

平差模型的影响分析^①

王志忠 朱建军

(中南工业大学资源环境与建筑工程学院, 长沙 410083)

摘 要 概括了平差模型的影响分析的主要成果, 研究了带约束的参数平差模型应用随机模型的协方差阵扰动影响的分析问题, 建立了 $\mathbf{X}_B(\mathbf{G})$ 与 $\mathbf{X}_B$ 的一些关系式, 这里 $\mathbf{X}_B(\mathbf{G})$ 是扰动模型的未知参数向量 $\mathbf{X}$ 的最小二乘估计, $\mathbf{X}_B$ 是带约束的参数平差模型的 $\mathbf{X}$ 的最小二乘估计。此外还定义了扰动模型的 Welsch-Kuh 统计量与 Cook 距离, 给出了它们的简单计算式。

关键词 影响分析 最小二乘估计 Cook 距离 Welsch-Kuh 统计量

中图法分类号 P20

为了适应测量平差数据处理理论的需要, 统计学中的回归理论和方法在测量学中已得到广泛的应用和发展。有很多文献考虑平差模型 (1) 的统计诊断问题, 其中 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵。

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Delta \quad (1a)$$

$$\mathbf{E}(\Delta) = 0, \mathbf{D}(\Delta) = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (1b)$$

一般来说, 模型 (1) 与观测数据之间有差异, 可能的原因是函数模型不准确、或者随机模型不准确、或者数据中有粗差。统计学中采用两种方法解决这个问题。第一种是寻找一种稳健估计^[1-3]; 第二种是寻找一种诊断方法^[4,5]。王泽文和陶本藻在文献 [4] 中将模型 (1) 的 Cook 距离推广, 提出了降权法作诊断平差的 Cook 距离公式。靳奉祥在文献 [5] 中总结了模型 (1) 的影响分析的研究成果, 建立了方差-协方差阵扰动影响的分析方法, 该方法的特殊情况便是函数模型的影响分析, 该成果是对扰动分析理论的扩展, 对方差估计方案的设计具有重要的指导意义。以上这些都是在无约束条件下考虑的, 但在实际问题中, 根据特定的物理规律, 还允许未知数服从某些线性相关关系, 即模型中还可附加其它额外约束, 如某些基线条件、特殊方位角条件等等, 换句话说, 参数常常是带有某种约束的。因此, 对模型 (1) 的影响分析问题进行扩展很有必要。

带约束的参数平差的函数模型为

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \Delta \quad (2a)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{X} = 0 \quad (2b)$$

随机模型为

$$\mathbf{E}(\Delta) = 0, \mathbf{D}(\Delta) = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2c)$$

文献 [6] 就模型 (2) 研究了删除模型的影响分析问题。本文研究随机模型的扰动影响分析问题, 其中 $\mathbf{B}$ 为行满秩矩阵。相应的误差方程和最小二乘估计分别为

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{L} - \mathbf{A}\mathbf{X}_B \quad (3a)$$

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X} - (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{X} \quad (3b)$$

① 国家自然科学基金资助项目 49774209 收稿日期: 1998-01-12; 修回日期: 1999-01-11

王志忠, 男, 34岁, 副教授

$$\hat{\sigma}_B^2 = (L - AX_B)' (L - AX_B) / (n - t) \quad (3c)$$

式中 $X = (A'A)^{-1}A'L$ 是模型 (1) 的最小二乘估计, X_B 是模型 (2) 的最小二乘估计, $M = B'(B(A'A)^{-1}B')^{-1}B$, $t = R\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - u$, $R\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 表示 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 的秩, 记 $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)'$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$, 我们有

$$\text{Cov}(\hat{a}_i' X_B, \hat{a}_j' X_B) = [h_{ij} - q_{ij}(M)] \sigma^2 \quad (4)$$

此处 $q_{ij}(M) = \hat{a}_i' (A'A) M (A'A)^{-1} \hat{a}_j$, $h_{ij} = \hat{a}_i' (A'A) \hat{a}_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

1 模型 (2) 和对应的扰动模型 (5) 中 X 的最小二乘估计间的关系

我们称

$$L = \underset{n, 1}{A} \underset{n, uu, 1}{X} + \underset{n, 1}{\Delta} \quad (5a)$$

$$B \underset{q, uu, 1}{X} = 0 \quad (5b)$$

$$E(\Delta) = 0, D(\Delta) = \sigma^2 G^{-1} \quad (5c)$$

为扰动模型, 实质上是平差模型 (2) 的随机模型的扰动。相应的误差方程和最小二乘估计为

$$V_B(G) = L - AX_B(G) \quad (6a)$$

$$X_B(G) = X(G) - (A'GA)^{-1}B'(B(A'GA)^{-1}B')^{-1}BX(G) \quad (6b)$$

式中 $X(G) = (A'GA)^{-1}A'GL$ 表示模型 (5) 无约束条件时的最小二乘估计, $X_B(G)$ 表示模型 (5) 的最小二乘估计。

设 $\bar{G} = G - I$, $H = A(A'A)^{-1}A'$, 如果矩阵 $I + H\bar{G}$ 和 $A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1} - I$ 都可逆, 则模型 (2) 中 X 的最小二乘估计 X_B 和模型 (5) 中的 X 的最小二乘估计 $X_B(G)$ 有关系式

$$X_B(G) = X_B + [(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}]A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1} \cdot [A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1} - I]^{-1}V_B \quad (7)$$

式中 改正数 $V_B = L - AX_B = L - AX + A(A'A)^{-1}MX$ 。

证明 反复利用矩阵求逆公式

$$(D + EF)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}E(I + FD^{-1}E)^{-1}FD^{-1} \quad (8)$$

有

$$(A'GA)^{-1} = (A'\bar{G}A + A'A)^{-1} = (A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1}A(A'A)^{-1} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [B(A'GA)^{-1}B']^{-1} &= [B(A'A)^{-1}B' - B(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1}A(A'A)^{-1}B']^{-1} \\ &= [B(A'A)^{-1}B']^{-1} + [B(A'A)^{-1}B']^{-1}B(A'A)^{-1}A'\bar{G} \cdot \\ &\quad (I + H\bar{G})^{-1}(I - A(A'A)^{-1}B'[B(A'A)^{-1}B']^{-1} \cdot \\ &\quad B(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1})^{-1}A(A'A)^{-1}B'[B(A'A)^{-1}B']^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

又

$$I - (I + H\bar{G})^{-1}H\bar{G} = (I + H\bar{G})^{-1} \quad (11)$$

因此

$$\begin{aligned} B'[B(A'GA)^{-1}B']^{-1}B &= M + M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1}[I - A(A'A)^{-1} \cdot \\ &\quad M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I + H\bar{G})^{-1}]^{-1}A(A'A)^{-1}M \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} X(G) &= (A'GA)^{-1}A'GL = [(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}A(A'A)^{-1}] \cdot \\ &\quad (A'L + A'\bar{G}L) = X + (A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}(I-H)L \quad (13) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} B'[B(A'GA)^{-1}B']^{-1}BX(G) &= MX + M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}(I-H)L + \\ &\quad M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}[I - A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}]^{-1} \cdot \\ &\quad A(A'A)^{-1}MX + M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}[I - A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} \cdot \\ &\quad A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}]^{-1}[A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1} - I + I](I-H)L \\ &= MX + M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}[I - A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}]^{-1} \cdot \\ &\quad [A(A'A)^{-1}MX + (I-H)L] \quad (14) \end{aligned}$$

由式(6)(9)(13)和(14),可以得到

$$\begin{aligned} X_B(G) &= X + (A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}(I-H)L - [(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1} \cdot \\ &\quad A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}A(A'A)^{-1}] \{MX + M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}[I - A(A'A)^{-1} \cdot \\ &\quad M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1}]^{-1}[A(A'A)^{-1}MX + (I-H)L]\} \\ &= X_B + [(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}]A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1} \cdot \\ &\quad [A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'\bar{G}(I+H\bar{G})^{-1} - I]^{-1}V_B \end{aligned}$$

证毕。

由式(7)可以得到如下几个结论:

(I) 式(7)中若 $\bar{G} = \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$, d_i 表示第 i 个元素为 1 其余为 0 的 n 维列向量, $0 \leq g_i \leq 1$, $S = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, 记 $X_B(G)$ 为 $X_B(G_S)$, 则

$$\begin{aligned} X_B(G_S) &= X_B + [(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}]A'_S(G_S - I_S) \cdot \\ &\quad [I_S + H_S(G_S - I_S)]^{-1} \{Q_S(G_S - I_S)[I_S + H_S(G_S - I_S)]^{-1} - I_S\}^{-1}V_{BS} \quad (15) \end{aligned}$$

式中 $H_S = A_S(A'A)^{-1}A'_S$, $G_S = \text{diag}(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{im})$, $1 \leq m \leq n$, $0 \leq g_{ij} \leq 1$, A_S 和 V_{BS} 分别由 A , V_B 在集 S 中各行构成, I_S 为 m 阶单位阵, $Q_S = A_S(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'_S$ 。

证明 不失一般性, 设 $S = \{1, 2, \dots, m\}$, 则

$$G = \begin{bmatrix} G_S & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_S - I_S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

记 $A = (A'_S, A'_{(S)})'$, $A_{(S)}$ 表示 A 中不含于集 S 中的诸行构成的子阵, 于是

$$A'\bar{G} = A'_S((G_S - I_S), 0) \quad (16a)$$

$$H\bar{G} = \begin{bmatrix} H_S(G_S - I_S) & 0 \\ A_{(S)}(A'A)^{-1}A'_S(G_S - I_S) & 0 \end{bmatrix} \quad (16b)$$

$$(I + H\bar{G})^{-1} = \begin{bmatrix} [I_S + H_S(G_S - I_S)]^{-1} & 0 \\ * & I_{n-m} \end{bmatrix} \quad (16c)$$

将式(16)代入式(7)得式(15)。证毕。

特别当 $S = \{i\}$ 时, 记 $X_B(G_S)$ 为 $X_B(g_i)$, 则有

$$X_B(g_i) = X_B + \frac{(g_i - 1)[(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}]a_i V_{B_i}}{(g_i - 1)q_{ii}(M) - 1 + h_{ii}(1 - g_i)} \quad (17)$$

式中 V_{B_i} 为 V_B 的第 i 个分量

以 $X_B(i)$ 记模型(18)的 X 的最小二乘估计

$$L(i) = A(i)X + \Delta(i) \quad (18a)$$

$$BX = 0 \quad (18b)$$

$$E(\Delta(i)) = 0, D(\Delta(i)) = \sigma^2 I_{n-1} \quad (18c)$$

式中 $L(i), A(i), \Delta(i)$ 为模型 (2) 的 L, A, Δ 中去掉第 i 行后得到的矩阵。

(II) 若扰动模型 (5) 中, $G = I + (g_i - 1) d_i d_i'$, 则

$$\lim_{g_i \rightarrow 0} X_B(g_i) = X_B(i) = X_B + \frac{L(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}}{1 + q_{ii}(M) - h_{ii}} a_i V_{B_i} \quad (19)$$

证明 模型 (5) 求 X 的最小二乘估计的目标函数为

$$(L - AX_B(G))' G (L - AX_B(G)) \quad \text{极小化} \quad (20a)$$

$$\text{满足 } BX_B(G) = 0 \quad (20b)$$

当 $G = I + (g_i - 1) d_i d_i'$ 时, 式 (20) 可写为

$$(L - AX_B(g_i))' (L - AX_B(g_i)) + (g_i - 1) (L_i - a_i' X_B(g_i))^2 \quad \text{极小化} \quad (21a)$$

$$BX_B(g_i) = 0 \quad (21b)$$

当 $g_i \rightarrow 0$ 时, 式 (20) 变为模型式 (18) 求 $X_B(i)$ 的目标函数, 因此 $\lim_{g_i \rightarrow 0} X_B(g_i) = X_B(i)$, 将式 (17) 代入, 即可得到式 (19)。证毕。

以 $X_B(S)$ 记模型 (22) 的 X 的最小二乘估计

$$L(S) = A(S)X + \Delta(S) \quad (22a)$$

$$BX = 0 \quad (22b)$$

$$E(\Delta(S)) = 0, D(\Delta(S)) = \sigma^2 I_{n-m} \quad (22c)$$

式中 $L(S), A(S), \Delta(S)$ 为模型 (2) 的 L, A, Δ 去掉 $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ 中各行后所得的矩阵。

(III) 若扰动模型 (5) 中, $G = I + \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$, 则

$$\lim_{G_S \rightarrow 0} X_B(G_S) = X_B(S) = X_B + [(A'A)^{-1} M (A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}] A_S' \cdot [I_S - H_S]^{-1} [I_S + Q_S (I_S + H_S)]^{-1} V_{BS} \quad (23)$$

式中 $G_S = \text{diag}(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{im})$

证明 因当 $G = I + \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$ 时, 模型 (5) 求 X 的最小二乘估计的目标函数式 (20) 变为

$$(L - AX_B(G_S))' (L - AX_B(G_S)) + \sum_{i \in S} (g_i - 1) (L_i - a_i' X_B(G_S))^2 \quad \text{极小化} \quad (24a)$$

$$BX_B(G_S) = 0 \quad (24b)$$

当 $G_S \rightarrow 0$ 时, 式 (24) 变为模型 (22) 求 $X_B(S)$ 的目标函数, 因此 $\lim_{G_S \rightarrow 0} X_B(G_S) = X_B(S)$, 将式 (15) 代入, 即可求得式 (23)。证毕。

当 $B = 0$ 时, 模型 (2) 即为高斯-马尔柯夫模型 (1), 由式 (13), 我们类似可给出如下结果:

(IV) 若矩阵 $I + H\bar{G}$ 可逆, 则模型 (2) 中无约束条件时 X 的最小二乘估计 X 和模型 (5) 中无约束条件时 X 的最小二乘估计 $X(G)$ 有关系式

$$X(G) = X + (A'A)^{-1} A' \bar{G} (I + H\bar{G})^{-1} (I - H) L \quad (25)$$

当 $G = I + (g_i - 1) d_i d_i'$ 时, 则有

$$X(g_i) = X + \frac{(g_i - 1) (A'A)^{-1} a_i V_i}{1 + (g_i - 1) h_{ii}} \quad (26)$$

$$\lim_{g_i \rightarrow 0} X(g_i) = X(i) = X - \frac{(A'A)^{-1} a_i V_i}{1 - h_{ii}} \quad (27)$$

当 $G = I + \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$ 时, 则有

$$\lim_{g_i \rightarrow 0} X(G_S) = X(S) = X - (A'A)^{-1} A_S' [I_S - H_S]^{-1} V_S \quad (28)$$

以上符号中无下标表示相应的无约束下模型 (以下同), 式 (26) 是文献 [7] 中结果, 式 (27), (28) 是文献 [8] 和 [9] 的结果。

从 (III) 的证明过程可见: 当模型 (5) 中的 $G = I + \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$ 且 $g_i \rightarrow 0$ 时, $i \in S$, 求 X 的最小二乘估计 $X_B(G_S)$ 的目标函数恒等于模型 (22) 求 X 的最小二乘估计 $X_B(S)$ 的目标函数。而 $g_i \rightarrow 0$ 表示 l_i 的方差 $D(l_i) = \frac{\sigma^2}{g_i} \rightarrow \infty$, $i \in S$ 。这表明使用扰动模型 (5) 时, 实际上是采用降权法来剔除方差很大的点^[4]。当 $S = \{i\}$ 时, 即为剔除一点的情况。 $B = 0$ 时的情况类似。

基于上述道理, 我们可以指望剔除一点或剔除一个点集时, 对 X 的估计所引起的分析中的一些式子, 都可由扰动模型 (5) 的影响分析中相应的式子在 $G = I + \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$, 且 $g_i \rightarrow 0$ 时而得到。

2 Welsch-Kuh 统计量

模型 (2) 中 a_i 处的拟合值为 $l_i = a_i' X_B$, 扰动模型 (5) 中 a_i 处的拟合值为 $l_i = a_i' X_B(G)$, 则 $l_i - l_i(G) = a_i' X_B - a_i' X_B(G)$ 就是扰动对 a_i 处拟合值所引起的变化, 注意到 σ^2 一般是未知的, 用它的无偏估计 σ_B^2 来代替, 称

$$\frac{a_i' X_B - a_i' X_B(G)}{\sigma_B (h_{ii} - q_{ii}(M))^{1/2}} \quad (29)$$

为扰动模型 (5) 的约束 Welsch-Kuh 统计量, 并记为 $W_B(G)$, 由式 (7) 可以得到如下结果

(I) 如果 $I + HG$ 和 $A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'G(I + HG)^{-1} - I$ 都可逆, 则

$$W_B(G) = \frac{-1}{\sigma_B (h_{ii} - q_{ii}(M))^{1/2}} a_i' [(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}] A'G(I + HG)^{-1} [A(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1}A'G(I + HG)^{-1} - I]^{-1} V_B \quad (30)$$

很显然, 当 $G \rightarrow I$ 时, Welsch-Kuh 统计量 $W_B(G) \rightarrow 0$, 这说明协方差阵轻微扰动对约束模型 (2) 几乎没有影响。

(II) 当 (I) 中的 $G = I + (g_i - 1) d_i d_i'$ 时, 即 $G - I = (g_i - 1) d_i d_i'$ 时, 有

$$W_B(g_i) = \frac{-(g_i - 1) a_i' [(A'A)^{-1}M(A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}] a_i V_{Bi}}{\sigma_B [(g_i - 1) q_{ii}(M) - 1 + (1 - g_i) h_{ii}] (h_{ii} - q_{ii}(M))^{1/2}} \quad (31)$$

且 $W_B(i) \equiv \lim_{g_i \rightarrow 0} W_B(g_i)$

$$\begin{aligned} &= \frac{[h_{ii} - q_{ii}(M)]^{1/2} V_{Bi}}{(1 + q_{ii}(M) - h_{ii}) \sigma_B} \\ &= \sqrt{h_{ii} - q_{ii}(M)} \frac{a_i' (A'A)^{-1} M X}{\sigma_B (1 + q_{ii}(M) - h_{ii})} + \frac{\sqrt{(h_{ii} - q_{ii}(M)) (1 - h_{ii})}}{1 + q_{ii}(M) - h_{ii}} r_i \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $r_i = \frac{V_i}{\sigma_B \sqrt{1 - h_{ii}}}$ 为学生化残差。 $W_B(i)$ 的统计意义是很明显的, 它度量了第 i 组数据 (a_i', l_i) 的剔除 (或权为 0) 在约束条件下对 a_i 处拟合值的影响。(II) 告诉我们, $W_B(i)$ 的大小依赖于第 i 个学生化残差 r_i , $|r_i|$ 越大, 影响就越大。此外, $W_B(i)$ 还依赖于 $q_{ii}(M)$, q_{ii}

(M) 越小, 影响就越大。由式 (4) 和式 (19) 可以得出剔除 (a'_i, l_i) 对 a_j 处拟合值的影响。

$$(III) \quad W_{B(i)_j} = \frac{a'_j X_{B-} - a'_i X_B}{\sigma_B \sqrt{h_{ii} - q_{ii}}(M)} = W_B(i) \rho_B(a'_j X_B, a'_i X_B) \quad (33)$$

式中 $\rho_B(\cdot, \cdot)$ 为约束模型 (5) 的相关系数。

由 (III) 可知: 第 I 组数据 (a'_i, l_i) 的剔除对 a_j ($j \neq i$) 处拟合值的影响 $W_{B(i)_j}$ 的大小仅依赖于 $a'_i X_B$ 与 $a'_j X_B$ 的相关系数 ρ_B 。| ρ_B | 越大, $W_{B(i)_j}$ 就越大, 即 $a'_i X_B$ 与 $a'_j X_B$ 之间的相关程度越大, (a'_i, l_i) 的剔除对 a_j 处拟合值的影响就越厉害; $|W_{L(i)_j}| \leq |W_L(i)|$, 当 $j = i$ 时, $|W_{L(i)_j}|$ 达到最大值。

3 Cook 距离

类似于 Cook 距离, 可以定义

$$D_G(N, C) = \frac{(X_B(G) - X_B) N (X_B(G) - X_B)}{C} \quad (34)$$

为度量扰动模型 (5) 的 Cook 距离, 其中 N, C 分别为给定的非负定阵和正数。对于不同的 N, C, G , 可以给出 $D_G(N, C)$ 的各种表达式和统计意义。

先给出一些记号, 以 λ_i, μ_i, s_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 分别记 $H_S, I_S - G_S$ 和 Q_S 的特征值, T_S 是 H_S 的特征向量为列组成的正交阵, c_i 为 $T_S V_{BS}$ 的第 i 个分量, V_{BS} 如式 (15) 所示。由式 (15) 可以得出如下结果

(I) 在模型 (5) 中, 令 $G = I + \sum_{i \in S} (g_i - 1) d_i d_i'$, 如果 $H_S, I_S - G_S, Q_S$ 两两可交换, 则有

$$\begin{aligned} D_G(N, C) &\equiv D_S(A'A, (p-q) \sigma_B^2) \\ &= V_{BS}' [I_S - Q_S (G_S - I_S) (I_S + H_S (G_S - I_S))^{-1}]^{-1} [I_S + H_S (G_S - I_S)]^{-1} \cdot \\ &\quad (G_S - I_S) A_S [(A'A)^{-1} M (A'A)^{-1} - (A'A)^{-1}] A_S' (G_S - I_S) [I_S + \\ &\quad H_S (G_S - I_S)]^{-1} [I_S - Q_S (G_S - I_S) (I_S + H_S (G_S - I_S))^{-1}]^{-1} V_{BS} / (p-q) \sigma_B^2 \\ &= \frac{1}{(p-q) \sigma_{B^{i=1}}^2} \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda_i - s_i) c_i^2 \mu_i^2}{(1 - \lambda_i \mu_i + s_i \mu_i)^2} \end{aligned} \quad (35)$$

$$D_S(A'_S A_S, (p-q) \sigma_B^2) = \frac{1}{(p-q) \sigma_{B^{i=1}}^2} \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda_i - s_i)^2 c_i^2 \mu_i^2}{(1 - \lambda_i \mu_i + s_i \mu_i)} \quad (36)$$

$$D_S(A'_{(S)} A_{(S)}, (p-q) \sigma_B^2) = \frac{1}{(p-q) \sigma_{B^{i=1}}^2} \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda_i - s_i) (1 + s_i - \lambda_i) c_i^2 \mu_i^2}{(1 + s_i \mu_i - \lambda_i \mu_i)^2} \quad (37)$$

(II) 在模型 (5) 中, 令 $G = I + (g_i - 1) d_i d_i'$ 且 $g_i \rightarrow 0$, 则有

$$\begin{aligned} D_i(A'A, (p-q) \sigma_B^2) &= \frac{h_{ii} - q_{ii}(M)}{(p-q) \sigma_B^2 (1 + q_{ii}(M) - h_{ii})^2} V_{B_i}^2 \\ &= (p-q) W_B^2(i) \end{aligned} \quad (38)$$

$$D_i(A'_{(i)} A_{(i)}, (p-q) \sigma_B^2) = \frac{h_{ii} - q_{ii}(M)}{(p-q) \sigma_B^2 (1 + q_{ii}(M) - h_{ii})} V_{B_i}^2 \quad (39)$$

考虑到文章篇幅, 以上公式的证明从略。

式 (38), (39) 实际上是删除 (a'_i, l_i) 的 Cook 距离公式。当 $B = 0$ 时, 由以上公式可推出文献 [8, 9] 的所有 Cook 距离公式。

4 结束语

本文将 GM 模型的方差扰动影响分析的有关理论推广至带有约束的参数的平差模型, 提出了随机模型的扰动影响分析。该成果对扰动分析理论的扩展、对抗差估计的方案设计有重要的指导意义。本文还建立了扰动模型的 Welsch-Kun 统计量和 Cook 距离, 扩展了 Welsch-Kun 统计量和 Cook 距离用于影响分析的适应范围。目前对 Cook 距离多大, 对应的数据点为强影响点还没有定论^[8], 因而对本文的结果的实际应用有待继续研究。我们可以类似 [5] 给出实例, 但仅仅是验证本文的公式, 考虑到文章篇幅, 从略。

REFERENCES

- 1 Huber PJ. Robust statistic. New York: Wiley, 1981: 1– 10.
- 2 Zhu Jianjun. The Australia Surveyor, 1996, 36 (2): 111– 115.
- 3 Zhu Jianjun. Journal of Geodesy, 1996, 70: 586– 590.
- 4 Wang Zewen (王泽文) and Tao Benzao (陶本藻). Acta Geographica et Cartographica Sinica (测绘学报), 1989, 18 (3): 168– 173.
- 5 Jin Fengxiang (靳奉祥). PhD Thesis. Changsha: Central South University of Technology, 1994.
- 6 Wang Zhizhong (王志忠). Journal of Central South University of Technology (中南工业大学学报), 1997, 28 (5): 423– 426.
- 7 Dargl Pregibon. The Annals of Statistics., 1981, 9: 485– 498.
- 8 Chen Xiru (陈希孺) and Wang Songgui (王松桂). Jindai Huigui Fenxi (近代回归分析). Hefei: Anhui Education Press, 1987: 1– 20.
- 9 Cook R D and Weisberg S. Residuals and Influence in Regression. New York: Chapman and Hall, 1982: 1– 10.
- 10 Wang Zhizhong. Trans Nonferrous Met Soc China, 1997, 7 (4): 160– 163.

DEVELOPMENT OF INFLUENCE ANALYSIS IN ADJUSTMENT MODEL

Wang Zhizhong and Zhu Jianjun

College of Resources, Environment and Civil Engineering,

Central South University of Technology, Changsha 410083, P. R. China

ABSTRACT Based on the main results of influence analysis in the adjustment model, the paper studies the influence problem of least squares estimator for the adjustment model under the restriction condition with covariance matrix disturbance, and established the relationships between $\hat{X}_B (G)$ and $\hat{X}_B$, where $\hat{X}_B (G)$ is the least squares estimator of unknown parameter vector X of the disturbing model, and $\hat{X}_B$ is of the adjustment functional model under the restriction condition; then still defined the Welsch-Kuh statistic and Cook distance and obtained their computationally convenient formulae, which can be assessed the disturbing influence.

Key words influence analysis least squares estimate Cook distance Welsch-Kuh statistic (编辑 何学锋)