小波分析在地球物理勘探中的应用①

何继善 温佩琳 肖 兵 汤井田 宋守根 赵秋梅
(中南工业大学地球物理新技术研究所, 长沙 410083)

摘 要 小波分析引入了多尺度分析思想, 可以对静态效应和深部异常, 局部异常和区域异常, 信号和噪声进行识别和分离。基于小波变换的特性, 作者在频率域电磁测深静态效应的自动识别和压制、重磁异常分离的高精度方法、电阻率函数的奇性分析和深度反演、地震波速反演成像和噪声压制等方面成功地应用了小波分析理论。

关键词 小波分析 地球物理 信号分析

长期以来, 在信号分析中使用的基本工具是 Fourier 变换, 这在地球物理信号分析中也不例外。然而, 一个信号的 Fourier 变换反映的是信号的整体特征, 在空间域(或时间域) 频率域不同时具有局部性。事实上, 在许多实际问题中人们所关心的却正是信号在局部范围内的特征。例如, 对探地雷达的工作记录来说, 研究的是在什么位置出现何种雷达反射波; 图像识别中的边缘检测, 重点讨论信号突变部分的位置, 等等。小波分析理论提出后, 由于小波分析同时具备时域和频域的良好局部性, 很快就被成功地应用于地球物理信号分析中。实践证明小波分析理论在地球物理勘探中具有重要的应用价值。

1 小波分析理论[1]

1.1 小波变换的定义

设信号 $f(x) \in L^2(R)$, 其连续小波变换定义为

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中 a 称为伸缩因子(或分辨率因子), b 称为平移因子(或位置因子)。$\psi(x) \in L^2(R)$ 称为基本小波或小波母函数, 它满足约束条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2/|\omega|\,\mathrm{d}\omega < \infty \tag{2}$$

1.2 小波变换多尺度(分辨率) 分析原理

Mallat 提出了多分辨分析概念并在此基础上建立了小波塔式分解法 —Mallat 算法。设 $\{V_j\}_{j\in z}$ 是 $L^2(R)$ 的一个多分辨逼近, 对于原始信号 $f(x) \in L^2(R)$, 则有分解式

$$f(x) = P_J f(x) + \sum_{j=1}^{J} Q_j f(x) \tag{3}$$

其中 $P_J f(x) = \sum_{n\in z} C_{j,n}\varphi_{j,n}(x)$ 称为 2^j 分辨率下的逼近, $Q_j f(x) = \sum_{n\in z} d_{j,n}\psi_{j,n}(x)$ 称为 2^j 分辨率下的细节; $C_{j,k} = \sum_{n\in z} h(n-2k)C_{j-1,k}$, $d_{j,k} = \sum_{n\in z} g(n-2k)C_{j-1,k}$, 且 $h(n)$ 和 $g(n)$ 为已给定的函数, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别为尺度函数和小波函数。

这样, 由上式可逐次求出信号在不同分辨率意义下的逼近和相应的细节信息; 而且, 从低一级的粗分辨率逼近和相应的细节信息, 可反求出高一级的分辨率逼近。即有如下的重构公式:

$$C_{j-1,k} = \sum_{n\in z} C_{j,k}h(n-2k) + \sum_{n\in z} d_{j,k}g(n-2k) \tag{4}$$

① 收稿日期: 1997- 02- 25; 修回日期: 1997- 05- 26 何继善, 男, 63 岁, 教授, 博士导师, 中国工程院院士

1.3　小波变换与信号的奇性检测

设一维信号为 $f(x)$, $\theta(x)$ 为一光滑函数且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\,dx = 1,\ \lim_{x\to\infty}\theta(x) = 0 \tag{5}$$

取 $\theta(x)$ 为 Gauss 函数, 记 $\psi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$, 可验证: $\psi(x)$ 可作为小波函数。

又令 $\psi_S = \frac{1}{S}\psi(\frac{x}{S})$, $\theta_S = \frac{1}{S}\theta(\frac{x}{S})$, 那么信号 $f(x)$ 关于 $\psi(x)$ 的小波变换为:

$$W_S f(x) = \langle f, \psi_S(x)\rangle = \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\psi(\frac{x-y}{S})\,dy \tag{6}$$

由 $\psi(x)$ 的定义, 得

$$W_S f(x) = S\frac{d}{dx}(f\cdot\theta_S)(x) \tag{7}$$

从上述表达式, 可把 $(f\cdot\theta_S)(x)$ 看成是信号 $f(x)$ 用 Gauss 函数按尺度 S 进行光滑化的结果。而小波变换是在 S 下光滑后的函数 $(f\cdot\theta_S)(x)$ 的一阶导数。因而, $W_S f(x)$ 的极值点对应于 $(f\cdot\theta_S)(x)$ 的拐点。因此, 我们只要通过求取 $|W_S f(x)|$ 的极大值, 从而确定信号 $f(x)$ 的奇异处。

1.4　小波变换与噪声压制

Mallat 提出了信号的奇性大小可用它在该点的 Lipschitz 常数来衡量。函数 Lipschitz 常数的大小反映了该点奇异性的大小。Mallat 进一步证明, 某点的 Lipschitz 常数可以由该点的小波变换的极大模求得。设 $f(x)\in L^2(R)$, 若某点 x_0 的 Lipschitz 常数为 α, δ 为任意正实数, 则 $|x-x_0|<\delta$ 时, 小波变换满足

$$|W_S f(x)| \leqslant kS^{\alpha} \tag{8}$$

由上式可知, 当一点的 $\alpha>0$, 函数的小波变换在该点的极大值的幅度将随着尺度的增加而增加; 相反当 $\alpha<0$, 函数的小波变换在该点的极大值的幅度将随着尺度的增加而减小。

可判定信号的 Lipschitz 常数通常满足 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$。因此其小波变换极大模图上的极值将随着尺度的增加而增加, 相反可证明, 随机白噪声对应的小波变换极大模将随尺度的增加而减小, 即它的 Lipschitz 常数是负数 $(\alpha<0)$。

因此, 根据小波变换极大模的幅度随尺度变化的规律不仅可以区别信号和噪声, 而且随尺度增加可自动压制噪声。

2　小波分析在物探中的应用

小波分析同时具备的时域(空间域) – 频域的双重良好的局部性和随尺度变化的自动调焦功能, 这使得它在地球物理异常的识别和地下介质界面的成像方面具有巨大的潜力。此外, 根据小波的消失矩特性和小波的多尺度结构, 可建立多重网络自适应算法, 可用来很好地逼近微分(积分)方程的解。这对于地球物理中的电磁波方程的求解具有重要的意义。总的说来, 小波分析已在如下几个方面取得了良好的应用效果。

2.1　频率域电磁测深静态效应的自动识别和压制[1]

在 CSAMT 法、MT 法等频率域电磁测深中, 电场的水平分量对浅层的电阻率横向变化敏感, 从而实测数据中常常包含静态效应。Zong、Bostick 等人提出了不同的压制和校正静态效应的方法, 但是如何恰当地消除静态效应一直未得到很好的解决[2]。利用小波变换的多尺度分析功能, 对卡尼亚电阻率的小波变换随尺度变化的规律进行研究, 得出区分静态效应和构造异常的新认识[3]: 静态效应的奇性指标 α(Lipschitz 常数) 为负值, 而构造异常的奇性指标为非负值, 在此基础上对卡尼亚电阻率进行多尺度分离即可将静态效应在不同分辨率下从卡尼亚电阻率中分离出来。

图 1(a) 是澜沧老厂银铅矿已知地质剖面上的 CSAMT 法实测的第三线原始卡尼亚电阻率拟剖面图。由图可见静态效应严重歪曲了已知的地层形态。图 1(b) 为小波变换压制静态效应的结果。可见图中明显突出了深部电性特征和大异常体。在 78~ 84 号点之间圈定的两个低阻体基本上对应于已知的两个矿体, 与地质钻孔情况相吻合。

2.2 重磁异常分离的高精度方法

小波变换多尺度分析功能的另一个重要的应用是重磁异常的分离。我们知道，对于复杂的异常，由于区域异常和局部异常的谱部分重叠，Fourier 分析方法对异常的分离效果不尽人意；异常谱重叠越多，其分离也就越困难，且要求的先验信息也越多。利用小波变换的多分辨原理，可得到复杂重磁异常在不同分辨率下的逼近和细节信息；同时由于可合理地确定分解层数，可根据异常的识别结果进行位变重构，从而使复杂异常得到分层次的最佳分离结果。解决了重磁资料解释中对复杂异常难以作出正确解释这一难题。

小波的正交表示还可用于重磁下延。重磁下延是一个困难的问题，它不稳定，且对干扰敏感。但是，若利用小波理论可使得这一问题得到一定程度的解决。从重磁理论可知，重磁的下延问题可化为第一类 Fredholm 积分方程求解。我们可以利用小波变换把核函数正交投影到逼近子空间上去，将待求解的奇异积分方程化为从低波数到相应高波数的若干既独立又有相互联系的线性方程组链(其阶数按 2 幂次递增)。随着阶数的递增，方程的稳定性下降。这样，最后的下延结果变成了小波反演的最佳调焦结果。

图 2 为磁法中一理论模型综合异常及小波变换异常分离的结果。实线表示综合异常，虚线表示为局部异常和区域异常。可见，利用小波变换可对重磁异常进行高精度的分离。

2.3 电阻率函数的奇性分析和深度反演[3]

对于电法勘探而言，地下介质的不连续性是由观测的电磁场计算出的视电阻率函数的不连续性来反映的，即视电阻率函数存在奇异性。因此，只要求出视电阻率函数的奇异位置

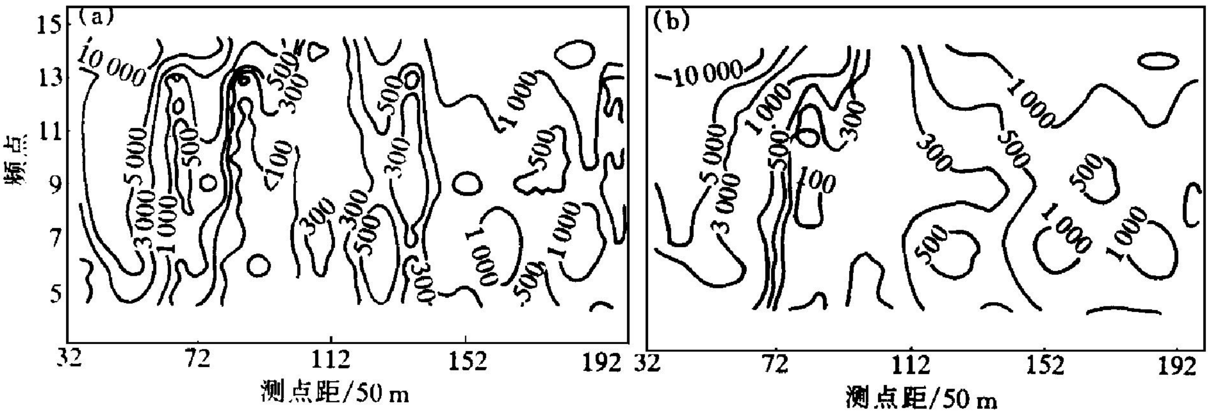

图 1 老厂三线原始卡尼亚电阻率拟剖面图(a)和静态效应压制后的结果(b)，最佳尺度为 2^5

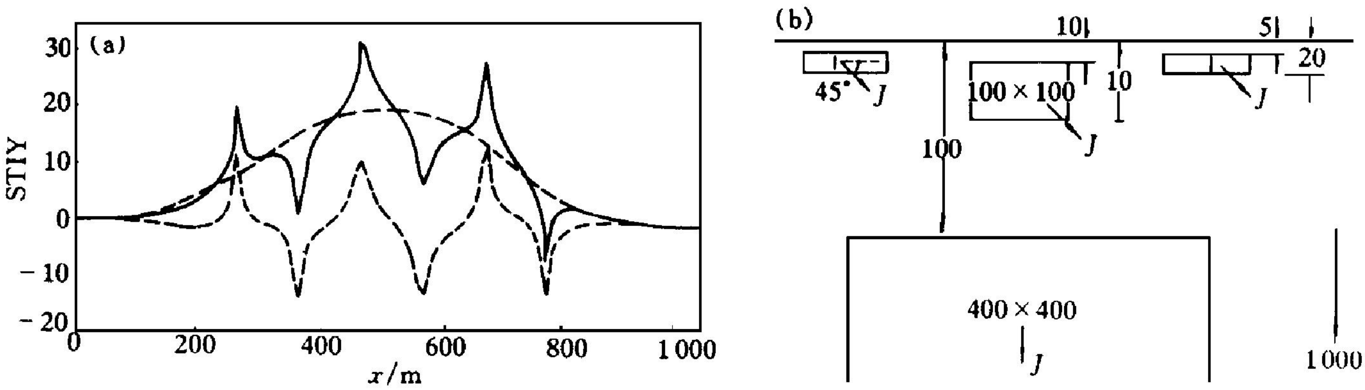

图 2 综合异常分离的结果(a)和磁法理论模型(b)

就可以了解地下电性的不连续性。从小波理论可知，函数的突变点或奇性点可以通过选择不同的小波母函数来识别。因此，选择适合的小波函数，对视电阻率函数求小波变换，其变换后模的极大值就是电阻率函数的存在奇异点。同时，可导出类似于 Bostick 反演方法的视深度转换方法，大量计算表明，该方法得到的视深度一视电阻率曲线可客观地反映地电断面的变化规律，是一种很好的快速反演方法。图 3 为二层 G 型断面上的转换结果。

2.4　地震波速反演成像[1]

在地震勘探中对波速的反演成像是资料解释最重要的内容之一。其中，以 Beylkins 和 Bleistein 对地震波动方程的反演成像方法最具代表性。然而，他们的方法只有在宽带数据和无噪声干扰的情况下才可能取得好的效果；否则，将不可避免地产生假像。能否找到在波速成像同时又能压制噪声干扰的方法是十分有意义的。小波变换的引入使这一问题得到了很好的解决。利用小波的时间域和频率域的双重局部性，对于地震中的限带反问题，可证明小波算子法对波速的奇性成像公式(以二层介质为例)：

$$|W_S \alpha(x)| = \frac{4R}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(h-S)^2}{2S^2}\right)$$

从这一成像公式，一方面从原理上保证了小波算子成像法的有效性，消除了 Bleistein 成像理论的假像问题；另一方面，可以在观测数据有限条件下，分析波速的奇性特征，并由此将波速的奇性和噪声干扰的奇性区分开，从而达到压制噪声的目的。

图 4 为二层理论模型正演数据叠加 33% 的实值白噪声后 Bleistein 反射函数法对 $\alpha(x)$ 的成像结果和小波算子对 $\alpha(x)$ 的成像结果。由图可见，Bleistein 法已无法知道界面的个数和位置，而小波算子法则取得了高质量的图像效果。

同理，由 Maxwell 方程入手，从探地雷达的波动方程出发，并根据探地雷达波在介质中的高频传播特性和小波变换对信号能作局部性特征分析的特点，可实现了小波算子对雷达波速的反演，导出雷达信号地下界面成像公式[4]。

2.5　噪声压制

噪声压制是地球物理中一个十分重要的问题，可以说地球物理数据处理的目的就是压制各种噪声干扰；特别是地球物理中的许多成像方法具有对噪声敏感的通病。Fourier 分析对噪声的处理有一定的作用，但远不能满足实际工作的要求。正如前面所述，利用小波变换的奇性分析功能及其对噪声的压制作用，使得对地球物理信号进行奇性分析的同时压制噪声的影响的这一愿望得以实现。

以复信号分析为例，它是一种对原始信号进行多参数、多角度分析的有力工具；然而，由于复信号分析过程对噪声具有放大作用，因

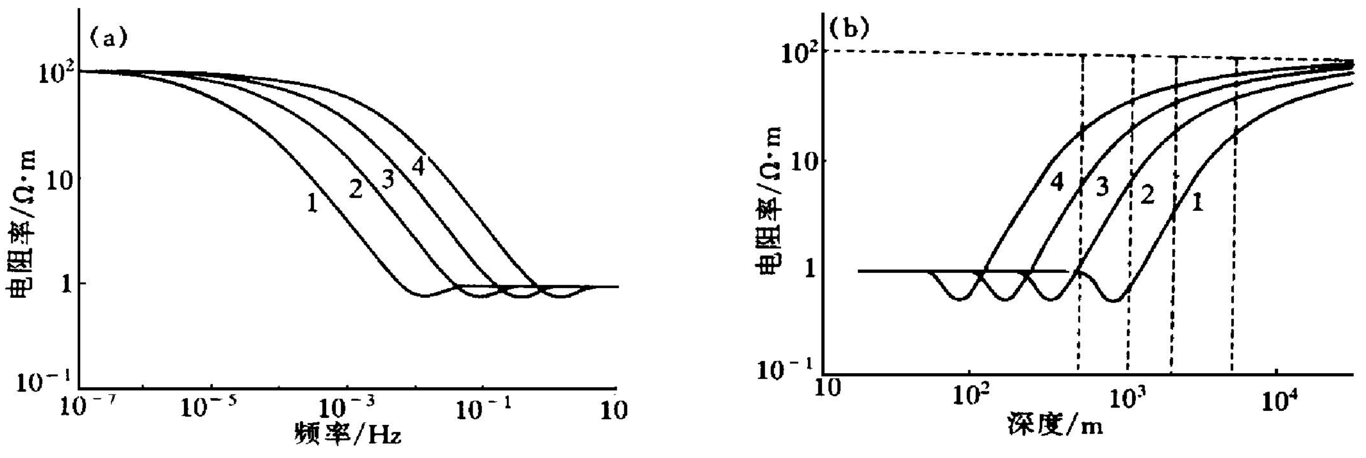

图 3　二层 G 型断面上的视深度反演结果

(a) 一测深曲线；(b) 一转换后曲线；曲线 1，2，3，4 分别对应于 h_1= 500，200，100，500(m)

而该方法对噪声特别敏感。小波变换的引入很好地解决了这一问题[5]。如图 5 是湖北某隧道掌子面上探地雷达工作记录复信号分析后的瞬时相位剖面和瞬时相位小波算子法成像结果。可见，利用小波变换很好地压制了复信号分析过程中放大的噪声，获得效果很好的探地雷达图像。

2.6 电磁波方程求解

在地球物理中，电磁波方法的正反演都涉及到电磁波方程的求解。电磁波方程求解过程耗时多少和计算精度的高低直接关系到电磁波勘探中各种反演方法的有效性。电磁波方程的求解大都是将积分或微分方程离散为矩阵方程，而这些矩阵常常是一些大的密矩阵。因此，其求解过程是一个耗时巨大且不稳定的过程。在解决实际电磁场问题时，我们希望能用小的计算量和存储空间以求得接近真值的精确解。我们知道，小波具有消失矩特性，可以将一大类线性积分算子的展开矩阵稀疏化，以达到节省计算量的目的；同时，小波的多尺度结构适合于构造多重网络自适应算法。因此，可用来很好地逼近微分(积分)方程的解。

如将小波分析的多尺度分析原理应用于 MT 反演中，通过多尺度分解，将一个大规模的反演问题分解为一系列依赖于尺度变量的小规模反演问题，求解时先从对应于最大尺度时的最小规模的反问题开始，其解作为分解系列中下一个较大规模的反问题的初始猜测。数值计算表明，该方法对初始模型的依赖性不高，解可以稳定地收敛到包含整体极小的一个小领

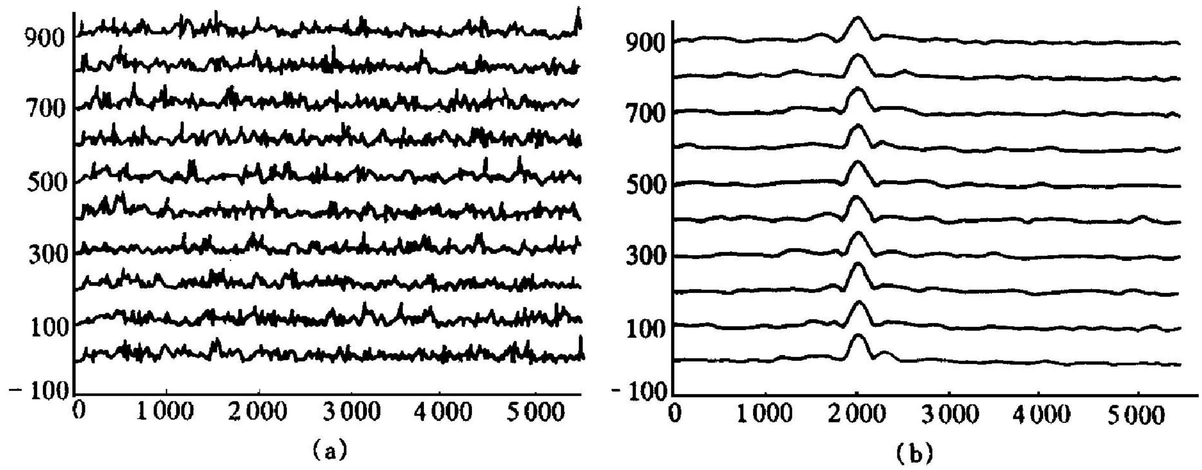

图 4 Bleistein 反射函数法对 $\alpha(x)$ 的成像结果(a)和小波算子对 $\alpha(x)$ 的成像结果(b)(尺度为 4)

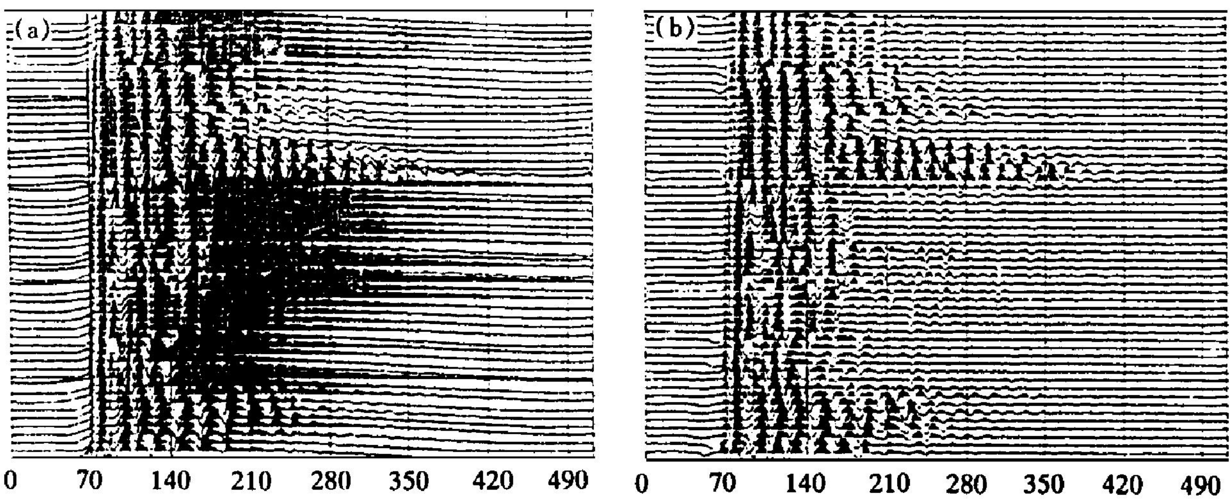

图 5 湖北某隧道探地雷达工作记录瞬时相位剖面(a)与瞬时相位小波算子法成像结果(b)

域内，分辨率明显提高[5]。

此外，根据小波变换的多尺度分析原理，信号可分解成不同的频率成分和通道，由此，可对地震道按各种频率成分进行分析、数字滤波、数据压缩等，将经过分解的数据用于地震反演，可提高层析成像的分辨率[6]。可以肯定，随着对小波变换认识的进一步加深和地球物理中新问题的出现，小波变换在地球物理中的应用将不断拓宽。

参考文献

1 Daubechies I. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 909-996.
2 何继善. 可控源音频大地电磁法. 长沙: 中南工业大学出版社, 1990: 106.
3 宋守根. 博士论文. 中南工业大学, 1994.
4 宋守根, 何继善. 中国有色金属学报, 1994, 4(3): 6-15.
5 肖　兵, 宋守根, 何继善. 物探与化探, 1996, 20(3): 304.
6 汤井田, 宋守根, 何继善. 中南矿冶学院学报, 1994, 25(5 Suppl): 29.
7 Song Shougen, He Jishan, Rui Jiating. Trans Nonferrous Met Soc China, 1994, 4(3): 1-4.
8 宋守根, 何继善. 中南工业大学学报, 1995, 26(4): 429.
9 侯遵泽, 杨文采. 中国地球物理学会年刊. 北京: 石油工业出版社, 1995: 199.
10 徐义贤. 博士论文. 中国地质大学, 1996.

APPLICATION OF WAVELET ANALYSIS IN GEOPHYSICAL PROSPECTING

He Jishan, Wen Peilin, Xiao Bing, Tang Jingtian, Song Shougen, Zhao Qiumei
New Geophysical Technology Institute of Central South University of Technology, Changsha 410083

ABSTRACT Wavelet analysis is a new tool for signal analysis, which has the property of the double localization in space-frequency domain and the focusing function. Based on the features of the wavelet analysis, wavelet analysis has large application value in geophysical prospecting which has special require for signal analysis tool. In this paper, the application results of wavelet analysis in geophysical prospecting were generalized. The practice proved that wavelet analysis has a rosy future in geophysical prospecting.

Key words wavelet analysis　geophysical prospecting　signal analysis

(编辑　何学锋)