

流函数法在铸轧变形理论分析中的应用^①

孙斌煜 张 洪

(太原重型机械学院机械系, 太原 030024)

孙航临

(太原矿山机器厂, 太原 030009)

摘 要 根据流体力学中的 Navier-Stokes 方程, 利用流函数法, 对铸轧变形区的流变特性进行了理论分析。铸轧板的宽长比较大, 可简化为平面问题, 由此建立的二阶偏微分方程组, 直接求解仍较困难; 引入流函数, 设定并建立铸轧区的速度场, 使其满足不可压缩条件和速度边界条件, 这样求解偏微分方程组成为可能, 并由此可为求出板带铸轧变形区的单位压力分布解析式创造条件。

关键词 流函数 板带铸轧 变形区

中图法分类号 TG331

板带铸轧成型是一项较为成熟的生产工艺, 但对其流变特性和变形基础理论研究甚少, 对铸轧力的研究更少。铸轧力的计算通常套用热轧公式^[1], 忽略了铸轧与热轧的区别, 求出的结果比实测值大得多^[2]。原因在于铸轧物理模型不同于热轧。铸轧时金属接触表面虽已凝固, 但其内部要经历液相到固相的过程, 其变形区绝大部分金属的物理特性更接近粘性流体, 可引用 Navier-Stokes 方程^[3]作为研究讨论铸轧力求解的基本方程:

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1)$$

式中 p —静水压力, $\mathbf{F}$ —体积力, ρ —密度。

考虑到铸轧板宽高比较大, 可简化为平面问题; 但方程(1)仍是二阶偏微分方程组, 直接求解较困难。如引入流函数方法^[4-7], 用流函数设定速度场, 那么求解偏微分方程组就有可能, 现在关键是分析铸轧变形区的流变特性及速度场, 这正是本文要讨论的问题。

1 理论分析

铸轧变形区金属流动的速度场必须满足不

可压缩条件和速度边界。对于通过光滑轮廓的刚性铸轧辊的稳态铸轧过程, 通常可直观地估计其流线形状。如所假定的流线形状能满足要求^[8], 则所得速度场与真实场有极好的近似。

为了表示流线的方程或明确地表示规定的流线形状, 现引入曲线坐标 ξ_1 和 ξ_2 , 若用 x 和 y 表示流线则有

$$\xi_1 = \xi_1(x, y) = \text{常数} \quad (2)$$

对应于某一 ξ_1 , 就有一条流线的方程, 或采用曲线坐标 ξ_1 和 ξ_2 表示流线, 则

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi_1, \xi_2) \\ y &= y(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里需指出的是: 沿某一条流线 $\xi_1 = \text{常数}$, ξ_2 是变量, 即为沿每一条流线变化的参数。根据流线方程得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \quad (4)$$

由式(4)知道

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right) \quad (5)$$

同理对于某一流线常数, 由式(3)知道

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right) \quad (6)$$

因为式(4), (5)相等, 则

① 山西省自然科学基金资助项目 94055 收稿日期: 1998-05-07; 修回日期: 1998-09-06
孙斌煜, 男, 46岁, 硕士, 副教授

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)/\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)/\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) \text{ 或} \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)/\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)/\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

同理,

$$-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)/\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right)/\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)$$

或

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = 0 \quad (8)$$

积分得

$$\Psi = f(\xi_1) \quad (9)$$

式中 $f(\xi_1)$ 一为任意函数

因此满足 $d\Psi = -v_y dx + v_x dy$ 和式(2) 或 (3) 的速度场具有下列形式:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \xi_1}{\partial y} f'(\xi_1) \\ v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \xi_1}{\partial x} f'(\xi_1) \end{cases} \quad (10)$$

有

$$\text{又因为 } \Delta x \Delta y = |\Delta| \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \quad (11)$$

式中 $|\Delta|$ 为 Jacobian 行列式

$$\text{所以 } \Delta \xi_1 / \Delta y = \Delta x / |\Delta| \Delta \xi_2 \quad (12)$$

$$\text{则有 } \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{1}{|\Delta|} \frac{\partial x}{\partial \xi_2}$$

$$\text{同理, } \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{1}{|\Delta|} \frac{\partial y}{\partial \xi_2}$$

因而速度场的表达式又可写成下列形式:

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{|\Delta|} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} f'(\xi_1) \\ v_y = \frac{1}{|\Delta|} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} f'(\xi_1) \end{cases} \quad (13)$$

式中 $f'(\xi_1) = \frac{d}{d\xi_1}[f(\xi_1)]$ 和 $f(\xi_1)$ 为任意函数, 要求满足速度边界条件。

2 变形区参数的确定

图 1 给出了连续铸轧变形的纵向断面示意图。在变形理论研究中, 为使问题简化, 常用直线代替接触弧的实际曲线, 为了更真实地反映接触弧的形状, 这里把铸轧变形区看作顶点位于图 1 中 B 点的抛物线。线的一端通过 A

点, 这时抛物线的方程具有如下形式:

$$\frac{h_x}{2} = ax^2 + b \quad (14)$$

式中 常数 a 和 b 可由曲线通过 A、B 时的条件来确定, 即

$$a = \Delta h / 2l^2; \quad b = h_1 / 2$$

这时铸轧变形区任一横断面高度可写成

$$h_x = \Delta h / l^2 \cdot x^2 + h_1 \quad (15)$$

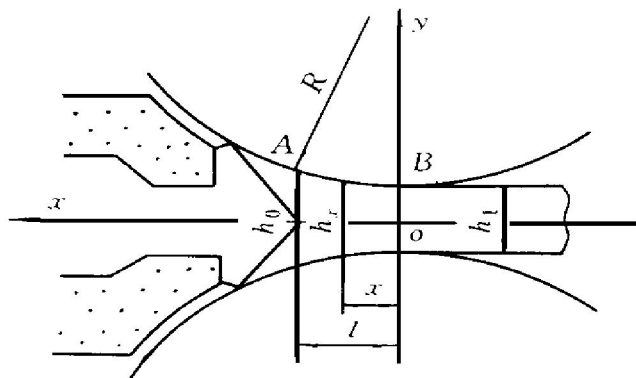


图 1 铸轧变形区

Fig. 1 Casting-rolling deformation area

3 铸轧变形区速度场的分析

当金属流体通过以式(15)为边界方程的稳态流动时, 变形区金属流动对称于 x 轴, 因此, 它是一条流线; 在变形区的其他流线均假设为式(15)的抛物线形式, 并且在变形区入口处(即 $h_x = h_0$ 时)具有相等间隔的流线, 在出口处($h_x = h_1$ 时)同样具有相等间隔。

铸轧变形区的流线用式(15)的曲线族来表示, 沿每条流线的常量参数 ξ_1 便可选择如下形式:

$$\xi_1 = h_1 l^2 y / (\Delta h x^2 + h_1 l^2) \quad (16)$$

由上式知道它满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad \xi_1 &= 0 \\ y = h_x / 2, \quad \xi_1 &= h_1 / 2 \end{aligned} \right\} \quad \text{ld} \quad (17)$$

对式(16) 分别求对 y , x 的一阶偏导数并代入式(10), 整理得

$$\begin{cases} v_x = h_1 l^2 / (\Delta h x^2 + h_1 l^2) \cdot f'(\xi_1) \\ v_y = 2 h_1 l^2 \Delta h x y / (\Delta h x^2 + h_1 l^2)^2 \cdot f'(\xi_1) \end{cases} \quad (18)$$

根据上面要求所选择的流函数 $f(\xi_1)$ 应该满足速度边界条件

$$|v_x|_{x=0} = v_1 \quad (19)$$

式中 v_1 为出口处金属 x 方向的平均速度。

这时式(19)可写成

$$|v_x|_{x=0} = f'(\xi_1) \quad (20)$$

$$\text{从而 } f'(\xi_1) = v_1 \quad (21)$$

$$\text{或 } f(\xi_1) = v_1 \xi_1 \quad (22)$$

如取 $m = h_1 l^2$, 这时速度场为

$$\left. \begin{aligned} v_x &= mv_1 / (\Delta h x^2 + m) \\ v_y &= 2\Delta h m v_1 x / (\Delta h x^2 + m)^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

对速度场是否满足稳态流动的连续性方程式进行检验:

$$(\partial v_x) / (\partial x) = - 2\Delta h m v_1 x / (\Delta h x^2 + m)^2$$

$$(\partial v_y) / (\partial y) = 2\Delta h m v_1 x / (\Delta h x^2 + m)^2$$

$$\text{所以 } (\partial v_x) / (\partial x) + (\partial v_y) / (\partial y) = 0$$

从而证明了用流函数法所获得的铸轧变形区速

度场能自动满足连续方程。

REFERENCES

- 1 Sun Binyu(孙斌煜), Zhang Hong(张 洪) *et al.* The Chinese Journal of Nonferrous Metals (中国有色金属学报), 1995, 5(3): 101.
- 2 Shi Rong(史 荣), Cui Xiaochao(崔小朝) and Sun Binyu(孙斌煜). The Chinese Journal of Nonferrous Metals (中国有色金属学报), 1996, 6(2): 98.
- 3 Xie Dingyu(谢定裕). Fluid Mechanics(流体力学). Tianjin: Nankai University Press, 1987: 48.
- 4 Pan Wenquan(潘文全). Engineering Fluid Mechanics(工程流体力学). Beijing: Tsinghua University Press, 1988: 56.
- 5 Nagpal V. Trans ASME Seri, 1974: B 96.
- 6 Kachanov L M. Foundation of the Theory of Plasticity. London: Academic Press, 1977: 168.
- 7 Nagpal V. Trans ASME Seri, 1977: B 99.
- 8 Kiuchi M and Aritzur B. Trans ASME Seri, 1982: B 102.

THEORETICAL ANALYSIS OF FLOW FUNCTION METHOD IN CASTING-ROLLING DEFORMATION

Sun Binyu, Zhang Hong and Sun Hanglin[†]

Department of Mechanics,

Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan 030024, P. R. China

[†] *Taiyuan Mining Machinery Plant, Taiyuan 030009, P. R. China*

ABSTRACT According to the Navier-Stokes equation in fluid mechanics, the rheological properties of casting-rolling deformation area with flow function method was analyzed. The researching problem was simplified into a 2D one, because the width of casting-rolling sheet was much greater than height. It was found that direct solution for the established two-dimensional partial differential equation is difficult, however if flow function is led in and velocity field of casting-rolling area is established, which satisfies not only the condition of no compression but also velocity boundary, then it is possible to find out the solution of partial differential equation and the analytic solution of average unit compression stress distribution for casting-rolling deformed area.

Key words flow function strip casting-rolling mill deformation area

(编辑 黄劲松)