}=\frac{(H\hat{X}-W)^T(HN^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{X}-W)}{\hat{\sigma}^2 k}\sim F(k,n-t)\tag{32}$$

3 假设检验的应用

利用式(24)～(32)可实现模型在各种情形下的假设检验。

3.1 模型的显著性检验

设有假设: H_0: $X=0$; H_1: $X\neq 0$

利用式(31)取 $H=I$, 若 H_0 成立, 则有

$$F=\frac{\hat{X}^T N\hat{X}}{\hat{\sigma}^2\cdot t}\sim F(t,n-t)\tag{33}$$

上式亦可利用式(24)求得。

设有假设: H_0: $\begin{cases}X=0\\HX=0;\end{cases}$ H_1: $\begin{cases}X\neq 0\\HX=0\end{cases}$

根据式(25)～(27), 若 H_0 成立, 则有

$$F=\frac{\hat{X}_H^T N\hat{X}_H}{\hat{\sigma}_H^2(t-k)}\sim F(t-k,n-t+k)\tag{34}$$

$$F=\frac{\hat{X}_H^T N\hat{X}_H}{\hat{\sigma}_H^2(t-k)}\sim F(t-k,n-t)\tag{35}$$

$$F=\frac{\hat{X}_H^T N\hat{X}_H}{(H\hat{X})^T(HN^{-1}H^T)^{-1}H\hat{X}}\cdot\frac{k}{t-k}\sim F(t-k,k)\tag{36}$$

设有假设: H_0: $\begin{cases}X=0\\HX=W;\end{cases}$ H_1: $\begin{cases}X\neq 0\\HX=W\end{cases}$

根据式(28)至式(30), 若 H_0 成立, 则有

$$F=\frac{\hat{X}_H^T N\hat{X}_H}{\hat{\sigma}_W^2(t-k)}\sim F(t-k,n-t+k)\tag{37}$$

$$F=\frac{\hat{X}_H^T N\hat{X}_H}{\hat{\sigma}_W^2(t-k)}\sim F(t-k,n-t)\tag{38}$$

$$F=\frac{\hat{X}_W^T N\hat{X}_W}{(H\hat{X}-W)^T(HN^{-1}H^T)^{-1}(H\hat{X}-W)}\cdot\frac{k}{t-k}\sim F(t-k,k)\tag{39}$$

3.2 子集参数的显著性检验

设 $=(X_1^T\quad X_2^T)^T$, X_1 为 $(t-k)$ 维向量, X_2 为 k 维向量, 将设计矩阵 A 对应分块, 则模型(3)变为

$$l=(A_1\quad A_2)\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}+\Delta\tag{40}$$

现有假设: H_0: $X_2=0$; H_1: $X_2\neq 0$

利用式(31), 取 $H=(\underset{kX(t-k)}{0}\quad\underset{k\times k}{I})$, 则有

$$F=\frac{(H\hat{X})^T(HN^{-1}H^T)^{-1}H\hat{X}}{\hat{\sigma}^2 k}\sim F(k,n-t)\tag{41}$$

由图 2 可知:

$$(H\hat{X})^T(HN^{-1}H^T)^{-1}H\hat{X}=\|J_{\omega 1}\hat{V}_H\|^2\tag{42}$$

当 $H=(0\quad I)$ 时, 有

$$\hat{V}_H=A_1(A_1^TA_1)^{-1}A_1^Tl-l\tag{43}$$

即: 由模型 $l=A_1X_1+\Delta$ 求得的 Δ 的最小二乘估计, 因此有 $A_1^T\hat{V}_H=0$, 所以有

$$\begin{aligned}\|J_{\omega 1}\hat{V}_H\|^2&=\hat{V}_H^TAN^{-1}H^T(HN^{-1}H^T)^{-1}\cdot HN^{-1}A^T\hat{V}_H\\&=\hat{V}_H^TA_2[A_2^T(I-A_1(A_1^TA_1)^{-1}\cdot A_1^T)A_2]^{-1}A_2^T\hat{V}_H\end{aligned}\tag{44}$$

将上式代入式(41)得:

$$F=\hat{V}_H^TA_2[A_2^T(I-A_1(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T)\cdot A_2]^{-1}A_2^T\hat{V}_H/(\hat{\sigma}^2\cdot k)\sim F(k,n-t)\tag{45}$$

可以证明: 利用式(31)取 $H=(0\quad A_2)$, 则会得到与式(45)相同的结果。

3.3　附加参数的显著性检验

设有模型

$$\underset{n\times 1}{l}=\underset{n\times t}{A}\cdot\underset{t\times 1}{X}+\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times 1}{Y}+\underset{n\times 1}{\Delta} \tag{46}$$

$$\Delta\sim N(0,\sigma^2 I) \tag{47}$$

设有假设: H_0: $Y=0$; H_1: $Y\neq 0$

利用式(45), 若 H_0 成立, 则有

$$F=\frac{\hat{V}^{\mathrm{T}}B[B^{\mathrm{T}}(I-AN^{-1}A^{\mathrm{T}})B]^{-1}B^{\mathrm{T}}\hat{V}}{\hat{\sigma}^2 k}\sim F(k,n-t-k) \tag{48}$$

式中　$N=A^{\mathrm{T}}A$; $\hat{V}=AN^{-1}A^{\mathrm{T}}l-l$, $\hat{\sigma}$ 为利用模型式(46)求得的单位权方差的估值。

3.4　粗差探测检验统计量

设观测向量中有粗差向量, 设粗差向量为 m 维, B^* 为 $n\times m$ 阶矩阵, 且有

$$B^*=(e_1\quad e_2\cdots e_m) \tag{49}$$

式中　$e_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为 $n\times 1$ 维向量, 其中第 j 个元素为 1, 其余元素为零, 令 $P=gg^{\mathrm{T}}$ (g 为三角矩阵), 设 $B=g^{\mathrm{T}}B^*$, 则得到(46)式模型; 其中 $\boldsymbol{Y}$ 设为粗差向量。

现有假设: H_0: $\boldsymbol{Y}=0$; H_1: $\boldsymbol{Y}=0$

利用式(48), 在 H_0 成立下, 有

$$F=\frac{\hat{V}^{\mathrm{T}}B[B^{\mathrm{T}}(I-AN^{-1}A^{\mathrm{T}})B]^{-1}B^{\mathrm{T}}\hat{V}}{\hat{\sigma}^2 m}\sim F(m,n-(t+m)) \tag{50}$$

或

$$F=(\hat{V}^*)^{\mathrm{T}}PB^*[(B^*)^{\mathrm{T}}P(I-A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)B^*]^{-1}(B^*)^{\mathrm{T}}P\hat{V}^*/\hat{\sigma}^2 m\sim F(m,n-(t+m)) \tag{51}$$

$\hat{V}^*$ 为原模型观测向量 l^* 所得的改正数向量。

当 $B^*=e_j$ 时, 上式变为一维粗差的检验统计量

$$F=(e_j^{\mathrm{T}}P\hat{V}^*)^2/\hat{\sigma}^2[e_j^{\mathrm{T}}P(I-A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)e_j]\sim F(1,n-(t+1)) \tag{52}$$

利用上式还可构成 t—统计量

$$t=F^{1/2}=\frac{|e_j^{\mathrm{T}}P\hat{V}^*|}{\hat{\sigma}\sqrt{e_j^{\mathrm{T}}P(I-A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)e_j}}\sim t(n-(t+1)) \tag{53}$$

当 σ_0 已知时可组成如下统计量[6]:

χ^2—统计量:

$$T=(e_j^{\mathrm{T}}P\hat{V}^*)^2/[\sigma_0^2 e_j^{\mathrm{T}}P(I-A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)e_j]\sim\chi^2(1) \tag{54}$$

U—统计量:

$$U=T^{1/2}=\frac{|e_j^{\mathrm{T}}P\hat{V}^*|}{\sigma_0\sqrt{e_j^{\mathrm{T}}P(I-A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)e_j}}\sim N(0,1) \tag{55}$$

当 $P=\mathrm{diag}(P_1\quad P_2\cdots P_n)$ 时, (52)式变为

$$F=\frac{(\hat{V}_j^*)^2}{\hat{\sigma}^2[P_j^{-1}-(A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)_{jj}]}=\frac{(\hat{V}_j^*)^2}{\hat{\sigma}^2 Q_{\hat{v}_j^*\hat{v}_j^*}}\sim F(1,n-(t+1)) \tag{56}$$

式中

$$Q_{\hat{v}_j^*\hat{v}_j^*}=[P_j^{-1}-(A^*N^{-1}(A^*)^{\mathrm{T}}P)_{jj}]$$

式(53)变为

$$t=\frac{|\hat{V}_i^*|}{\hat{\sigma}\sqrt{Q_{\hat{v}_j^*\hat{v}_j^*}}}\sim t(n-(t+1)) \tag{57}$$

式(54)变为

$$T=\frac{(\hat{V}_j^*)^2}{\sigma_0^2 Q_{\hat{v}_j^*\hat{v}_j^*}}\sim\chi^2(1) \tag{58}$$

式(55)变为

$$U=T^{1/2}=\frac{|\hat{V}_i^*|}{\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{v}_j^*\hat{v}_j^*}}}\sim N(0,1) \tag{59}$$

此即 Barrda 数据探测法统计量。

5　结论

(1) 利用空间向量几何理论实现 GM 模型的图形化描述对深刻理解和深入研究该模型、灵活运用该模型理论具有一定的价值, 是一种简单直观的研究方法。

(2) 图形 1、2 和 3 全面系统地描述了 GM 模型各种情形下各解向量的几何及统计关系, 在该研究领域中取得了一定的成果。表 1 和表 2 所描述的统计关系和统计特性有助于针对不同的目的构成相应的检验统计量。

(3) 针对 GM 模型的不同假设, 利用向量几何理论使其得到了高度的统一, 并可应用该

研究成果满足不同的应用目的。

参考文献

1 Rao C R. Linear Statistical inference and Its Alpplications (second edition), new York: J. Wiley and Sons, 1973.

2 王松桂. 线性模型理论及应用, 合肥: 安徽教育出版社, 1987.

3 陶本藻. 测量数据统计分析. 北京: 测绘出版社, 1992.

4 张金槐. 线性模型参数估计及改进. 长沙: 国防科技大学出版社, 1992.

5 Cross P, A. Advanced Least Squares Applied to Positioning-fixing working Paper No. 6. Dept of Iand Surveying, Nort East London Polytechnic, 1983.

6 Hottier I C G. Traitement des Donnees. IGN, France, 1986.

7 Dupraz H. Theorie des Erreurs 2, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1985.

8 陈永奇. 变形观测数据处理. 北京: 测绘出版社, 1987.

9 崔希璋, 於宗俦等. 广义测量平差. 北京: 测绘出版社, 1992.

10 韦博成, 鲁国斌等. 统计诊断引论. 南京: 东南大学出版社, 1991.

11 Seber G A F. Linear Regressing Analysis. John Wiley and Sons, 1977.

12 靳奉祥. 影响分析理论及其在变形测量中的应用. 中南工业大学博士学位论文, 1994.

13 陈希孺, 王松桂. 近代回归分析. 合肥: 安徽教育出版社, 1987.

GEOMETRICAL FEATURES AND STATISTICAL TESTS OF GM MODELS

Jin Fengxiang

Shandong Institute of Mining and Technology, Taian 271019

Zeng Zhuoqiao

Central-South University of Technology, Changsha 410083

Xu Bin

Shandong Institute of Mining and Technology, Taian 271019

ABSTRACT Based on the geometrical theory of spatial vectors, the geometrical features of a Gauss-Markov model are analysed in detail. Following the graphical description of the model, some statistics in different cases are established using their geometrical and statistical features, which presented a pithy and direct method for people to fully and deeply study and flexibly use the model.

Key words linear subspace　geometrical feature　statistical feature　constraint condition　statistical test

(编辑　吴家泉)