

作用于中小尺寸板状熔体 表面电磁压力的分析^①

沈 军 李建国 傅恒志

(西北工业大学凝固技术国家重点实验室, 西安 710072)

苏俊义

(西安交通大学, 西安 710049)

摘 要 推导了一个适用于中小尺寸板状熔体表面电磁压力的计算公式。该式给出了电磁压力系数 p 与板厚 a 、电流频率 f 、以及材料的电磁参数 $\mu\gamma$ 之间的准确关系。主要结果如下: (1) 当 f , a , 以及 $\mu\gamma$ 足够大, 使得板的厚度 a 与电流集肤厚度 δ 的比 $a/\delta > 2.2$ 时, 电磁压力系数是一个常数 ($p = 1$), 电磁压力可由公式 $p_m = B^2/2\mu$ 计算。(2) 但若 f , a , 以及 $\mu\gamma$ 比较小, 使 $a/\delta < 2.2$, 则电磁压力必须由系数 p 进行修正。也就是说, 电磁压力不仅由熔体表面的磁感应强度 B 决定而且也由板的厚度 a , 电流频率 f , 以及材料的电磁参数 $\mu\gamma$ 决定。

关键词 电磁约束成形 电磁压力 磁感应强度

中图法分类号 TG132.3

电磁约束成形是材料电磁加工工艺的一个重要分枝, 是对金属等导电熔体近净成形的一种先进技术, 属电磁流体力学与材料学科的交叉领域, 对该技术的研究越来越引起国内外学者的重视^[1-3]。其约束成形原理主要是依靠感应器的磁场在熔体表面产生的电磁压力和熔体本身产生的静压力之间的平衡来实现熔体的约束成形, 通过调节二者的相对大小及分布就可以达到改变被约束熔体形态的目的。在该技术的应用中最为关心的问题是确定熔体的成形形态^[4-6], 而成形形态的确定依赖于电磁压力的准确计算。目前普遍使用的电磁压力计算公式为 $p_m = B^2/2\mu$, 该公式适合在半无限大的平板条件下, 磁感应强度、感应电流密度沿表层的分布满足指数关系时的场合, 故对厚大件的电磁压力计算比较理想^[7-10]。但随着电磁成形技术的发展, 人们期望将该技术应用于尺寸更小、形状更复杂的部件, 如薄板材的连续铸造, 具有超细柱状晶的涡轮机叶片的成

形。在这种情况下, 磁感应强度、感应电流密度在熔体中的分布不再满足指数关系, 因而产生的表面电磁压力也发生相应的改变。本文利用 Maxwell 方程推导了在薄板状熔体条件下感应电流以及磁感应强度在其中的分布关系, 并由此推出了电磁体力的分布公式, 最后利用积分运算求出了熔体表面电磁压力的计算公式, 在此基础上仔细讨论了影响电磁压力的各个因素以及相关参数的选配原则。

1 电磁压力公式的推导

图1是薄板状熔体中磁感应强度 B_z 以及电流密度 J_y 分布的示意图。设板的宽度 h 以及长度 L 明显大于厚度 a , 则磁感应强度以及电流密度的端部效应可以忽略; 并设表面磁感应强度只有 z 方向的分量, 在此假设条件下, 板中的电场强度及电流密度只有 y 方向的分量 E_y 和 J_y 。由 Maxwell 方程得到 J_y , E_y , B_z 以

① 国家自然科学基金资助项目(59771053)及中国博士后科学基金资助项目(中博基[1997]11号)

收稿日期: 1998-11-26; 修回日期: 1999-02-03 沈 军, 男, 37岁, 副教授

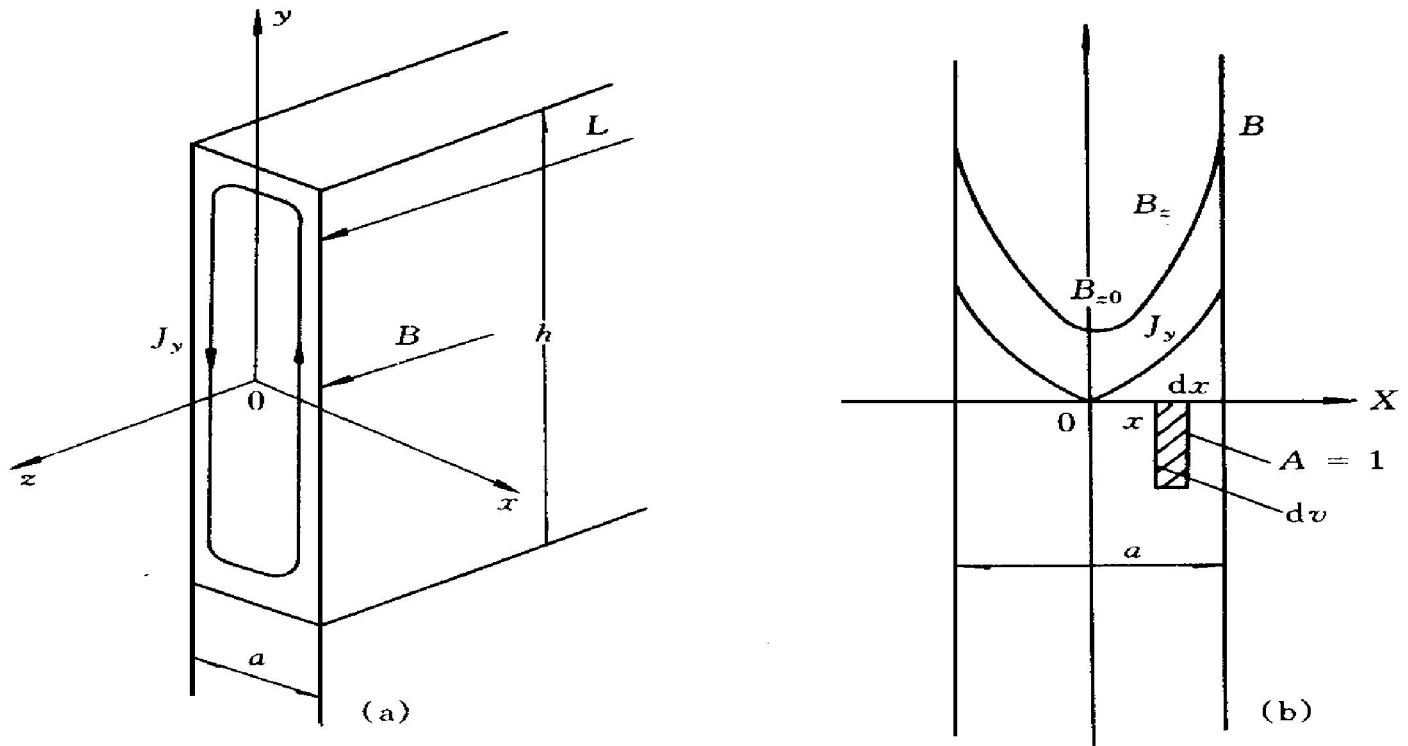


图1 薄板中电流密度、磁感应强度分布示意图

Fig. 1 Scheme of distribution of current density and magnetic flux intensity

及磁场强度 H_z 满足的相量方程如下:

$$\frac{dH_z}{dx} = -J_y \quad (1)$$

$$\frac{dE_y}{dx} = -j2\pi f \mu H_z \quad (2)$$

$$J_y = \gamma E_y \quad (3)$$

$$H_z = \frac{B_z}{\mu} \quad (4)$$

以上各式中, f 是电流频率, μ 是熔体磁导率, γ 是熔体电导率, j 是虚数的基本单位。

由式(1), (2)和(3)得

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} - k^2 H_z = 0 \quad (5)$$

其中

$$k = (j2\pi f \mu \gamma)^{1/2}$$

方程(5)的通解为

$$H_z = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx} \quad (6)$$

把式(4)代入式(6)得

$$B_z = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx} \quad (7)$$

将下列边界条件代入式(7)

$$B_z \Big|_{x=-\frac{a}{2}} = B_z \Big|_{x=\frac{a}{2}} \text{ 以及 } B_z \Big|_{x=0} = B_{z0}$$

磁感应强度 B_z 被表示为

$$B_z = B_{z0} \cosh kx \quad (8)$$

把式(8)和式(4)代入式(1)得

$$J_y = -k \frac{B_{z0}}{\mu} \sinh kx \quad (9)$$

令

$$K = (\pi f \mu \gamma)^{1/2} \quad (10)$$

则

$$k = (j)^{1/2} \sqrt{2} K \quad (11)$$

联立式(11)和式(9)得到

$$J_y = (-j)^{1/2} \frac{\sqrt{2} K}{\mu} B_{z0} \sinh kx \quad (12)$$

式(12)比式(8)多出一个 $(-j)^{1/2}$, 这说明在 B_z 和 J_y 之间的相位差是 $\frac{\pi}{4}$ 。现将相量式(8)和(12)分别写成三角正弦函数式:

$$B_z(t) = |\cosh kx| (B_{z0})_m \sin \omega t \quad (13)$$

$$J_y(t) = \frac{\sqrt{2} K}{\mu} |\sinh kx| (B_{z0})_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) \quad (14)$$

式中 $(B_{z0})_m$ 是板中心处磁感应强度的幅值,

(B_{z0})_m 和 B_{z0} 之间的关系如下:

$$B_{z0} = \frac{\sqrt{2}}{2} (B_{z0})_m \quad (15)$$

此处 B_{z0} 是板中心处磁感应强度的有效值, 由 Lorentz 方程得出作用在熔体中各点的电磁体积力为

$$F(t) = J_y(t) B_z(t) \quad (16)$$

将式(13), (14)和(15)代入式(16)得

$$F(t) = \frac{B_{z0}^2}{\mu} \sqrt{2} K |\operatorname{ch} kx| |\operatorname{sh} kx| \cdot \left(\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos \frac{\pi}{4} \right) \quad (17)$$

该力方向与 x 轴一致并指向熔体内部。在一个周期中的平均值为

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) d\theta \quad (18)$$

将(17)代入(18)式运算得

$$F = \frac{B_{z0}^2}{\mu} K |\operatorname{ch} kx| |\operatorname{sh} kx| \quad (19)$$

设熔体表面磁感应强度的有效值为 B , 由(8)可知:

$$B_{z0} = \left[\frac{B}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} \right] \quad (20)$$

现求出 $\operatorname{ch} kx$, $\operatorname{sh} kx$, $\operatorname{ch} \frac{ka}{2}$ 的模并与式(20)一起代入式(19)得

$$F = \frac{B^2 K}{\mu (\operatorname{ch} Ka + \cos Ka)} \cdot (\operatorname{ch}^2 Kx - \cos^2 Kx)^{1/2} \quad (21)$$

式(21)就是作用在横坐标 x 处与熔体表面垂直并指向其内部的电磁体积力在一个正弦周期内的平均值。电磁压力 p_m 实际上是一个能表征整个电流层中电磁体积力对熔体所产生的总约束效果的一个等价表面压力。图1(b)中以板的表面上单位面积为底, 以半厚度 $a/2$ 为高的体积中对体积力积分就可获得一个相当于作用在该单位表面上的等价的表面压力, 将该力称为电磁压力:

$$p_m = \int_v F dv \quad (22)$$

亦即

$$p_m = \int_0^{a/2} F dx \quad (23)$$

将式(21)代入式(23)得

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu} \frac{1}{\operatorname{ch} Ka + \cos Ka} \cdot \int_0^{Ka} (\operatorname{ch}^2 q - \cos^2 q)^{1/2} dq \quad (24)$$

令

$$p = \frac{1}{\operatorname{ch} Ka + \cos Ka} \cdot \int_0^{Ka} (\operatorname{ch}^2 q - \cos^2 q)^{1/2} dq \quad (25)$$

则

$$p_m = p \frac{B^2}{2\mu} \quad (26)$$

2 分析与讨论

下面对式(24)至(26)表达的意义进行讨论之前, 首先要搞清 Ka 表达的物理意义。由式(10)可知

$$Ka = (\pi f \mu_Y)^{1/2} a$$

而对同种材料半无限大的平板在频率为 f 的电流通过时其集肤层理论厚度为

$$\delta = \frac{1}{(\pi f \mu_Y)^{1/2}} \quad [4]$$

即

$$Ka = a / \delta \quad (27)$$

式(27)说明 Ka 的物理意义是实际板的厚度 a 与同种材料半无限大平板表面电流集肤层理论厚度 δ 的比值, 该值与板厚 a 和电流频率 f 以及材料的电磁参数 μ_Y 有关。由公式(25)和(26)可知: 用于计算电磁压力的公式不能简单地表示为 $p_m = B^2/2\mu$, 必须要用电磁压力系数 p 进行修正, 而该系数由 a/δ 决定, 亦即电磁压力不仅由磁感应强度 B 决定, 而且也由板的厚度 a 和电流频率 f 以及材料的电磁参数 μ_Y 决定。图2就是对方程(25)数值积分的结果, 图中曲线表明: 当 $a/\delta > 2.2$ 时, 电磁压力系数是一个常数($p = 1$), 因此, 电磁压力可用通常的公式 $p_m = B^2/2\mu$ 进行计算; 但是若 $a/\delta < 2.2$, 那么随着 a/δ 的减小, 系数 p 减小, 电磁压力被减弱。产生以上结果的原因可

以这样理解: 由于板状熔体的厚度是有限的, 而且作用在其两侧的磁场完全相同、对称。因此, 我们可以将其中的电流密度分布, 看成是两个平行相对着的、表面磁感应强度均为 B 的、与 x 轴垂直的半无限大平板(未重合时两板集肤层中电流密度沿 x 轴的分布都满足指数关系且集肤厚度均由公式 $\delta = 1/(\pi f \mu \gamma)^{1/2}$ 计算^[4]) 沿 x 轴重合的结果。所以在这种情况下, 两个方向相反的电流层就有可能部分重合, 使电流密度抵消、下降, 形成一种新的非指数分布, 这取决于熔体厚度 a 与相同材料熔体在半无限大平板条件下的电流集肤层厚度 δ 的比值。当 $a/\delta > 2.2$ 时, 在板两侧的方向相反的电流没有发生相互重叠、抵消, 因此电流密度的大小及分布基本上没有改变, 故电磁压力也保持恒定不变, 并且与 a/δ 的大小没有关系; 但当 $a/\delta < 2.2$ 时, 板两侧反方向的电流层发生相互重叠、抵消, 使总的电流密度下降, 从而引起电磁压力的下降, 且 a/δ 越小, 反向电流层相互重叠抵消越严重, 电流密度下降越大, 因而电磁压力下降幅度也越大。图3和图4则是由图2转化来的, 图中曲线给出了电磁压力系数 p 与电流频率 f 和板的厚度 a 以及材料的电磁参数 $\mu\gamma$ 之间的具体关系。图中曲线表明: 当频率升高到一定的临界值时, δ 变得足够薄, 使板两侧反方向的电流层无法相互重叠抵消, 因此电磁压力不会损失并且保持一个常数; 反之, 则会引起反向电流的重叠和抵消, 引起总电流密度的下降, 造成电磁压力的损

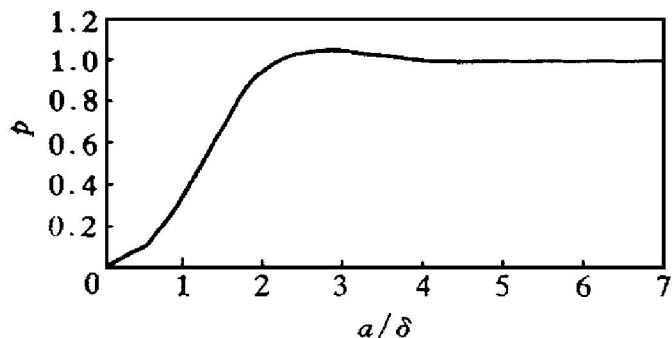


图2 电磁压力修正系数 p 与 $\frac{a}{\delta}$ 的关系曲线

Fig. 2 Effect of ratio a/δ on electromagnetic pressure factor p

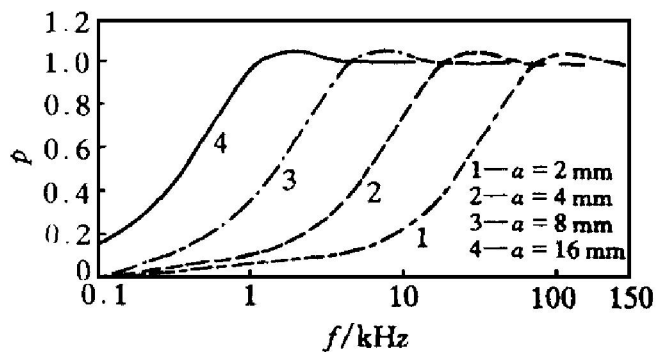


图3 板状铝合金熔体($\mu\gamma = 5.03 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$) 在不同厚度时的 p - f 曲线

Fig. 3 p - f curves for platelike aluminum melt ($\mu\gamma = 5.03 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$) at different plate thickness

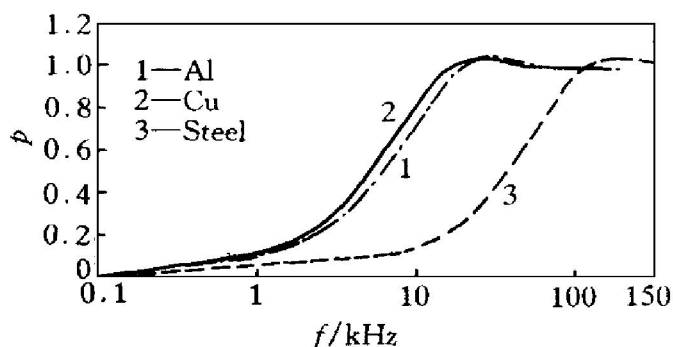


图4 板状铝合金熔体($\mu\gamma = 5.03 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$), 铜合金熔体($\mu\gamma = 6.0 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$)以及钢液($\mu\gamma = 0.84 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$) 在厚度 $a = 4 \text{ mm}$ 时的 p - f 曲线

Fig. 4 p - f curves for platelike melts of aluminum($\mu\gamma = 5.03 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$), copper ($\mu\gamma = 6.0 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$), and steel ($\mu\gamma = 0.84 \text{ H} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$) at thickness $a = 4 \text{ mm}$

失。频率越低, δ 越大, 这种反向重叠越严重, 电磁压力损失越大。基于同样的理由, 板的厚度、以及材料的电磁参数也有它们的临界值, 并且当其大于临界值时, 电磁压力保持一个常数没有损失; 当其小于临界值时, 电磁压力也会损失, 其值越小, 电磁压力损失越大。总之, 在电磁约束成形过程中, 如果金属熔体厚度比较小、或电流频率比较低、或电磁参数比较小时, 常常会引起电磁压力的损失, 因此, 由公式 $p_m = B^2/2\mu$ 计算出的电磁压力的值并不代

表真正的电磁压力, 必须要用系数 p 进行修正。

REFERENCES

- 1 Mitsunaki Furui and Yo Kojima. ISIJ International, 1993, 33: 400.
- 2 El-Kaddah N and Mortimer J H. Light Metal Age, 1990, 19: 37.
- 3 Sears J W. Journal of Metals, 1990, 42: 17.
- 4 Sakane J, Li B Q and Evans J W. Metallurgical Transactions B, 1988, 19: 397.
- 5 Hitoshi Nakata and Jacqueline Etay. ISIJ International, 1992, 32: 521.
- 6 Shen J, Li J G and Fu H Z. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 1995, 5(1): 64.
- 7 Fugate D W and Hoburg J F. IEEE Transactions on Magnetism, 1991, 27: 5229.
- 8 Li B Q, Evans J W and Cook D P. Metallurgical Transactions B, 1991, 22: 121.
- 9 Masayuki Sato, Toshihiro Hatori and Masahiro Saito. IEEE Transactions on Industry Applications, 1997, 33: 1527.
- 10 Hahn S H, Sakai Y, Tsukada T *et al.* Metallurgical and Materials Transactions B, 1998, 29: 223.
- 11 Li J G and Fu H Z. Acta Metall Sin A, 1994, 49: 63.

ANALYSIS FOR ELECTROMAGNETIC PRESSURE ON THIN PLATELIKE MELT

Shen Jun, Li Jianguo and Fu Hengzhi

State Key Laboratory of Solidification Processing,

Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, P. R. China

Su Junyi

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China

ABSTRACT An equation used to calculate electromagnetic pressure for confining and shaping a platelike melt with small or medium thickness is brought forward. The equation gives a precise relationship between electromagnetic pressure factor p and current frequency f , melt thickness a and electromagnetic parameter $\mu\gamma$. The main results can be summarized as follows: (1) As the f , a , and $\mu\gamma$ are large enough, causing the ratio of melt thickness to current skinning depth a/δ to be larger than 2.2, the p will be a constant ($p = 1$) and the electromagnetic pressure can be calculated with $p_m = B^2/2\mu$. (2) As the f , a , and $\mu\gamma$ are not large enough, and the ratio a/δ is less than 2.2, the factor p is no longer a constant but changes from 1 to 0 with the decrease of a/δ . In this case, the value of electromagnetic pressure is determined not only by magnetic flux density B but also by the current frequency f , melt thickness a and electromagnetic parameter $\mu\gamma$.

Key words electromagnetic confinement and shaping electromagnetic pressure magnetic flux density

(编辑 朱忠国)