陀螺定向的三角多项式拟合法[①]

刘洪奇
(中山市测量钻探队，中山 528403)

摘　要　提出了陀螺定向数据处理的一种新方法——三角多项式拟合法。首先从高等数学、陀螺力学和平差理论出发，论述了该方法的数学模型和数据处理方法，即用三角多项式对陀螺轴运动进行最小二乘拟合，确定陀螺轴的摆动中心；导出了新旧两种数学模型之间的关系：新模型是普遍形式，而旧模型只是新模型的一种特例，当三角多项式的阶数为1时，新模型就变成了旧模型，它包含有模型误差；随着三角多项式阶数的增加，新模型中模型误差减小了。然后用新旧方法对各种观测条件下的观测值进行数据处理，结果表明：新方法数据处理成果精度比旧方法的高，曲线拟合效果良好，不仅验证了新方法的可行性，而且确定了适合于陀螺定向的三角多项式的阶数为3或4的情况。

关键词　陀螺定向　数学模型　数据处理

中图法分类号　P207

根据陀螺力学理论，高速旋转陀螺轴的运动是按指数衰减的简谐运动。考虑到衰减系数很小，在较短的观测时间内，可以略去衰减的影响，运动方程如下：

$$y(t) = \beta + A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right) \tag{1}$$

式中　t—时间，$y(t)$—陀螺轴位置在辅助分划板上的读数，β—陀螺轴摆动平衡位置在辅助分划板上的读数，A—摆幅，T—周期，γ—初相角。

迄今为止，人们已经提出了多种观测陀螺轴运动的非跟踪法(也称固定照准部法)，如中天法[1]、时差法[2]、记时摆幅法[3]、全面记时法[4, 5]等。这些方法的数据处理是在数学模型式(1)的基础上进行的。然而，由于陀螺房和悬带等部件的各种参数与其理论值的差异、剩余外磁场、环境振动、陀螺房下放质量等诸多因素的影响，实际陀螺轴的运动并不严格符合式(1)，而是较为复杂的周期性运动。因此按式(1)进行数据处理必然含有一定的模型误差，这种模型误差无法通过数据处理本身加以减小或消除。本文提出用三角多项式对陀螺轴运动进行拟合，用最小二乘平差进行数据处理后，确定陀螺摆动的平衡位置，从而达到减小模型误差和观测误差影响的目的。

1　数学模型及数据处理

根据高等数学理论，一个周期函数 $f(x)$ 只要满足狄氏条件[6]，则可以展开成三角多项式形式的傅立叶级数，即

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

陀螺轴的运动是一种连续的周期性运动，其运动方程能够满足狄氏条件。因此，总可以用如下有限形式的三角多项式对陀螺轴的运动方程进行拟合：

$$y(t) = \beta + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{2}$$

式中　$x = \dfrac{2\pi t}{T}$。

非跟踪周期 T 可由陀螺光标两次同方向经过同名刻线所测定的时间求得。式(2)即为三角多项式拟合的数学模型。

① 收稿日期：1996-11-26；修回日期：1997-11-30　　刘洪奇，男，32岁，高级工程师，硕士

令 $n=1$,

则式(2)变成

$$y(t)=\beta+a_1\cos x+b_1\sin x$$

$$=\beta+\sqrt{a_1^2+b_1^2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cos x+\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\sin x\right)$$

令 $\sqrt{a_1^2+b_1^2}=A$,

$$a_1/\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\sin\gamma,$$

$$b_1/\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\cos\gamma,$$

则

$$y(t)=\beta+A(\sin\gamma\cos x+\cos\gamma\sin x)$$

$$=\beta+A\sin(x+\gamma)$$

即 $y(t)=\beta+A\sin(\frac{2\pi}{T}t+\gamma)$

上式即为式(1)。由此可见，模型式(1)是模型式(2)的一种最简单形式，模型式(2)是普遍形式。因此，用式(2)式进行拟合时，阶数 n 应取 2 以上的正整数。

三角多项式拟合的数据处理是在全面记时法所获得的观测数据基础上进行的。全面记时法是一种非跟踪法，在观测时，读取陀螺光标经过辅助分划板上大部分刻线 y_i 的时间 t_i。亦即在时间 t_i 上，获得观测值 y_i。很明显，各观测值 y_i 在数值上是固定的，即为辅助分划板上的刻线值，而读取的是时间 t_i。初看起来，好象观测值 y_i 无误差，其实不然。观测误差表现为：在时间 t_i 时，陀螺光标并非刚好落在 y_i 上，而是落在 $y_i+\Delta$(Δ 为观测误差)上。

假定在 m 个点 $t_1, t_2, \cdots, t_m$(对应 x 有 m 个：$x_1, x_2, \cdots, x_m$)上，相应的观测值为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，m 应满足 $m\geqslant 2n+1$。

将 m 组数据(x_i, y_i)代入式(2)中，得观测方程为

$$\boldsymbol{V}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} \tag{3}$$

式中 $\underset{m\times 1}{\boldsymbol{Y}}$ 为观测值向量，$\boldsymbol{Y}=(y_1, y_2, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$；$\underset{m\times 1}{\boldsymbol{V}}$ 为残差向量，$\boldsymbol{V}=(\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n)^{\mathrm{T}}$；$\underset{(2n+1)\times 1}{\boldsymbol{Z}}$ 为未知数向量，

$$\boldsymbol{Z}=(\beta, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n)^{\mathrm{T}};$$

$\underset{m\times(2n+1)}{\boldsymbol{A}}$ 为系数矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \cdots & \cos nx_2 & \sin nx_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos x_m & \sin x_m & \cdots & \cos nx_m & \sin nx_m \end{vmatrix}$$

视各观测值 y_i 为等权[7]，组成法方程

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

可求得

$$\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{4}$$

及

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}}{2n+1}} \tag{5}$$

$$m_\beta=\mu\sqrt{Q_{\beta\beta}} \tag{6}$$

式中 $Q_{\beta\beta}$为 β 的协因数，即法方程系数矩阵逆阵$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}$的第一行第一个元素。

μ 和 m_β 是两个重要的指标。前者反映观测精度，后者表示数据处理成果的精度。采用三角多项式拟合法，减小了模型误差和观测误差对数据处理成果的影响。通过选用数学模型式(2)，减小了模型误差的影响；通过式(4)对观测值进行最小二乘平差，减小了观测误差的影响。

为了衡量曲线的拟合效果，引入相关指数 R[8]，R 的计算公式如下：

$$R=\sqrt{1-\frac{Q_2}{Q}} \tag{7}$$

其中 $Q_2=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\Sigma\upsilon_i^2$，$Q=\Sigma(y_i-\hat{y})^2$，$\hat{y}=\Sigma y_i/m$

R 值愈接近 1，表明拟合效果愈佳；R 值小，表明拟合效果欠佳。

2 三角多项式阶数的取定

选定三角多项式(2)进行拟合时，确定阶数 n 是很重要的。选的阶数愈高，理论上拟合精度也愈高，但计算和使用不便，实际上有时也不需要。为了比较不同 n 值的拟合效果，用一台国产 JT15 型陀螺经纬仪和一台 GAK-1 型陀螺经纬仪进行了两组实验。每组实验均在实验室、野外和井下三种观测条件下的固定测

线上，进行两个周期的全面记时法观测。分别采用一周期和两周期的观测值，取 $n=1, 2, 3, 4$，进行三角多项式拟合，所得结果 β，μ，m_β 及 R 见表 1~4，表中还列出了相应的陀螺方位角 P。

从表 1~4 所列指标可以看出：

(1) 无论观测条件的变化(实验室、野外、井下)和观测时间的长短(一周期或两周期)，随着 n 的增大，β 值趋于稳定，且稳定值与 $n=1$ 时的 β 值差异较大；随着 n 的增大，μ 和 m_β 均有所减小，并趋于稳定。这说明用 $n=1$ 时的三角多项式即式(1)进行拟合时，存在着较大模型误差的影响；用 $n=2$ 以上的三角多项式进行拟合时，模型误差得到了有效的削弱，提高了成果的精度。

(2) 无论在何种情况下，随着 n 值的增大，相关指数 R 亦不断增大。$n=3$ 或 4 时，R 值均在 0.95 以上。这说明随着 n 的增大，拟合精度愈来愈高，所选用的三角多项式愈来愈代表陀螺轴运动的实际状况。

(3) 比较两种仪器的一周期观测和两周期观测的拟合效果时，可以发现：采用两周期观测值进行拟合所得的各项指标，并不优于采用一周期观测值进行拟合所得的各项指标。这是由于随着观测时间的延长，陀螺重心的漂移、摆幅衰减、外界条件变化等诸多因素的影响加

表 1　JT15 型陀螺经纬仪观测值拟合结果(1 周期)

Table 1　Fitting results of observations obtained with JT15 (one cycle)

Condition	Number	n	β/(″)	μ/(″)	m_β/(″)	R	P
Laboratory	24	1	84.0	±9.3	±7.6	0.8936	179°35′34″
		2	77.5	±6.1	±5.0	0.9547	179°35′43″
		3	76.7	±5.5	±4.8	0.9643	179°35′44″
		4	76.3	±5.2	±4.4	0.9830	179°35′44″
Field	22	1	−138.6	±12.8	±7.4	0.8825	325°06′37″
		2	−130.0	±8.5	±6.6	0.9417	325°06′25″
		3	−128.4	±7.9	±6.4	0.9617	325°06′23″
		4	−128.5	±7.6	±6.0	0.9683	325°06′23″
Pit	24	1	58.7	±9.0	±8.2	0.9012	63°13′50″
		2	51.8	±6.5	±5.5	0.9623	63°13′59″
		3	50.9	±6.1	±5.0	0.9662	63°13′59″
		4	49.3	±5.8	±5.0	0.9803	63°14′01″

表 2　JT15 型陀螺经纬仪观测值拟合结果(2 周期)

Table 2　Fitting results of observations obtained with JT15 (two cycles)

Condition	Number	n	β/(″)	μ/(″)	m_β/(″)	R	P
Laboratory	46	1	86.7	±9.6	±8.3	0.8772	179°35′30″
		2	74.6	±6.7	±6.0	0.9321	179°35′39″
		3	72.5	±6.0	±5.4	0.9367	179°35′36″
		4	73.0	±6.3	±5.6	0.9524	179°35′37″
Field	40	1	−133.6	±13.2	±10.6	0.8803	325°06′30″
		2	−124.0	±8.8	±7.8	0.9327	325°06′16″
		3	−122.7	±8.3	±7.2	0.9346	325°06′15″
		4	−121.3	±7.7	±6.9	0.9401	325°06′13″
Pit	44	1	61.3	±10.2	±9.1	0.8925	63°13′46″
		2	53.6	±7.6	±6.4	0.9326	63°13′57″
		3	52.7	±6.8	±5.8	0.9547	63°13′58″
		4	50.3	±6.6	±5.7	0.9560	63°14′02″

表 3 GAK- 1 型陀螺经纬仪观测值拟合结果(1 周期)

Table 3 Fitting results of observations obtained with GAK- 1 (one cycle)

Condition	Number	n	$\beta/('')$	$\mu/('')$	$m_\beta/('')$	R	P
Laboratory	23	1	88.3	±9.0	±8.1	0.9117	179°35′29″
		2	79.2	±6.3	±5.1	0.9583	179°35′42″
		3	78.9	±5.3	±4.3	0.9655	179°35′42″
		4	77.6	±5.0	±4.2	0.9747	179°35′43″
field	22	1	-135.7	±11.3	±9.1	0.8938	325°06′33″
		2	-128.5	±8.6	±6.5	0.9427	325°06′23″
		3	-127.3	±7.3	±6.1	0.9562	325°06′21″
		4	-126.8	±6.8	±5.9	0.9679	325°06′21″
Pit	20	1	54.8	±8.2	±7.3	0.9118	63°13′55″
		2	48.3	±5.8	±5.0	0.9633	63°13′04″
		3	47.7	±5.6	±4.9	0.9629	63°13′05″
		4	47.1	±5.3	±4.8	0.9813	63°14′06″

表 4 GAK- 1 型陀螺经纬仪观测值拟合结果(2 周期)

Table 4 Fitting results of observations obtained with GAK- 1 (two cycles)

Condition	Number	n	$\beta/('')$	$\mu/('')$	$m_\beta/('')$	R	P
Laboratory	45	1	90.3	±9.8	±9.0	0.9038	179°35′34″
		2	81.6	±6.8	±6.2	0.9523	179°35′43″
		3	80.7	±6.9	±6.0	0.9611	179°35′44″
		4	80.0	±6.5	±5.4	0.9547	179°35′44″
Field	40	1	-137.6	±12.7	±10.5	0.8925	325°06′37″
		2	-130.5	±8.3	±7.8	0.9338	325°06′25″
		3	-128.6	±7.2	±6.5	0.9543	325°06′23″
		4	-127.3	±7.5	±6.6	0.9624	325°06′23″
Pit	42	1	58.3	±9.4	±8.2	0.8927	63°13′50″
		2	49.6	±7.6	±6.3	0.9560	63°13′59″
		3	48.8	±6.3	±5.0	0.9613	63°13′59″
		4	48.6	±6.0	±5.1	0.9706	63°14′01″

剧，使陀螺轴的运动产生不规律性，因而拟合精度不能提高。观测时间的延长无益于提高成果精度，以观测一周期为佳。

3 结论

(1) 用三角多项式 $y(t)=\beta+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ (其中 $x=2\pi t/T$) 对陀螺轴的运动进行拟合，是一种较理想的陀螺定向数据处理方法。

首先，它采用了与实际情况相吻合的数学模型，减小了模型误差的影响；其次，它根据全面记时法所获得的大量观测值，采用最小二乘平差法进行数据处理，减小了观测误差的影响；第三，通过数据处理后，能获得单位权中误差 μ 和摆动平衡位置的中误差 m_β，前者代表观测精度，后者则代表数据处理成果的精度；第四，曲线拟合效果可由相关指数 R 的大小来衡量，R 值愈接近 1，拟合效果愈佳，反之则拟合效果欠佳。

(2) 方程式(1)是方程式(2)的一种特例。当阶数 $n=1$ 时，式(2)变成式(1)的另一形式

$$y(t)=\beta+a_1\cos\frac{2\pi t}{T}+b_1\sin\frac{2\pi t}{T}$$

用此式作为数学模型进行拟合时，包含有模型误差。在实际数据处理时，阶数 n 取 3 或 4 较为理想。

(3) 观测时间不宜过长，以一周期为佳。

REFERENCES

1 Sang Guangcan(桑光灿) and Lin Jiacong(林家聪). Journal of Chinese Institute of Mining Industry(中国矿业学院学报), 1985, (4): 10- 14.

2 Schwendner H R. AVN, 1974, (5): 21- 23.

3 Sang Guangcan(桑光灿) and Lin Jiacong(林家聪). Journal of Chinese Institute of Mining Industry (中国矿业学院学报), 1986, (2): 17- 20.

4 Caspary W, Heister H and Schwintzer P. AVN, 1982, (4): 53- 57.

5 Xu Jilong(许纪隆). Journal of surveying and Mapping(测绘学报), 1989, (1): 31- 35.

6 Fan Yingchuan(樊映川) *et al*. Higher Mathematics (Vol. 2)(高等数学，下册), Beijing: People's Education Press, 1964: 40- 45.

7 Liu Hongqi(刘洪奇). The Chinese Journal of Noferrous Metals(中国有色金属学报), 1995, 5(1): 4- 6.

8 Li Qinghai(李庆海) and Tao Benzao(陶本藻). Probability and Statistics with surveying Application (概率统计和在测量中的应用). Beijing: Surveying and Mapping Press, 1980: 267- 268.

9 Erik Grafarend. ZFV, 1969, (3): 34- 38.

TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL FITTING METHOD FOR GYRO-ORIENTATION

Liu Hongqi

Zhongshan Survey Company, Zhongshan 528403, P. R. China

ABSTRACT A new data-processing method for gyro-orientation —— the trigonometric polynomial fitting method has been put forward. First, the mathematical model and data-processing method of fitting was dealt, according to higher mathematics, gyro-mechanics and adjustment theory. In order to determine the swing centre of gyro-axis the real method is least-squares fitting with trigonometric polynomial. The relation between the new model and the old one was established. The new model is the universal form and the old one is a special form of the new one. When the index of trigonometric polynomial equals 1 the new model becomes the old one and it contains model error. With the increase of the index the model error is weakened. Then, the new method was applied to practical data-processing of different environmental observation conditions. The results show that the accuracy of new method is higher than that of old one and curve fitting is very good. The index of trigonometric polynomial that is suitable to gyro-orientation equals 3 or 4.

Key words gyro-orientation mathematical model data-processing

(编辑 何学锋)