

源近区频域电磁测深视电阻率的一种数值计算方法^①

苏 发 汤井田 何继善 温佩琳

(中南工业大学地质系, 长沙 410083)

摘 要 在对近区场积分表达式中各积分因子特性分析的基础上, 提出了一种解决近区场含两个 Bessel 函数奇异积分的分段 Simpson 积分法, 较好地处理了近区视电阻率的数值计算问题。

关键词 视电阻率 频域电磁测深 双频组合波 数值计算 分段 Simpson 积分法

多年来, 近区频域电磁测深问题一直是地球物理领域一个悬而未决的问题, 除了理论方法和观测手段上的影响外, 数学处理手段也是阻碍近区频域电磁测深研究发展的一个方面。由于近区场的复杂性, 使得描述场分布规律的数学问题也相当复杂; 一般情况下, 这些数学问题无法得出解析解; 即使采用通常的数值计算的方法也很难得出合理的结果。因此本文以层状大地为模型, 采用水平载流线圈为发射源提出了一套视电阻率的数值计算方法, 为解决含有双重 Bessel 函数的奇异积分及近区视电阻率的数值计算问题作了有益的尝试。

1 源近区场的分布规律

设一半径为 a 的载流 ($I = I_0 e^{i\omega t}$) 线圈位于层状大地表面。在似稳状态下, 由 Maxwell 场方程可得到层状大地表面上任意点的场分布规律^[1]:

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -i\mu_0\omega \frac{Ia}{2} \int_0^\infty (1 + R_0) J_1(ma) J_1(mr) dm \\ H_r &= \frac{Ia}{2} \int_0^\infty m(1 + R_0) J_1(ma) J_1(mr) dm \\ H_z &= \frac{Ia}{2} \int_0^\infty m(1 + R_0) J_1(ma) J_0(mr) dm \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 R_0 为层状因子

$$R_0 = \frac{N_0 - Y_1}{N_0 + Y_1} \quad (2)$$

$$\text{其中 } Y_1 = N_1 \frac{Y_2 + N_1 \tanh(m_1 d_1)}{N_1 + Y_2 \tanh(m_1 d_1)}$$

$\vdots$

$$Y_j = N_j \frac{Y_{j+1} + N_j \tanh(m_j d_j)}{N_j + Y_{j+1} \tanh(m_j d_j)}$$

$\vdots$

$$Y_{M-1} = N_{M-1} \frac{Y_M + N_{M-1} \tanh(m_{M-1} d_{M-1})}{N_{M-1} + Y_M \tanh(m_{M-1} d_{M-1})}$$

$$Y_M = N_M$$

$$N_0 = \frac{m}{i\mu_0\omega}$$

$$N_j = \frac{m_j}{i\mu_j\omega}, \quad m_j = (m^2 + k_j^2)^{1/2},$$

$$k_j^2 = i\mu_j\omega\sigma_j \quad j = 1, 2, \dots, M$$

式中 M 为层状大地的层数, μ_j 、 σ_j 分别为第 j 层大地的磁导率和导电率, μ_0 为真空磁导率。

2 视电阻率

通过分析近区场的特性, 利用双频组合波理论, 得到源近区层状大地表面任意点视电阻率表示式^[1]:

$$\rho_s = \mu_0\omega_1 \left[\frac{\sqrt{2} Ia^2 (1 - \sqrt{A})}{30 \Delta Q H_z} \right]^{2/3} \quad (3)$$

其中 $A = \omega_2/\omega_1$

① 国家教委博士基金资助项目 收稿日期: 1994-07-11

$$\Delta QH_z = QH_z(\omega_1) - \frac{\omega_1}{\omega_2} QH_z(\omega_2) \quad (4)$$

为层状大地表面任意点对应不同频率 ω_1 和 ω_2 磁场垂直分量正交部分的频差值。 QH_z 由(1)式中最后一式的正交部分给出。

3 数值计算方法

由场分布规律可看出,场表达式是由层状因子 $R_0(m)$ 和两个 Bessel 函数的乘积构成的奇异积分。层状因子 $R_0(m)$ 是一个递减函数,对不同的情况(地电参数及几何参数)其递减的程度是不同的^[1]。Bessel 函数是一个随变量迅速振荡的函数;虽说是衰减的,但速度较慢,尤其是两个 Bessel 函数的乘积。故这样构成的被积函数的收敛特性比较差。据悉,目前对这类问题的求解还没有比较好的方法。本文在对场量积分表达式中各积分因子特性分析的基础上,参照目前数学领域对数值积分的各种方法,提出了一种解决近区场含两个 Bessel 函数乘积的奇异积分的分段 Simpson 积分法。

由式(3)的视电阻率定义式知,要得到层状大地视电阻率的正演结果。首先要求得场量 QH_z , 即

$$QH_z = \frac{Ia}{2} Q \left[\int_0^\infty m [1 + R_0(m)] J_1(ma) J_0(mr) dm \right] \quad (5)$$

或

$$QH_z = \frac{Ia}{2} \int_0^\infty m QR_0(m) J_1(ma) J_0(mr) dm \quad (6)$$

而后由(4)式求得 QH_z 的频差值 ΔQH_z 。由被积函数中各积分因子的性质知:

(1) R_0 层状因子。由层状因子 $R_0(m)$ 的表示式可看出,场量中的地电信息主要由层状因子 $R_0(m)$ 提供,它体现了各地电结构对电磁场的影响。电磁测深主要是研究由层状因子贡献的那部分场的信息。由 $R_0(m)$ 的递归公式可以看出, $R_0(m)$ 是一个随宗量 m 增加而递减的函数。由此可见,当 m 大于某一值 m^* 后, $R_0(m)$ 的虚实分量都将趋于零。 $R_0(m)$ 的这个特性对

上式的数值积分有很重要的意义。只要能够选定一个足够大的 m^* , 对于 $m > m^*$ 的所有 $|R_0(m)| \approx 0$; 根据这个特性, 可将(6)式的奇异积分变成正常积分

$$QH_z \approx \frac{Ia}{2} \int_0^{m^*} m QR_0(m) J_1(ma) J_0(mr) dm \quad (7)$$

(2) Bessel 函数。通过实际计算发现,利用通常方法直接对(7)式积分很难保证积分收敛,这主要是由于 Bessel 函数的振荡特性引起的。由振荡函数的性质,两个振荡函数 $J_0(mr)$ 和 $J_1(ma)$ 的乘积仍是一个振荡函数,且振荡频率更高。为计算(7)式可利用振荡函数的这个特点,将(7)式由 $0 \rightarrow m^*$ 的积分按照乘积

$$J_1(ma) \cdot J_0(mr)$$

的零点分成一系列积分和。即

$$\int_0^{m^*} m QR_0(m) J_1(ma) J_0(mr) dm = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} m QR_0(m) J_1(ma) J_0(mr) dm$$

式中 N 为 0 到 m^* 之间乘积 $[J_1(ma) J_0(mr)]$ 零点的个数, n 表示第 n 个零点, $x_0 = 0$ 对应 $m = 0$ 。

通过一系列分析和变换后, (6) 式可写成:

$$QH_z \approx \frac{Ia}{2} \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} m QR_0(m) J_1(ma) J_0(mr) dm \quad (8)$$

(8) 式变成了一系列积分之和, 在每一小积分区间, 被积函数不再具有振荡特性, 问题得到了简化, 但严格计算公式的积分仍比较困难。由 Bessel 函数的表示式:

$$J_1(ma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{ma}{2}\right)^{2k+1}$$

$$J_0(mr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{mr}{2}\right)^{2k}$$

可见(8)式中的被积函数仍很复杂。为此, 本文利用了 Bessel 函数的近似表达式^[2, 3]

(i): 当 $Z < 4$ 时, 令 $t = Z/4$ ($0 \leq t < 1$), 有逼近公式:

$$J_0(Z) = (((((-0.0005014415t^2 + 0.0076771853)t^2 -$$

$$\begin{aligned}
& 0.070\,925\,349\,2)t^2 + \\
& 0.444\,358\,426\,3)t^2 - \\
& 1.777\,756\,059\,9)t^2 + \\
& 3.999\,997\,302\,1)t^2 - \\
& 3.999\,999\,872\,1)t^2 + 1.0 \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1(Z) = & ((((((- 0.000\,128\,976\,9)t^2 + \\
& 0.002\,206\,915\,5)t^2 - \\
& 0.023\,661\,677\,3)t^2 + \\
& 0.177\,758\,292\,2)t^2 - \\
& 0.888\,883\,964\,9)t^2 + \\
& 2.666\,666\,054\,4)t^2 - \\
& 3.999\,999\,971\,0)t^2 + \\
& 1.999\,999\,999\,8)t \quad (10)
\end{aligned}$$

(ii): 当 $Z \geq 4$ 时, 令 $t = 4/Z$ ($0 < t \leq 1$), 有逼近公式:

$$J_0(Z) = (P_0 \cdot C_0 - Q_0 \cdot S_0) \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \quad (11)$$

$$J_1(Z) = (P_1 \cdot C_1 - Q_1 \cdot S_1) \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \quad (12)$$

其中 $P_0 = ((((((- 0.000\,003\,704\,3)t^2 +$

$$\begin{aligned}
& 0.000\,017\,356\,5)t^2 - \\
& 0.000\,048\,761\,3)t^2 + \\
& 0.000\,173\,430\,0)t^2 - \\
& 0.001\,753\,062\,0)t^2 + \\
& 0.398\,942\,279\,3) \sqrt{2\pi} \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_0 = & ((((((0.000\,003\,231\,2)t^2 - \\
& 0.000\,014\,207\,8)t^2 + \\
& 0.000\,034\,246\,8)t^2 - \\
& 0.000\,086\,979\,1)t^2 + \\
& 0.000\,456\,432\,4)t^2 - \\
& 0.012\,466\,944\,1) \sqrt{2\pi} \cdot t \quad (14)
\end{aligned}$$

$$C_0 = \cos(Z - \pi/4) \quad (15)$$

$$S_0 = \sin(Z - \pi/4)$$

$$\begin{aligned}
P_1 = & ((((((0.000\,004\,241\,4)t^2 - \\
& 0.000\,020\,092\,0)t^2 + \\
& 0.000\,058\,075\,9)t^2 - \\
& 0.000\,223\,203\,0)t^2 + \\
& 0.002\,921\,825\,6)t^2 - \\
& 0.398\,942\,281\,9) \sqrt{2\pi} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$Q_1 = ((((((- 0.000\,003\,659\,4)t^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 0.000\,016\,220\,0)t^2 - \\
& 0.000\,039\,870\,8)t^2 + \\
& 0.000\,106\,474\,1)t^2 - \\
& 0.000\,639\,040\,0)t^2 + \\
& 0.037\,400\,836\,4) \sqrt{2\pi} \cdot t \quad (17)
\end{aligned}$$

$$C_1 = \cos(Z - 0.75\pi) \quad (18)$$

$$S_1 = \sin(Z - 0.75\pi)$$

通过对 0 阶和 1 阶 Bessel 函数作 (9) ~ (18) 式的近似后, 使得 (8) 式的积分明显简化; 同时降低了计算量, 减少了占机时间。计算中采用变步长 Simpson 积分法。经过对各种地电模型的视电阻率正演计算表明, 本文提出的这种分段 Simpson 近似积分法, 对处理如 (1) 式这样的奇异积分是可行的、有效的, 得到的结果也是令人信服的。计算过程中如再应用双精度运算, 将使结果更具可靠性。

4 数值模拟结果

本文采用上述计算方法, 利用 (3) 式视电阻率公式, 对各种地电断面进行了模拟计算。由于篇幅所限, 这里只给出部分结果。

图 1~3 是用本计算方法得到的均匀大地、二层和三层各地电断面的视电阻率曲线。由图可见, 各地电断面的视电阻率曲线都可以比较

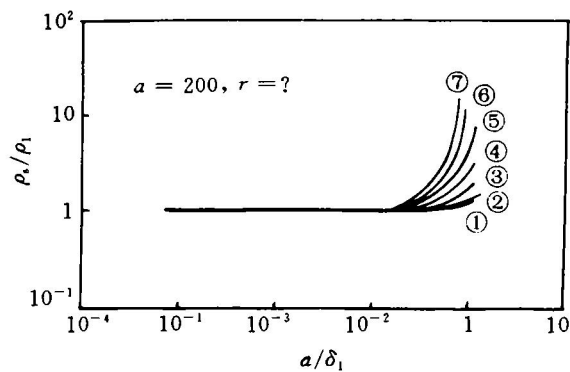


图 1 均匀大地上任意点视电阻率曲线

$$\textcircled{1} - \frac{a}{4}; \textcircled{2} - \frac{a}{2}; \textcircled{3} - a; \textcircled{4} - \frac{3}{2}a;$$

$$\textcircled{5} - 2a; \textcircled{6} - \frac{5}{2}a; \textcircled{7} - 3a$$

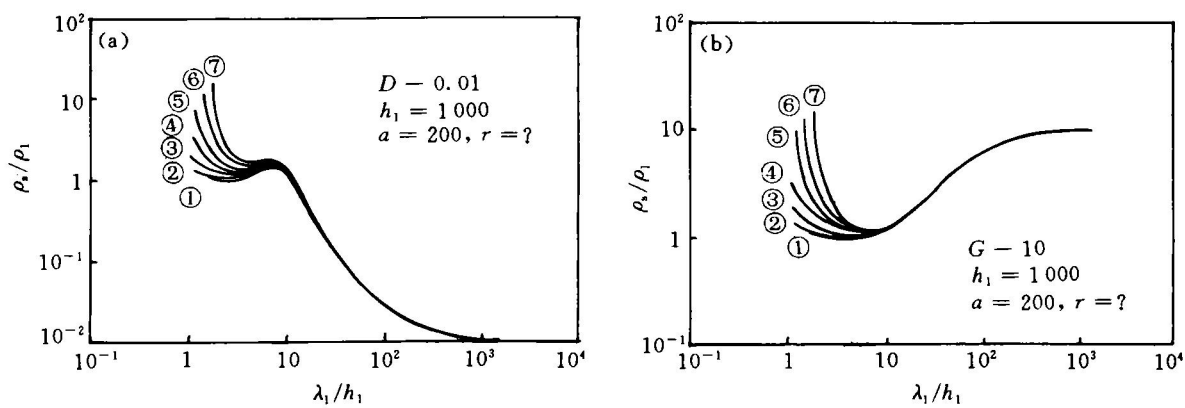


图2 二层地电断面上任意点视电阻率曲线

①— $\frac{a}{4}$; ②— $\frac{a}{2}$; ③— a ; ④— $\frac{3}{2}a$; ⑤— $2a$; ⑥— $\frac{5}{2}a$; ⑦— $3a$

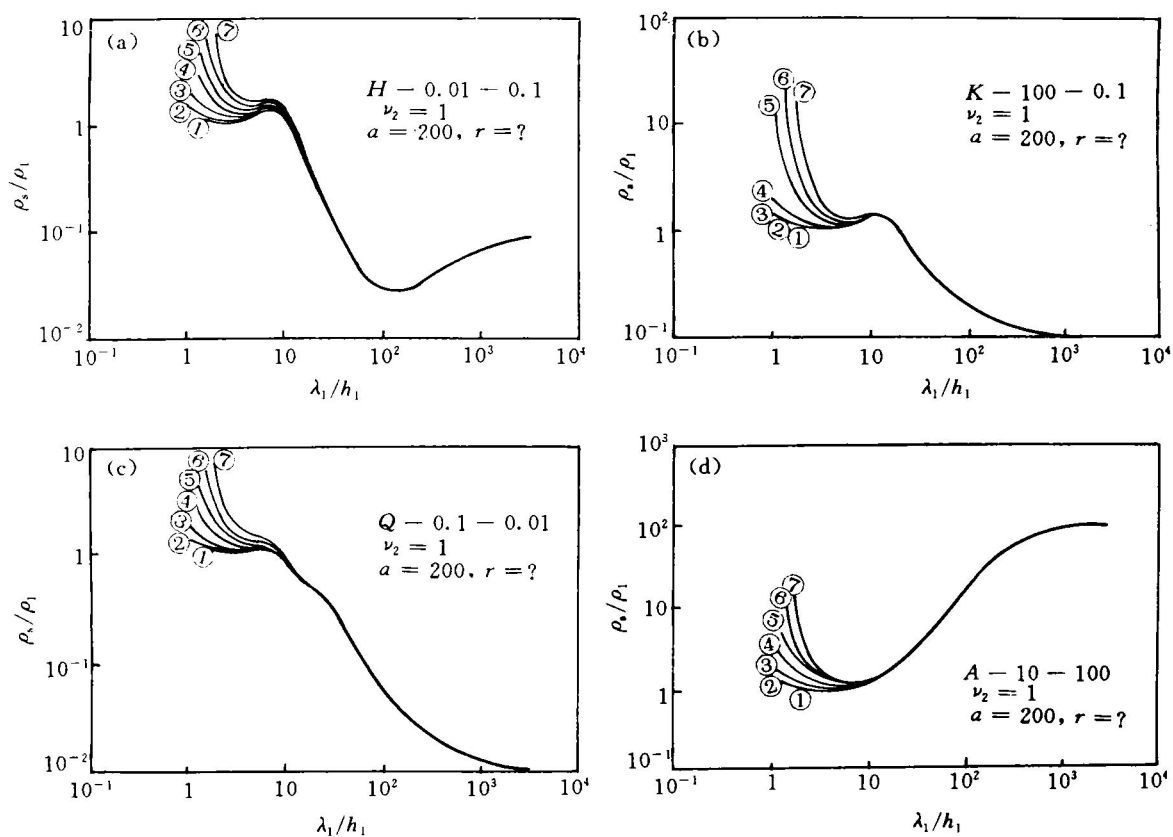


图3 三层地电断面上任意点视电阻率曲线

①— $\frac{a}{4}$; ②— $\frac{a}{2}$; ③— a ; ④— $\frac{3}{2}a$; ⑤— $2a$; ⑥— $\frac{5}{2}a$; ⑦— $3a$

客观地反映地电断面的变化规律。视电阻率曲线高频部的畸变是由于视电阻率定义式本身造成的。由此可见,本文给出的计算方法对源近区场的数值计算是可行的,有效的。

5 结论

通过对近区场表达式中被积函数各因子性质的分析,提出的分段 Simpson 近似积分法,无疑为解决含两个 Bessel 函数乘积的奇异积分,尤其是近区场视电阻率的数值计算问题开辟了一条新途径。作者认为,在这方面进一

步的研究和探索,将会为近区场的数值计算研究注入新的活力,本文的工作将会对近区频域电磁测深研究起到有益的促进作用。

参考文献

- 1 苏 发. 中南工业大学博士学位论文, 1994.
- 2 刘德贵, 费景高等. 新编工程实用算法与 FORTRAN77 程序. 北京: 国防出版社, 1990.
- 3 Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables, 1964.

NUMERICAL CALCULATION FOR APPARENT RESISTIVITY OF FREQUENCY ELECTROMAGNETIC SOUNDING IN NEAR-FIELD ZONE

Su Fa, Tang Jingtian, He Jishan, Wen Peilin

Geology Department, Central South University of Technology, Changsha 410083

ABSTRACT On the basis of analysing the characteristics of each integral factor in near source field expressions, a new piecewise Simpson integration for improper integral composed of double Bessel functions was advanced, and the problem of numerical calculation for apparent resistivity in near field zone was fairly solved.

Key words apparent resistivity frequency-domain electromagnetic sounding dual-frequency combination wave numerical calculation piecewise Simpson integration.

(编辑 何学锋)