

基于 FBM 的分形插值方法^①

戴前伟 彭振斌 何继善

(中南工业大学资源环境与建筑工程学院, 长沙 410083)

摘 要 系统阐述了分形插值的原理, 介绍了分形布朗运动(FBM)的概念及其构造方法, 针对自然界实际系统分形特性, 提出了实际 FBM 系统分形特性的判别准则。在此基础之上提出了基于 FBM 的分形插值方法, 阐述了分形插值的基本条件; 对于实际的裂隙结构, 利用分形插值方法建立的模型进行了渗流计算, 并与常规插值所得结果进行了比较。结果表明, 对于具有分形特性的实际的复杂、非线性系统, 利用基于 FBM 的分形插值方法从大尺度来构造微观细节, 能保持微观与宏观之间的相似性, 更能取得有效的结果。

关键词 分形 插值 布朗运动

中图法分类号 P631.14

客观世界在微观上也存在复杂的细节, 由于观测技术、方法以及条件等多方面的限制, 只能在较大尺度上进行观测。一般地, 当我们需要微观细节的特征时, 通常采用线性插值和样条拟合等手段从大尺度的观测数据来拟合小尺度的特征。这种插值方法总是基于研究对象在小尺度是线性、平滑的假设, 而实际上客观世界的微观细节也是复杂非线性的。分形理论^[1]认为, 自然界在微观尺度上与宏观尺度上存在着相似性, 这种相似性也得到了广泛的验证^[1-8]。美籍法国数学家曼德尔布罗特^[1](Mandelbrot B B)提出的分形理论用数学语言描述了微观与宏观的相似性。分形指的是这样一种标度不变性——系统的部分以某种方式与其整体相似的特性, 也称为自相似性或无标度性。由于复杂、不规则的分形对象其整体与局部具有(统计)相似性, 那么我们可以利用相似性, 从大尺度的数据插值拟合得到小尺度的信息。这种利用分形特性来进行插值与拟合的方法就是分形插值。分形插值方法由美国数学家 Barnsley^[2, 4]于 1986 年首先提出, 并得到了广

泛的应用。本文提出了一种基于分形布朗运动(FBM: Fractional Brownian Motion)的插值方法, 并实际应用于裂隙渗流模型, 结果表明, 基于 FBM 的分形插值方法, 能更好地拟合微观细节, 提高计算的精度。

1 分形布朗运动及其构造方法

1.1 分形布朗运动

我们称 $V_{H(t)}$ 为分形布朗运动(FBM)^[1], 如果 $V_{H(t_2)} - V_{H(t_1)}$ 符合高斯分布, 且其方差满足式(1):

$$\langle |V_{H(t_2)} - V_{H(t_1)}|^2 \rangle \propto |t_2 - t_1|^{2H} \quad (1)$$

式中 $\langle \rangle$ 表示整体平均, 以下同。其中 $0 < H < 1$ 。标准布朗运动是分形布朗运动 $H = 1/2$ 时的一个特例。

对于分形布朗运动, $V_{H(t)}$ 是处处连续但处处不可微的。尽管如此, 还是有很多方法来构造分形布朗运动^[2-4], 这些方法都是基于不断减小尺度来取 $V_{H(t)}$ 在其上的平均。

① 国家教委博士点基金资助项目 9453305 收稿日期: 1997-09-09; 修回日期: 1998-06-18

戴前伟, 男, 32 岁, 博士

图1给出不同 H 值的分形布朗运动。当 H 接近0时, 轨迹最粗糙, 而 H 接近1时, 轨迹相对平滑。 H 通过简单的缩放规律:

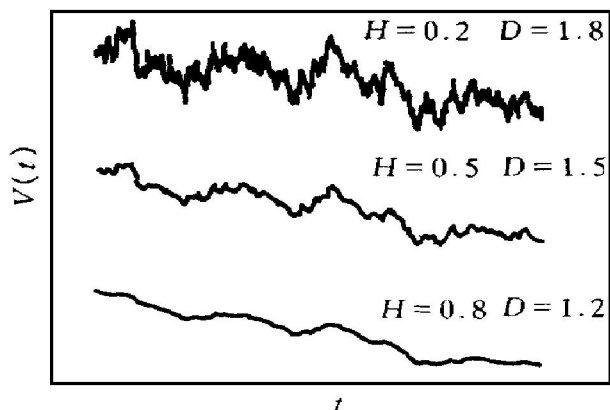


图1 不同 H 和 D 值的分形布朗运动的抽样

Fig. 1 FBM samples with different H and D

t —Sample scale; $V(t)$ —Sample value

t and $V(t)$ are dimensionless

$$\Delta H \propto \Delta t^H \quad (2)$$

把 $V_{H(t)}$ 的典型变化 $\Delta V_H = V_{H(t_2)} - V_{H(t_1)}$ 与 $\Delta t = t_2 - t_1$ 联系起来。 $V_{H(t)}$ 表示了统计上的尺度缩放过程。如果 t 改变因子 r , 则 $\Delta V_{H(t)}$ 增量改变因子 r^H , 即:

$$\langle \Delta V_{H(rt)}^2 \rangle \propto r^{2H} \langle \Delta V_{H(t)}^2 \rangle \quad (3)$$

也即分形布朗运动必须反映 t 坐标特殊状态的两个坐标中的不同缩放因子 r 和 r^H (r 对应于 t , r^H 对应于 V_H)。每个 t 坐标对应于唯一的 V_H , 但是一个 V_H 可以相应于多重 t 。这种非一致的尺度缩放称为自仿射性。

1.2 FBM 的构造

分形的自相似特性使得我们能利用简单的算法来构造复杂的分形形状。构造算法常常是一个迭代过程。如果分形在所有的尺度上都有无穷的复杂细节, 由于计算能力的限制, 则对分形的完全构造是不可能。正如实际的分形有其下限尺度一样, 对分形的构造也是在一定尺度以上的近似。利用FBM的性质我们可以用简单的方法来构造分形布朗运动。FBM的构造方法主要有随机中点偏移、连续随机叠加以及谱合成方法^[2, 4], 下面简单介绍随机中点偏移

算法。

考虑一个分形布朗运动 $V_{H(t)}$, 当 $\Delta t = 1$ 时, 变量 $V_{H(t+\Delta t)} - V_{H(t)}$ 的均值为零, 方差为 δ^2 , 从式(1)可知:

$$\langle |V_{H(t)} - V_{H(0)}|^2 \rangle = t^{2H} \delta^2 \quad (4)$$

设 $V_{H(0)} = 0$, $V_{H(-1)}$ 和 $V_{H(1)}$ 为一个具有方差 δ^2 的随机值, 则

$$V_{H(\pm 1/2)} = (V_{H(0)} + V_{H(\pm 1)})/2 + d_1 \quad (5)$$

式中 d_1 是均值为零, 方差为 d_1^2 的随机变量。

由式(3)可得

$$\text{Var}(V_{H(\pm 1/2)} - V_{H(0)}) = \frac{1}{2^H} \delta^2 \quad (6)$$

$$\text{Var}(V_{H(\pm 1)} - V_{H(0)}) = \delta^2 \quad (7)$$

综合式(5), (6)和(7)有

$$\frac{1}{2^H} \delta^2 = \frac{1}{4} \delta^2 + d_1^2 \quad (8)$$

即

$$d_1^2 = \frac{\delta^2}{2^H} (1 - 2^{2H-2}) \quad (9)$$

从式(6)和(9), 我们可以计算 $V_{H(\pm 1/2)}$, 同理, 我们能以 $V_{H(\pm 1/2)}$ 为新的起点计算 $V_{H(\pm 1/4)}$, 依照同样的方法, 取

$$d_n^2 = \frac{\delta^2}{(2^n)^{2H}} (1 - 2^{2H-2}) \quad (10)$$

进行迭代, 可以得到FBM更精细的结构, 上述在中点添加随机点构造FBM的方法称为随机中点偏移。图2为用中点偏移方法构造的

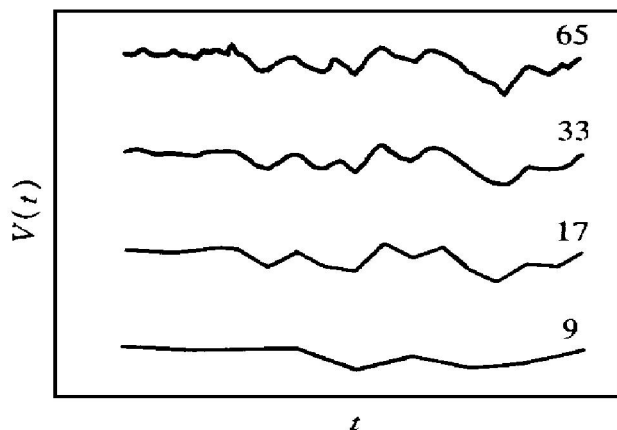


图2 中点偏移方法构造的分形布朗运动

Fig. 2 FBM sample built by the midpoint offset method

分形布朗运动。图中两点之间分别用 9, 17, 33 和 65 个点的迭代值表示。可见, 随着迭代深度(点)的增加, 随机中点偏移方法构造出分形布朗运动更细微的结构。

2 基于 FBM 构造的分形插值法

2.1 分形插值的基本假设

一般地说, 分形插值也不是万能的工具, 笔者认为它的应用基于以下的假设:

(1) 研究对象具有分形特性, 对于简单的、线性对象利用分形插值, 往往会弄巧成拙。

(2) 具有足够的大尺度数据或者其它先验的知识。如对于分形布朗运动, 我们应能从大尺度的数据得到其分维数, 中值和方差等参数。

(3) 要插值的小尺度与大尺度处在同一无标度区间。或者, 对于多重分形, 当小尺度与大尺度不是处于同一无标度区间, 我们能从其先验知识得到小尺度上的分形特性。

(4) 对于实际的研究对象, 认为其无标度区间总存在一定的下限, 在低于下限的小尺度上, 研究对象是简单、线性的, 或者认为小尺度上的复杂性对计算结果的影响可以忽略而认为其是简单和线性的。这一假设保证插值迭代过程是有限的, 而不是无法实践的无限次迭代。

根据自然界实际系统的分形特性^[1-8], 以上假设是合理的。

2.2 FBM 判断准则

从以上假设可以看出, 要对一个系统应用分形插值方法, 首先必须判断此系统是否是一个分形系统, 并且计算其分维数, 对于一维的系统, 我们可以根据下面的原则来判断一个实际系统是否为分形布朗运动。假设一个在区间 T 上的观测序列 $V(t)$, 其采样间距为 $\Delta t = \tau$, 研究 $V(t + n\tau)$ (n 为自然数) 与 $V(t)$ 之间的相关性, 一般地, 可以预料两者的相关程度随 n 的增大而减弱。令

$$\Delta V(\tau) = V(t + \tau) - V(t) \quad (11)$$

如果 $\Delta V(\tau)$ 满足概率条件

$$P(\Delta V(\tau)/\tau^H < V') = F(V') \quad (12)$$

也即序列 $V(t)$ 中每一点尽管是随机的, 但它们与邻值之间满足式(11)和(12)。如果 $0 < H < 1$, 而且 $F(\cdot)$ 为与 H 无关的高斯分布, 则 $V(t)$ 就是分形布朗运动(FBM); 当 $H = 1/2$ 时, $V(t)$ 就是常规的布朗运动。

另外, 对于一维的观测数据, 我们可通过计算盒维数的方法来判别其是否为分形布朗运动, 笔者在文献[3]中给出了实际系统观测数据分维数计算方法。

2.3 分形插值方法

如果实际观测数据具备 FBM 特性, 我们能用基于 FBM 构造的分形插值方法构造小于观测尺度上的细节。对于一个分形布朗运动 $V_H(t)$, 如果我们用实验得到了它在某一采样间距(尺度) Δt_1 的一个采样序列: $V_H(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$; $t_{i+1} - t_i = \Delta t_1$ 。首先, 我们对 $V_H(t_i)$ 在尺度 Δt_1 上进行分形分析和统计分析。利用分维数 D 求取 H , 或 $H = 2 - D$ 。利用数理统计的方法求取均方差 δ_1 , 或 $\delta_1^2 = \langle |V_H(t_{i+1}) - V_H(t_i)|^2 \rangle$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$)。然后, 在每个区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内利用 $V_H(t_i)$, $V_H(t_{i+1})$, H , δ_1 构造分形布朗运动 $V_H(t_{i,j})$ ($j = 1, \dots, m-1$), $t_{i,j+1} - t_{i,j} = \Delta t_2$, 且 $\Delta t_2 = \Delta t_1/m$ 。那么序列 $V_H(t_0)$, $V_H(t_{0,1})$, $V_H(t_{0,2})$, $\dots$, $V_H(t_{0,m-1})$, $V_H(t_1)$, $V_H(t_{1,1})$, $\dots$, $V_H(t_{1,m-1})$, $\dots$, $V_H(t_2)$, $\dots$, $V_H(t_{n-2})$, $\dots$, $V_H(t_{n-2,m-1})$, $V_H(t_{n-1})$, 为 $V_H(t)$ 在尺度 Δt^2 上的近似。

在构造 $[t_i, t_{i+1}]$ 上 $V_H(t)$ 的细节时, 我们可以采用 FBM 构造方法。由此可见, 如果采样序列 $V_H(t_i)$ 有足够的数据量来求取 H 和 δ_1 , 并且认为 $V_H(t)$ 在 Δt_2 尺度上具有与在 Δt_1 尺度上相同的分维数, 我们就可以构造新序列 $V_H(t_{i,j})$ 在 Δt^2 尺度上的近似。

3 实际应用

表 1 给出了实际裂隙进行采样后, 采用不同的模型进行渗透率 K 计算的结果^[3], 其中

表 1 实际裂隙各模型渗透率计算结果比较

Table 1 The permeability comparison of real fracture computed by different models

Sample	Real value	Model of parallel plate		Fractal model 1	
	K	K	$E/\%$	K	$E/\%$
A	51.4	294.1	472.2	49.2	4.2
B	25.9	207.1	699.6	27.6	6.5
C	4.8	240.1	4902.0	2.0	58.3
D	9.5	32.6	243.2	11.3	18.9
E	21.1	194.5	821.8	34.4	63.0
F	157.6	681.9	332.7	217.0	37.7

Note: K is permeability in m/d, E is redatively error

理论值是由 Brown^[7, 8] 在实验室观测得到的, 分形模型是对裂隙进行大尺度采样后, 进行基于 FBM 的分形插值, 构造裂隙细节后计算。平行板模型是按线形插值进行计算的, 咯米泽 Γ 模型是基于统计的模型。从表中我们可以看出, 对于实际裂隙, 咯米泽 Γ 模型与平行板模

型的精度相当。分形模型的精度远远的高于其它三种模型。另外, 基于 FBM 分形插值的模型计算简单、方便, 还能提供裂隙剖面中水位和水流速度分布的信息。

REFERENCES

- 1 Mandelbrot B B. *Physica Scripta*, 1985, 32(2), 257 – 260, .
- 2 Barneley M F, Devaney R L *et al.* *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, 1993: 38– 205.
- 3 Dai Qianwei(戴前伟). *Fractal Research on Fracture Seepages(裂隙渗流的分形研究)*. Changsha: Central South University of Technology Press, 1996.
- 4 Earnshaw R A ed. *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*. Springer-Verlag, 1985: 500– 1051.
- 5 Nolte D D, Pyrak-Note L J and Cook N G W. *PA-GEOPH*, 1987, 92(B1): 331– 334.
- 6 Brown S R and Scholz C H. *J Geophys Res*, 1985, 90: 4557– 4556, .
- 7 Tsang Y W and Tsang C F. *Water Resources Research*, 1987, 23(3): 467– 479.
- 8 Tsang Y W and Tsang C F. *Water Resources Research*, 1989, 25(9): 2076– 2080.

FRACTAL INTERPOLATION BASED ON FBM

Dai Qianwei, Peng Zhenbin and He Jishan

College of Resources, Environment and Civil Engineering,

Central South University of Technology, Changsha 410083, P. R. China

ABSTRACT The principle of the fractal interpolation was systematically discussed, the concept and constructing arithmetic of FBM were introduced, and the authors advanced the ruler to identify fractal property and the arithmetic of the fractal interpolation of real FBM system. Based on the fractal FBM interpolation, the authors advanced a fractal model of seepage of real fracture, and gave the comparison between the fractal model and orther model. The result proved that the method, that used FBM method to build the small scale date with the big scale date, could keep the similarity between the macrostructure and microstructure and got more useful result.

Key words fractal interpolation Brownian Motion

(编辑 何学锋)