

水力旋流器内固液两相间的相对运动(I)^①

——颗粒运动方程及其求解

徐继润 罗 茜[†]

(大连大学化学与化学工程系, 大连 116622)

[†] (东北大学资源与环境工程系, 沈阳 110006)

摘 要 从 BBO 方程求解水力旋流器内颗粒与流体的相对运动是一项新的尝试。通过求解 BBO 方程, 给出了描述水力旋流器内固体颗粒与流体介质相对运动的跟随性指标。结果表明, 在忽略重力影响的前提下, 颗粒在切向及轴向与流体具有相同的跟随特性; 而由于离心力的存在, 颗粒在径向的运动将明显有别于流体介质。根据跟随性指标 η , φ 的数学表达式, 可以定量地考察诸如颗粒性质、流体特性、空间位置、湍流频率等因素对颗粒运动的影响。

关键词 水力旋流器 颗粒运动 BBO 方程

中图法分类号 TQ021.1

水力旋流器内液体介质的三维(即切向、轴向与径向)运动一直是旋流器流场研究的主要内容。迄今为止, 尽管在某些方面意见并不一致(如液流径向速度的分布态势^[1, 2]), 或在某些方面仍有待深入探讨(如湍流问题、循环流问题等^[3]), 但就总体来看, 人们对液流运动的了解程度已为分析固体颗粒的运动提供了比较可靠的基础。

对水力旋流器内固体颗粒运动的研究应该说比对液流运动的研究具有更为重要的意义, 不过也更为困难; 因为现有的两相流理论以及测试技术还难以胜任这样的工作, 尤其当颗粒浓度较高的时候。因此我们对旋流器内颗粒运动的认识目前只能局限于离心沉降^[4]、平衡轨道^[5, 6]、停留时间^[7]等等这样的理论上(当然这些理论的重要性是不言而喻的), 而对颗粒运动状态的描述要明显落后于对液流运动的研究。

本文借助于经典的 BBO 方程, 对水力旋

流器内颗粒与介质的相对运动进行了理论解析, 给出了在切向、轴向、径向等三个方向上固体颗粒与流体介质的跟随性指标, 根据这些指标可以对固体颗粒的运动作出定性与定量的分析。

1 描述颗粒运动的 BBO 方程

运用 BBO 方程描述湍动两相流中的颗粒运动, 严格说来须符合如下条件^[8]: ①流体湍流是均匀且定常的; ②湍流的范围是空间无限的; ③颗粒是球形的, 且与周围流体的相对运动符合 Stokes 定律; ④颗粒直径比湍流中的最小旋涡尺度还小; ⑤在颗粒运动期间, 其邻域由相同的流体组成; ⑥作用在颗粒上的外力只来源于位势场。在水力旋流器内, 上述条件除 ③、④、⑥可基本满足外, 其余的较难成立, 因此运用 BBO 方程描述水力旋流器内固体颗粒与液体介质间的相对运动是一种近似

① 国家教委优秀年轻教师基金资助课题

收稿日期: 1997-11-25; 修回日期: 1998-03-23

徐继润, 男, 43岁, 博士, 教授

的方法。不过我们将会看到, BBO 方程较之于通常所用的有效离心力与阻力的平衡关系式(该关系式实际上是 BBO 方程的简化形式)毕竟考虑了更多的影响因素(如湍流频率等), 因而更全面地符合颗粒运动的实际情况。

在水力旋流器内, 描述颗粒与介质间相对运动的 BBO (Basset-Boussinesq-Oseen) 方程^[8]如下:

$$\begin{aligned} \frac{\pi x^3}{6} \rho_p \frac{du_p}{dt} = & 3\pi\mu x (u_f - u_p) + \\ & \frac{\pi x^3}{6} \rho_f \frac{du_f}{dt} + \frac{\pi x^3}{12} \rho_f \left(\frac{du_f}{dt} - \frac{du_p}{dt} \right) + \\ & \frac{3x^3}{2} \sqrt{\pi\mu\rho_f} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{du_f}{d\tau} - \frac{du_p}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + F_c \quad (1) \end{aligned}$$

式中 ρ_p , ρ_f 分别为粒子及流体密度; u_p , u_f 分别为粒子及流体的速度; x 为粒子直径; μ 为介质粘度。

式(1)中各项的物理意义如下: 左边项表示加速粒子所需的力; 右边第1项为斯托克斯粘性阻力, 第2项为流体加速度对粒子的附加推力, 第3项表示粒子加速运动的附加质量效应, 第4项叫 Basset 力、其大小与粘性流体的不定常运动有关, 第5项为外部位势力(如重力、离心力等)。

将式(1)运用到水力旋流器内的固体颗粒与运动流体时, 沿不同的运动方向, 除外部位势力外, 其余各项的形式是一致的。在切向, 无外部位势力作用, 即

$$F_{c\theta} = 0 \quad (2)$$

在轴向, 外部位势力为重力, 但是由于在水力旋流器内重力的作用可以忽略, 所以

$$F_{cz} = 0 \quad (3)$$

在径向, 外部位势力是由切向速度引起的离心力与浮力(前者的方向与流体运动方向相反, 后者则相同):

$$F_{cr} = \frac{\pi x^3}{6} \left(\rho_p \frac{u_{p\theta}^2}{r} - \rho_f \frac{u_{f\theta}^2}{r} \right) \quad (4)$$

式中 r 为流动半径。

将式(2)、(3)和(4)代入式(1), 整理可得沿旋流器内切向、轴向及径向的 BBO 方程依

次如下:

$$\begin{aligned} \frac{du_{p\theta}}{dt} + au_{p\theta} = & au_{f\theta} + b \frac{du_{f\theta}}{dt} + \\ & c \int_{-\infty}^t \frac{\frac{du_{f\theta}}{d\tau} - \frac{du_{p\theta}}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{pz}}{dt} + au_{pz} = & au_{fz} + b \frac{du_{fz}}{dt} + \\ & c \int_{-\infty}^t \frac{\frac{du_{fz}}{d\tau} - \frac{du_{pz}}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{pr}}{dt} + au_{pr} - eu_{p\theta}^2 = & au_{fr} + b \frac{du_{fr}}{dt} - \\ & hu_{f\theta}^2 + c \int_{-\infty}^t \frac{\frac{du_{fr}}{d\tau} - \frac{du_{pr}}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (7) \end{aligned}$$

上列诸式中:

$$\begin{aligned} a = & \frac{36\mu}{(2\rho_p + \rho_f)x^2} \\ b = & \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f} \\ c = & \frac{18}{(2\rho_p + \rho_f)x} \sqrt{\frac{\mu\rho_f}{\pi}} \\ e = & \frac{2\rho_p}{(2\rho_p + \rho_f)r} \\ h = & \frac{2\rho_f}{(2\rho_p + \rho_f)r} \end{aligned}$$

2 水力旋流器内 BBO 方程的解

考虑到水力旋流器内的流体介质作湍流运动, 而湍流速度可看作一系列不同频率的脉动讯号的叠加, 从而 u_f 可展开为傅里叶积分:

$$u_f = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (8)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, $A(\omega)$ 为复振幅, ω 为湍流脉动频率。

粒子的运动与流体的偏离体现在振幅及相角的不同上, 从而 u_p 可写为:

$$u_p = \int_{-\infty}^{\infty} \eta A(\omega) \exp[-i(\omega t + \varphi)] d\omega \quad (9)$$

式中 η 为固体粒子的振幅与流体质点的振

幅之比, φ 为固体粒子与流体质点之间的相位之差。显然, η 及 φ 为湍流频率 ω , 粒子直径 x , 密度 ρ_p , 流体密度 ρ_f , 旋转半径 r 的函数。 η , φ 的不同取值, 表明颗粒与流体的不同跟随特性。若 $\eta = 1$, $\varphi = 0$, 则颗粒与流体完全跟随; 若 $\eta < 0$, 则表示颗粒的运动方向与流体相反; 若 $1 > \eta > 0$, 则颗粒与流体虽然同向运动, 但速度滞后; 而 $\varphi < 0$ 表明颗粒在运动时间上的滞后, $\varphi > 0$ 表明颗粒运动时间的超前。因此, 只要给出 η , φ 的表达式, 则可定量估计粒子与流体的偏离程度。

以切向运动为例, 并简记在该方向的湍流振幅 $A(\omega)$ 为 A_θ , 相应的 η , φ 为 η_θ , φ_θ , 则由式(8)和(9)可得:

$$\begin{aligned} \frac{du_{f\theta}}{dt} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega A_\theta \exp(-i\omega t) d\omega \\ \frac{du_{p\theta}}{dt} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \eta_\theta A_\theta \times \\ &\quad \exp[-i(\omega t + \varphi_\theta)] d\omega \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega A_\theta \left[\int_{-\infty}^t \frac{\exp(-i\omega \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right] d\omega \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega A_\theta (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp(i\omega t) d\omega \\ &= -i(1+i) \int_{-\infty}^{\infty} A_\theta \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \exp(i\omega t) d\omega \\ &= -i(1+i) \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\theta A_\theta \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \exp[i(\omega t + \varphi_\theta)] d\omega \end{aligned}$$

将以上结果代入式(5), 整理得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ (E - iG) \eta_\theta A_\theta \exp[-i(\omega t + \varphi_\theta)] - (E - iF) A_\theta \exp(-i\omega t) \} d\omega = 0 \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned} E &= a + c \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \\ F &= b\omega + c \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \end{aligned}$$

$$G = \omega + c \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}}$$

在式(10)中, 令被积函数等于零, 则该式总可满足, 从而有:

$$(E - iG) \eta_\theta \exp(-i\varphi_\theta) - (E - iF) = 0 \quad (11)$$

将 $\exp(-i\varphi_\theta) = \cos \varphi_\theta - i \sin \varphi_\theta$ 代入式(11), 并令实部及虚部分别等于零, 可得

$$\eta_\theta (E \cos \varphi_\theta - G \sin \varphi_\theta) = E \quad (12)$$

$$\eta_\theta (G \cos \varphi_\theta + E \sin \varphi_\theta) = F \quad (13)$$

由上述两式可解出:

$$\eta_\theta = \frac{\sqrt{E^2 + F^2}}{\sqrt{E^2 + G^2}} \quad (14)$$

$$\varphi_\theta = \arctan \frac{E(F - G)}{E^2 + FG} \quad (15)$$

这就是固体粒子沿切向的跟随性问题的解。在水力旋流器的轴向, 由于式(6)与(5)在形式上完全相同, 因而有

$$\eta_z = \eta_\theta \quad (16)$$

$$\varphi_z = \varphi_\theta \quad (17)$$

在旋流器的径向, 情况则较为复杂, 因为 BBO 方程中多出了离心力一项。将式(8)和式(9)代入式(7), 并加上相应的下标 r , 经整理可得:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \{ (E - iG) \eta_r A_r \exp[-i(\omega t + \varphi_r)] - \\ &\quad (E - iF) A_r \exp(-i\omega t) - \\ &\quad hu_{f\theta} A_\theta \exp(-i\omega t) - \\ &\quad eu_{p\theta} \eta_\theta A_\theta \exp[-i(\omega t + \varphi_\theta)] \} d\omega = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

同理, 令被积函数等于零, 使得

$$\begin{aligned} &(E - iG) \eta_r \exp(-i\varphi_r) - (E - iF) - \\ &\quad (eu_{p\theta} \eta_\theta \cos \varphi_\theta - hu_{f\theta}) \frac{A_\theta}{A_r} + \\ &\quad ieu_{p\theta} \eta_\theta \frac{A_\theta}{A_r} \sin \varphi_\theta = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

则式(18)总可满足。记作:

$$M = (eu_{p\theta} \eta_\theta \cos \varphi_\theta - hu_{f\theta}) \frac{A_\theta}{A_r}$$

$$N = ieu_{p\theta} \eta_\theta \frac{A_\theta}{A_r} \sin \varphi_\theta$$

由式(19)可得:

$$\eta = \frac{E + M}{E \cos \varphi_r - G \sin \varphi_r} \quad (20)$$

$$\varphi_r = \arctan \frac{E(F + N) - G(E + M)}{E(E + M) + G(F + N)} \quad (21)$$

这里, 考虑到粒子在径向与流体的运动方向有可能相反, 即 η 可能为负值, 因此 η 的表达式未采用 η_0 的形式。当然 η_0 也可表示成与 η 类似的形式, 但对 η_0 来说, 两种表示形式没有差别。

至此, 旋流器内固体粒子与流体在切向、轴向及径向的跟随性问题即全部解出, 结果分别如式(14), (15), (16), (17), (20), (21)所示, 这些公式构成了分析水力旋流器内固液两相间相对运动的基础。不过, 在利用这些公式时, 需预先确定旋流器内流体介质的切向与径向的复振幅之比 A_θ/A_r , 兹分析如下。

从理论上可以证明, 虽然 A_θ , A_r 各为脉动频率 ω 的函数, 但它们的比值 A_θ/A_r 却与 ω 无关。流体微团沿切向与径向的平均运动速度可写为:

$$\overline{u_{f\theta}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_\theta(\omega) \times \exp(-i\omega t) d\omega \right\} dt \quad (22)$$

$$\overline{u_{fr}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_r(\omega) \times \exp(-i\omega t) d\omega \right\} dt \quad (23)$$

于是有平均速度之比:

$$\frac{\overline{u_{f\theta}}}{\overline{u_{fr}}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} A_\theta(\omega) B(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} A_r(\omega) B(\omega) d\omega} \quad (24)$$

式中

$$B(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-i\omega t) dt$$

因为平均速度之比 $\overline{u_{f\theta}}/\overline{u_{fr}}$ 显然与湍流频率无关, 所以若欲式(24)恒成立, 只要有

$$\frac{\overline{u_{f\theta}}}{\overline{u_{fr}}} = \frac{A_\theta(\omega)}{A_r(\omega)} \quad (25)$$

就行了, 即流体在切向及径向的湍流振幅之比与湍流频率无关且等于相应的平均速度之比。考虑到旋流器内流体的径向速度指向轴线(即与坐标 r 的方向相反), 则 A_θ/A_r 应取负值。

此外, 在计算 M 及 N 的数值时, 考虑到切向的跟随性一般较好, 因而可取 $\eta_0 \approx 1$, $\cos \eta_0 \approx 1$, $u_{p\theta} \approx u_{f\theta}$, 以便简化计算。

3 结语

从 BBO 方程求解水力旋流器内颗粒与流体的相对运动是一项新的尝试。结果表明, 在忽略重力影响的前提下, 颗粒在切向及轴向与流体具有相同的跟随特性; 而由于离心力的存在, 颗粒在径向的运动将明显有别于流体介质。根据跟随性指标 η , φ 的数学表达式, 可以定量地考察诸如颗粒性质、流体特性、空间位置、湍流频率等因素对颗粒运动的影响。限于篇幅, 有关内容将在本文的第二、第三部分中介绍。

REFERENCES

- 1 Kelsall D F. Trans Inst Chem Eng, 1987, 30: 87-104.
- 2 Luo Qian, Deng Changlie, Xu Jirun *et al.* Inter J Miner Process, 1989, 25: 297-310.
- 3 Xu Jirun(徐继润) and Luo Qian(罗茜). Flow Field Theory in Hydrocyclones(水力旋流器流场理论). Beijing: Science Publishers, 1998.
- 4 Svarovsky L. Hydrocyclones. London: Holt, Rinehart and Winston Ltd, 1984.
- 5 Driessen M G. In: Review of Industrial Mining, Special Issue. St Etienne, 1951, 4: 449-461.
- 6 Criner H E. In: Proceedings of Int Conf on Coal Preparation. Paris, 1950.
- 7 Rietema K. Chem Eng Sci, 1961, 15: 298-325.
- 8 Hintze J O ed, Huang Yongnian(黄永念) and Yan Dachun(颜大椿) transl. Turbulence(湍流). Beijing: Science Publishers, 1985.

RELATIVE MOTION BETWEEN SOLID PARTICLES AND LIQUID MEDIUM IN HYDROCYCLONES

PART I: PARTICLE MOTION EQUATION AND ITS SOLUTION

Xu Jirun and Luo Qian[†]

Department of Chemical Engineering,

Dalian University, Dalian 116622, P. R. China

[†] *Department of Resources and Environment Engineering,*

Northeastern University, Shenyang 110006, P. R. China

ABSTRACT A new approach to the relative motion of solid particles with fluid medium in hydrocyclones was presented. By resolving BBO equation, some parameters describing the lags between particles and medium was derived and analyzed. These parameters show that the relative motion in both tangential and vertical directions can be neglected if the gravity is not considered, but in the radial direction, the motion of particles is apparently different from that of the medium. According to the derived parameters, a series of factors including particle natures, space position, flow field characteristics as well as turbulence frequency may be investigated qualitatively, but the detail will be reported in the following issues of the magazine.

Key words hydrocyclones particle motion BBO equation

(编辑 袁赛前)