

值域空间的正交分解与参数分组估计^①

卢秀山 欧吉坤

(中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077)

摘 要 在分析了向量空间中最小二乘原理的基础上, 依据 Hilbert 空间的可分性, 提出并论证了值域空间的正交分解定理及其推论, 从而揭示了从观测向量空间到值域空间的投影算子的特性, 提出了参数分组估计方法和相应的估计公式, 为研究参数向量间复共线性影响最小二乘估计质量提供了一种有效的方法。

关键词 Hilbert 空间 投影算子 参数估计

中图法分类号 P207

在基于 G-M 模型的参数估计中, 若参数系数阵列向量间存在近似线性关系(复共线性), 则会严重影响最小二乘估计质量。因此, 判定参数相关程度是一个重要问题。采用相关分析的方法, 可以分析两两参数间的相互关系, 但不能有效地分析一个参数与多个参数之间的相互关系。在实际问题中, 一个参数与多个参数之间存在复共线性更为多见, 因此, 解决这一问题更具有实际意义。

本文将在简要介绍向量空间中的最小二乘原理的基础上, 论述观测向量空间的子空间—值域空间^[1]的可分性, 论证值域空间的正交分解定理及其推论, 从而揭示从观测向量空间到值域空间的投影算子的这一基本特性。根据值域空间正交分解定理及推论, 提出参数分组估计的方法和公式, 给出判定一个参数向量与多个参数向量复共线性的方法。具体方法是, 将参数分为两类: 基本参数和备选参数, 用提出的方法对备选参数一一分析, 就备选参数对于基本参数复共线性的强弱予以排序。

1 向量空间中的参数估计

1.1 向量空间中的最小二乘原理

当在向量空间中研究参数估计理论时, 定义观测值向量 $L \in H_L$, H_L 为 n 维观测向量空间。在 H_L 上引进概率测度 P , 则 H_L 为概率测度空间。在 H_L 中选择一基底后, 定义内积为

$$\forall L, L' \in H_L: \langle L, L' \rangle = L^T P L' \in \mathbf{R} \quad (\text{实数域})$$

由内积导出的范数为

$$\forall L \in H_L: \|L\| = \sqrt{\langle L, L \rangle} \in \mathbf{R}$$

定义距离 d 为

$$\begin{aligned} \forall L, L' \in H_L: d(L, L') &= \|L - L'\| \\ &= \sqrt{(L - L')^T P (L - L')} \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

H_L 是有限维内积空间, 因而完备, 故 H_L 是 n 维 Hilbert 空间。

将 H_L 正交分解为 H_A 和 H_B , 即

$$H_L = H_A \oplus H_B \quad (H_A \cap H_B = 0)$$

其中 H_A 为 t 维子空间, 由参数系数阵 A 的列向量张成, 也称为值域空间; H_B 为 r 维子空间, 由垂直于 A 的向量张成, $H_B = H_A^\perp$; 且 $t + r = n$ 。

将 L 投影到 H_A 中, 有投影算子 J_A , 则

$$J_A: L \rightarrow L \in H_A \quad L = J_A L \quad (1)$$

将 L 投影到 H_B 中, 有投影算子 $J_B = E - J_A$,

① 收稿日期: 1998-01-12; 修回日期: 1998-05-06 卢秀山, 男, 37 岁, 副教授, 博士

则

$$J_B: L \rightarrow V \in H_B, \quad V = J_B L \quad (2)$$

由于 $V = (L - \hat{L}) \perp H_A$

$$\begin{aligned} \text{故有 } \|L - \hat{L}\| &= (L - \hat{L})^T P (L - \hat{L}) \\ &= V^T P V = \min \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)表示向量空间中的最小二乘原理, 式(1)中的 $\hat{L}$ 为观测值的平差值向量, 式(2)中的 V 为观测值的改正数向量。

基于 G-M 模型的最小二乘解为

$$\left. \begin{aligned} \hat{L} &= AX = J_A L = A(A^T P A)^{-1} A^T P \\ V &= -(L - AX) = -J_B L = -(E - J_A) L \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} J_A &= A(A^T P A)^{-1} A^T P \\ J_B &= E - J_A \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1.2 投影算子 J_A 的分解

由式(4)、(5)知, 研究向量空间参数估计的问题, 可以通过研究投影算子 J_A 来完成, 因而, 先将 J_A 进行分解。

将参数 X 分为两组, 它们为 $X_{t_1 \times 1}$, $X_{t_2 \times 1}$ ($t_1 + t_2 = t$)。相应的系数阵 A 可分解为: $A = (A_1 | A_2)$ 。因而, 投影算子 J_A 可分解为

$$\begin{aligned} J_A &= A(A^T P A)^{-1} A^T P \\ &= (A_1 A_2) \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P (A_1 A_2)^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} P \end{aligned}$$

将上式展开, 并令

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= A_1(A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P \\ J_2 &= A_2(A_2^T P (E - J_1) A_2)^{-1} A_2^T P \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则有

$$\begin{aligned} J_A &= J_1 + J_1 J_2 J_1 - J_2 J_1 - J_1 J_2 + J_2 \\ &= J_1 + (E - J_1) J_2 (E - J_1) \end{aligned} \quad (7)$$

2 值域空间的分解定理

2.1 值域空间的可分性

因为值域空间 H_A 是 H_L 的子空间, 而 H_L

是有限维 H 空间, 由可分 H 空间定理及子空间定理知, H_A 是可分的。

由于值域空间是由矩阵 A 的列向量张成, 值域子空间也是由 A 的分块阵的列向量张成, 因此, A 阵子块的相互关系, 也就决定了值域子空间之间的关系。为使问题简化, 定义 A 阵子块正交。

2.2 值域空间的正交分解

设 $A = (A_1 | A_2)$, 且 $A_1 \perp A_2$ 。将 H_A 分解为 H_{A_1} 和 H_{A_2} , H_{A_1} 由 A_1 的列向量张成, H_{A_2} 由 A_2 的列向量张成, 且 $t_1 + t_2 = t$ 。由于

$$\dim(H_A) = \dim(H_{A_1}) \oplus \dim(H_{A_2})$$

故有

$$H_A = H_{A_1} \oplus H_{A_2}$$

因而

$$\forall L \in H_A, \quad L = L_1 + L_2, \quad L_1 \in H_{A_1}, \quad L_2 \in H_{A_2}$$

$\exists J_{A_1}, J_{A_2}$ 使得: $L_1 = J_{A_1} L$, $L_2 = J_{A_2} L$, 且 J_{A_1}, J_{A_2} 为投影算子, 它们应满足下面关系式:

$$\left. \begin{aligned} J_{A_1} + J_{A_2} &= J_A, & J_{A_1} A_1 &= A_1 \\ J_{A_1} J_{A_2} &= 0, & J_{A_1} A_2 &= 0 \\ J_{A_2} J_{A_1} &= 0, & J_{A_2} A_1 &= 0 \\ J_{A_1} J_{A_1} &= J_{A_1}, & J_{A_2} A_2 &= A_2 \\ J_{A_2} J_{A_2} &= J_{A_2} \end{aligned} \right\} L \in L \quad (8)$$

考察式(6), 令

$$\left. \begin{aligned} J_{A_1} &= J_1 = A_1(A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P \\ J_{A_2} &= J_2 |_{A_1^\perp A_2} = A_2(A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T P \end{aligned} \right\} \text{维} \quad (9)$$

则不难验证式(9)所定义的 J_{A_1}, J_{A_2} 满足式(8)的所有条件。

2.3 值域正交分解定理

定理 若值域空间正交分解为 k ($2 \leq k \leq t$) 个子空间, 则由观测向量空间到值域空间的投影算子可正交解为 k 个。

证(归纳法):

① $k=2$ 已证;

②设 $k=k-1$ 时定理成立, 则

$$J_A = \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i} + (E - \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i}) J_k (E - \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i})$$

$$J_k = A_k (A_k^T P (E - \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i}) A_k)^{-1} A_k^T P$$

因 H_A 正交分解为 k 个子空间, 而由 A_k 张成 H_{A_k} , 显然

$$H_{A_k} \cap H_{A_i} = 0 \quad (i \neq k)$$

因而 H_{A_k} 为任一 $J_{A_i} (i \neq k)$ 的零空间。故

$$(\sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i}) A_k = \sum_{i=1}^{k-1} (J_{A_i} A_k) = 0$$

令 $J_{A_k} = J_k |_{A_k \perp A_i} \quad (i \neq k)$

$$= A_k (A_k^T P A_k)^{-1} A_k^T P$$

不难验证 J_{A_k} 满足投影算子的一切性质。故有

$$J_A = \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i} + (E - \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i}) J_k (E - \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i}) |_{A_k \perp A_i} \quad (i \neq k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} J_{A_i} + J_{A_k} = \sum_{i=1}^k J_{A_i} \quad \text{证毕。}$$

推论 若由观测向量空间到值域空间的投影算子可正交分解, 则观测向量可直接向值域子空间投影, 结果不变。

证:

①值域空间正交分解为两个空间时, 因为

$$\bar{L} = J_A \bar{L} = (J_{A_1} + J_{A_2}) \bar{L}$$

所以 $\bar{L}_1 = J_{A_1} \bar{L} = J_{A_1} (J_{A_1} + J_{A_2}) \bar{L}$

$$= J_{A_1} \bar{L}$$

(因为 $J_{A_1} J_{A_2} = 0, J_{A_1} J_{A_1} = J_{A_1}$)

$$\bar{L}_2 = J_{A_2} \bar{L} = J_{A_2} (J_{A_1} + J_{A_2}) \bar{L}$$

$$= J_{A_2} \bar{L}$$

$$\bar{L}_1 + \bar{L}_2 = J_{A_1} \bar{L} + J_{A_2} \bar{L} = (J_{A_1} + J_{A_2}) \bar{L}$$

$$= J_A \bar{L} = \bar{L}$$

②值域空间正交分解为 $k (2 \leq k \leq t)$ 个子空间时, 因为

$$J_A = J_{A_1} + J_{A_2} + \dots + J_{A_k} \quad (2 \leq k \leq t)$$

$$\bar{L} = J_A \bar{L} = (J_{A_1} + J_{A_2} + \dots + J_{A_k}) \bar{L}$$

又

$$J_{A_i} J_{A_j} = \begin{cases} J_{A_i} & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

所以

$$\bar{L}_i = J_{A_i} \bar{L} = J_{A_i} (J_{A_1} + J_{A_2} + \dots + J_{A_k}) \bar{L}$$

$$= J_{A_i} \bar{L}$$

$$\sum_{i=1}^k \bar{L}_i = J_{A_1} \bar{L} + J_{A_2} \bar{L} + \dots + J_{A_k} \bar{L}$$

$$= (J_{A_1} + J_{A_2} + \dots + J_{A_k}) \bar{L}$$

$$= J_A \bar{L} = \bar{L} \quad \text{证毕。}$$

3 参数分组估计

3.1 投影算子

在参数估计问题中, 参数的系数阵的列向量之间一般不正交。因而, 尽管值域空间可以分解, 但却不易直接正交分解。用格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化方法可以对 A 的线性无关向量进行正交化, 但已使问题复杂化了。

值域正交分解的目的, 是应用值域分解定理, 用正交分解后的投影算子分别将观测值向量向值域子空间投影。因而, 如果可以确定经正交分解的投影算子, 即可应用正交分解定理的推论, 对一般参数估计问题实施分组估计。

令 H_A 正交分解为 $\bar{H}_{A_1}$ 和 $\bar{H}_{A_2}$, 即

$$H_A = \bar{H}_{A_1} \oplus \bar{H}_{A_2}$$

则 $\forall \bar{L} \in H_A, \bar{L} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2,$

$$\bar{L}_1 \in \bar{H}_{A_1}, \bar{L}_2 \in \bar{H}_{A_2}$$

$\exists \tilde{J}_{A_1}, \tilde{J}_{A_2}$ 使得 $\bar{L}_1 = \tilde{J}_{A_1} \bar{L}, \bar{L}_2 = \tilde{J}_{A_2} \bar{L}$, 那么投影算子 $\tilde{J}_{A_1}$ 和 $\tilde{J}_{A_2}$ 应满足下面关系式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{J}_{A_1} + \tilde{J}_{A_2} &= J_A, & \tilde{J}_{A_1} A_1 &= A_1 \\ \tilde{J}_{A_1} \tilde{J}_{A_2} &= 0, & \tilde{J}_{A_1} A_2 &= 0 \\ \tilde{J}_{A_2} \tilde{J}_{A_1} &= 0, & \tilde{J}_{A_2} A_1 &= 0 \\ \tilde{J}_{A_1} \tilde{J}_{A_1} &= \tilde{J}_{A_1}, & \tilde{J}_{A_2} A_2 &= A_2 \\ \tilde{J}_{A_2} \tilde{J}_{A_2} &= \tilde{J}_{A_2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

考察式(6)和式(7), 令

$$\left. \begin{aligned} \tilde{J}_{A_1} &= J_1 (E - \tilde{J}_{A_2}) \\ \tilde{J}_{A_2} &= 0 J_2 (E - J_1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

下面验证式(11)定义的 $\tilde{J}_{A_1}$ 和 $\tilde{J}_{A_2}$ 满足(10)的所有条件:

$$\textcircled{1} \quad \tilde{J}_{A_1} + \tilde{J}_{A_2} = J_1 (E - \tilde{J}_{A_2}) + J_2 (E - J_1)$$

$$= J_1 - J_1 J_2 (E - J_1) + J_2 (E - J_1)$$

$$= J_1 + (J_2 - J_1 J_2)(E - J_1)$$

$$= J_1 + (E - J_1) J_2 (E - J_1)$$

$$= J_A$$

$$\textcircled{2} \tilde{J}_{A_2} \tilde{J}_{A_2} = J_2 (E - J_1) J_2 (E - J_1)$$

$$= A_2 (A_2^T P (E - J_1) A_2)^{-1} A_2^T P (E - J_1)$$

$$A_2 (A_2^T P (E - J_1) A_2)^{-1} A_2^T P (E - J_1)$$

$$= A_2 (A_2^T P (E - J_1) A_2)^{-1} A_2^T P (E - J_1)$$

$$= J_2 (E - J_1)$$

$$= \tilde{J}_{A_2}$$

$$\textcircled{3} \tilde{J}_{A_2} A_1 = J_2 (E - J_1) A_1$$

$$= J_2 (A_1 - J_1 A_1)$$

根据式(8)有 $J_1 A_1 = A_1$

故 $\tilde{J}_{A_2} A_1 = 0$

$$\textcircled{4} \tilde{J}_{A_2} A_2 = J_2 (E - J_1) A_2$$

$$= A_2 (A_2^T P (E - J_1) A_2)^{-1} A_2^T P (E - J_1) A_2$$

$$= A_2$$

$$\textcircled{5} \tilde{J}_{A_1} \tilde{J}_{A_1} = J_1 (E - \tilde{J}_{A_2}) J_1 (E - \tilde{J}_{A_2})$$

$$= (J_1 - J_1 \tilde{J}_{A_2}) (J_1 - J_1 \tilde{J}_{A_2})$$

$$= J_1 J_1 - J_1 J_1 \tilde{J}_{A_2} - J_1 \tilde{J}_{A_2} J_1 + J_1 \tilde{J}_{A_2} J_1 \tilde{J}_{A_2}$$

$$= J_1 - J_1 \tilde{J}_{A_2} - J_1 \tilde{J}_{A_2} J_1 + J_1 \tilde{J}_{A_2} J_1 \tilde{J}_{A_2}$$

(J_1 为幂等阵)

因为 $\tilde{J}_{A_2} J_1 = J_2 (E - J_1) J_1 =$

$$J_2 (J_1 - J_1 J_1) = 0$$

所以 $\tilde{J}_{A_1} \tilde{J}_{A_1} = J_1 - J_1 \tilde{J}_{A_2} =$

$$J_1 (E - \tilde{J}_{A_2}) = \tilde{J}_{A_1}$$

利用①~⑤的结果,容易证明式(10)的其余各式。

3.2 参数分组估计

对于 G-M 模型,根据值域正交分解定理推论有

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= A_1 X_1 = \tilde{J}_{A_1} L \\ L_2 &= A_2 X_2 = \tilde{J}_{A_2} L \\ V &= -(E - J_A) L \\ &= -(E - \tilde{J}_{A_1} - \tilde{J}_{A_2}) L \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(1) 参数分组

设 X 为 G-M 模型下的待估参数,已知其中确定性待估参数为 X_1 ,简称为基本参数;那些确实与观测值向量 L 有关,但其影响规律尚不完全明确的参数记为 X_2 ,称为备选参数。

某些备选参数可能与基本参数具有复共线性,并将影响 X 的最小二乘估计质量。

我们知道,若仅估计 X_1 ,则有

$$\left. \begin{aligned} L_1^{(0)} &= A_1 X_1^{(0)} = J_{A_1} L \\ V_1^{(0)} &= -(E - J_{A_1}) L \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

若备选参数参与估计,考察式(12)第一式有

$$\begin{aligned} L_1 &= A_1 X_1 = \tilde{J}_{A_1} L = J_{A_1} L - J_{A_1} \tilde{J}_{A_2} L \\ &= A_1 X_1^{(0)} - A_1 \Delta X_1 \\ &= A_1 (X_1^{(0)} - \Delta X_1) \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= (A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P \tilde{J}_{A_2} L \\ &= (A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P A_2 X_2 \end{aligned}$$

考察式(12)第3式,有

$$\begin{aligned} V &= -(E - \tilde{J}_{A_1} - \tilde{J}_{A_2}) L \\ &= -(E - J_{A_1}) L - (J_{A_1} - E) \tilde{J}_{A_2} L \\ &= V_1^{(0)} - (J_{A_1} - E) J_2 (E - J_{A_1}) L \\ &= V_1^{(0)} + (J_{A_1} - E) J_2 V_1^{(0)} \\ &= (E - (E - J_{A_1}) J_2) V_1^{(0)} \end{aligned} \quad (15)$$

式(14)表明,当备选参数参与估计时,备选参数对基本参数的估计有影响,影响量与 $J_{A_1} \tilde{J}_{A_2}$ 有关。

如果 X_2 中某些参数与 X_1 存在复共线性,将严重影响 X_1 的估计质量,因此,可以采用参数分组估计的方法,对 X_2 中的所有参数进行复共线性排队,剔除复共线性较强的参数,以保证模型精度和参数最小二乘估计质量。

(2) 伪残差

定义

$$\left. \begin{aligned} V_{f1} &= -(E - \tilde{J}_{A_1}) L \\ V_{f2} &= -(E - \tilde{J}_{A_2}) L \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

为伪残差。式(16)中:

$$\begin{aligned} V_{f1} + V_{f2} &= -(E - \tilde{J}_{A_1}) L - (E - \tilde{J}_{A_2}) L \\ &= -L - (E - \tilde{J}_{A_1} - \tilde{J}_{A_2}) L \\ &= -L + V \neq V \end{aligned}$$

(3) 参数选择与估计质量

①增加必要的参数,会使 $M = V^T P V$ 减小。但是,当备选参数与 X_1 存在复共线时,由

于 X_1 与 L 的关系不准确, 将使 M 明显增大。

在备选参数 X_2 中, 逐一选取一参数, 与基本参数 X_1 一起进行参数估计。计算:

$M_i = V_i^T P V_i$ (i 与备选参数序号同) (17)

若 $M_k = \max\{M_i\}$ (18)

且需剔除一些不利参数以保证基本参数估计质量, 则应首选剔除第 k 个备选参数。

②对于

$\tilde{J}_{A_2} = J_2(E - J_{A_1})$

由于

$J_2 = A_2(A_2^T P(E - J_{A_1})A_2)^{-1}A_2^T P$

当

$A_2 \perp A_1^\perp$ 时,

有

$J_{A_1}A_2 = A_2$

$J_2 = A_2(A_2^T PA_2 - A_2^T PJ_{A_1}A_2)^{-1}A_2^T P$
 $= \infty$

因而当 A_2 与 A_1 部分向量近似共线时, J_2 会变得相当大, $\tilde{J}_{A_2}$ 也会随之增大。 $\tilde{J}_{A_1}$, V_{f_2} 和 V_{f_1} 随 $\tilde{J}_{A_2}$ 的变化规律为:

当 $\tilde{J}_{A_2}$ 增大时, $\tilde{J}_{A_1}$ 减小, V_{f_2} 减小, V_{f_1} 增大。

因而, V_{f_2} 和 V_{f_1} 可以有效地反应参数间的相关程度, 以及估计质量。

用基本参数系数阵计算 J_{A_1} , 在备选参数 X_2 中逐一选取一参数, 用其系数向量计算

$\tilde{J}_{A_2}$, 并计算 $\tilde{J}_{A_1}$; 按式(16)计算伪残差 $V_{f_1}^{(i)}$, $V_{f_2}^{(i)}$ 及

$M_{f_1}^{(i)} = V_{f_1}^{(i)T} P V_{f_1}^{(i)}$
 $M_{f_2}^{(i)} = V_{f_2}^{(i)T} P V_{f_2}^{(i)}$ (19)

上式中 i 与备选参数序号相同。若

$M_{f_1}^{(k)} = \max\{m_{f_1}^{(i)}\}$
 $M_{f_2}^{(k)} = \min\{m_{f_2}^{(i)}\}$ (20)

且怀疑某备选参数与基本参数近似共线时, 则应首先分析第 k 个备选参数。

结合 ①和 ②, 可判定参数间的相关程度, 有效地遴选参数, 以保证参数估计质量。

(4) 例题

如表 1 所列, X_1 , X_2 和 X_3 为基本参数, X_4 , X_5 和 X_6 为备选参数。表中 X 栏的数据为相应的列向量, 观测向量为 L 。按参数分组估计法, 分别将 X_4 , X_5 和 X_6 的列向量作为 A_2 进行分组估计, 按式(17)和(19)计算 M 。综合式(18)和(20)判断知, X_6 与 X_1 复共线性最强, X_5 次之。

4 结论

(1) 参数分组估计是判定一个问题中备选参数向量与基本参数向量复共线性强弱的有效方法。它可以作为是否剔除某备选参数的主要依据之一。

表 1 例题数据表

Table 1 Data of an example

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	L	M
- 1	2	5	0. 5	0. 8	0. 6	61. 40	$M_4 = 0. 042$
2	2	4	0. 2	0. 4	1. 2	82. 15	$M_{f_1}^{(4)} = 85. 490$
3	1	4	0. 8	1. 4	1. 4	81. 82	$M_{f_2}^{(4)} = 36812. 477$
- 5	- 1	2	0	- 0. 5	- 1. 0	- 51. 82	$M_5 = 2. 450$
4	- 1	- 2	0	0. 4	0. 8	10. 86	$M_{f_1}^{(5)} = 150. 619$
- 1	- 1	- 2	0. 4	0. 3	0. 2	- 37. 12	$M_{f_2}^{(5)} = 35333. 465$
1	3	1	0	0. 1	0. 2	63. 79	$M_6 = 12. 869$
5	2	3	0. 1	0. 6	1. 1	104. 90	$M_{f_1}^{(6)} = 269. 623$
2	- 3	- 1	0. 5	0. 7	0. 9	- 29. 06	$M_{f_2}^{(6)} = 34051. 106$
3	- 3	- 2	0	0. 3	0. 6	- 30. 10	

(2) 参数分组估计是用来分析增加参数对参数估计质量影响的一种有效方法。

(3) 值域空间正交分解定理及其推论揭示了从观测向量空间到值域空间的投影算子的一个基本特性。

(4) 值域空间的分解定理和参数的分组估计是大地测量中分区平差理论的一般说明。

REFERENCES

- 1 Huang Weibin(黄维彬). Jindai Pingcha Lilun Jiqi Yingyong(近代平差理论及其应用). Beijing: Jiefangjun Press. 1992: 84– 87, 404– 415.
- 2 Cui Xizhang(崔希璋) *et al.* Guangyi Celiang Pingcha(广义测量平差). Beijing: Surveying and Mapping Press. 1992: 194– 199.
- 3 Erwin Kreyszig(University of Windsor). Introductory Functional Analysis with Applications. Beijing: Beijing Hangkong Institute Press. 1987: 80– 100, 304– 307.
- 4 Zhou Jiangwen(周江文) *et al.* Kangcha Zuixiao Erchengfa(抗差最小二乘法). Wuhan: Huazhong University Press. 1997: 63– 65.
- 5 Beijing Daxue Shuxuexi Daishu Xiaozu(北京大学数学系代数小组). Gaodeng Daishu(高等代数). Beijing: Gaodeng Jiaoyu Press 1988: 386– 391.
- 6 Ye Songlin(叶松林) and Zhu Jianjun(朱建军). The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报), 1998, 8(1): 160– 164.
- 7 Hu Qingjun(胡庆军). Mathematics in Practice and Theory, 1995, (4): 55– 62.
- 8 Dai Boxin(戴伯新). Mathematics in Practice and Theory, 1989, (4): 53– 61.

ORTHOGONAL RESOLUTION OF VALUE FIELD SPACE AND METHOD OF PARAMETER GROUPED ESTIMATE

Lu Xiushan and Ou Jikun

*Institute of Measure and Geophysics, Chinese Academy of Sciences,
Wuhan 430077, P. R. China*

ABSTRACT Having briefly introduced the principle of least-squares in vector space, based on the resolvable character of limited dimensions Hilbert space, the mutual orthogonal resolution theorem of value domain space and its deduction have been offered and demonstrated. Therefore, it revealed the specific property of projection operator which projects observation vectors from observation vector space to corresponding value domain space. According to the theorem and its deduction, the method of parameter grouped estimate as well as relevant estimate formula has been advanced. It provided one kind of effective method by which to study that the multicollinearity among the parameter vectors could effect the qualities of least-squares estimation.

Key words Hilbert space projection operator parameter estimate

(编辑 何学锋)