第 10 卷第 4 期
Vol. 10 No. 4
中国有色金属学报
The Chinese Journal of Nonferrous Metals
2000 年 8 月
Aug. 2000

[文章编号] 1004- 0609(2000)04- 0613- 05

基于 Monte-Carlo 方法的强非线性函数方差估计①

李朝奎[1, 2], 黄力民[1], 曾卓乔[2], 傅 明[2]
(1. 湘潭工学院 土木工程系, 湘潭 411201; 2. 中南工业大学 测量与国土信息研究所, 长沙 410083)

[摘 要] 以 Monte-Carlo 方法为基础研究了强非线性函数的方差估计问题。对直接观测量的方差进行了随机扰动, 将由线性同余法产生的一组伪随机数用 Box-Muller 变换法转换为服从 $N(0, 1)$ 分布的正态伪随机数, 并对伪随机数作了多项统计检验。在此基础上应用 Bessel 公式统计出强非线性函数的模拟方差。算例表明: Monte-Carlo 方法估计出的非线性函数的方差比经典方法估计出的方差更优。

[关键词] Monte-Carlo 方法; 强非线性函数; 方差估计
[中图分类号] P22; P207 [文献标识码] A

在测量学范围内绝大多数的函数模型客观上都是非线性的[1, 2]。目前国内外测量界对于非线性函数方差的估计方法大致有二类: 1) 对于弱非线性函数直接用方差-协方差传播定律求得函数的方差; 2) 对于强非线性函数或难于显化的函数采用 Monte-Carlo 方法求得函数的方差。

经典测量平差理论所涉及到的函数模型绝大多数属于前者[3]。将非线性函数按泰勒级数展开取至一次项, 用方差-协方差传播定律求得函数方差, 其结果多能满足实际工作的精度要求, 但对后者的研究报道还不多。随着测绘技术的进步和测量领域的拓展, 一方面实际对测量数据的精度要求不断提高, 另一方面测量参数之间的函数关系变得相对复杂, 经典的数据处理方法误差可能成为制约测量精度的主导因素[4]。就误差传播理论而言, 非线性函数的线性化必然导致函数特征的改变及信息、精度方面的损失。尤其是对于强非线性函数, 其固有非线性曲率大, 函数不可微或者是对线性展开初值点十分敏感。这样, 基于线性理论的经典误差传播定律变得无能为力。50 年代以来, 随着计算技术的快速发展, 以计算技术为基础的 Monte-Carlo 方法受到国内外测绘界的关注[5, 6]。该方法的实用意义在于它能够解决大规模完全非线性函数的方差估计问题而无须对函数作线性化处理, 这正是非线性函数空间内测量平差与数据处理理论的宗旨和出发点, 而强非线性函数的方差估计问题是非线性测量数据处理理论的重要组成部分, 因而系统研究这一问题有着极其重要的理论和现实意义。

1 Monte-Carlo 方法的基本思想[7]

Monte-Carlo 方法又称为统计实验法或数学模型扭曲法, 其基本思想是用数学的方法产生正态伪随机数来模拟偶然误差。设有非线性函数:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) + \varepsilon \tag{1a}$$

$$e_j \sim iidN, \ j = 1, 2, 3, \cdots, m \tag{1b}$$

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j) = \begin{cases} \sigma^2 I & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1c}$$

式中 ε 为函数误差; x_j 是测量参数, 可以是同类的, 也可以是非同类的; $f(x_j)$ 是强非线性函数; e_j 是测量参数的误差向量; 式(1c)的假定是为了研究方便, 对于方差不等的情况, 方法完全适用。为估计 y 的方差, 首先在计算机上输入直接测量参数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ 及其标准偏差 σ, 产生一列服从 $N(0, 1)$ 分布的随机数, 通过对各观测量的测量标准差进行随机扰动, 得到非线性函数各观测分量的多组随机误差向量, 从而得出函数的一组对应的随机误差向量(一组含扰动的参数模拟值), 按 Bessel 公式统计并输出非线性函数的模拟方差。计算机模拟过程如图 1 所示。

2 正态伪随机数的产生

为构造一个模拟随机扰动系统的数学模型, 必

① [基金项目] 国家自然科学基金资助项目(49774209)和湖南省自然科学基金资助项目(99JJY2003)
[收稿日期] 1999- 07- 21; [修订日期] 2000- 01- 12 [作者简介] 李朝奎(1967-), 男, 讲师, 博士研究生.

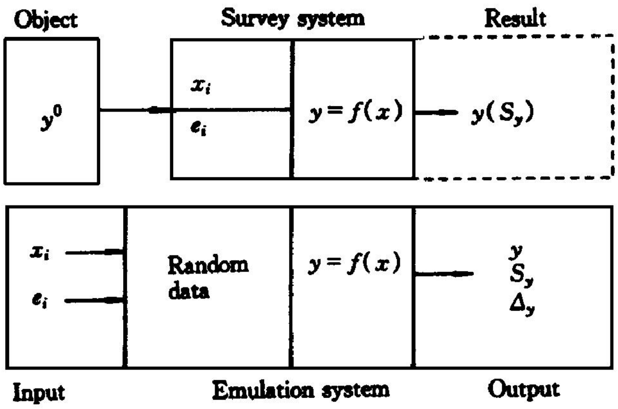

图 1　计算机模拟测量系统

Fig. 1　Computer simulation survey system

须产生所需分布的伪随机数(与实际的随机数相区别)。伪随机数的产生分二步进行:

1) 在[0, 1]区间产生均匀分布的伪随机数;

2) 应用“Box-Muller 变换法”[8]或“中心极限定理”将均匀分布的伪随机数转换为服从正态分布的离散伪随机数。

用线性同余法产生均匀分布的伪随机数, 递推同余迭代式为:

$$Z_i = (aZ_{i-1} + c)\bmod M \tag{2}$$

式中　a 为乘子, c 为非负整数, M 为模, $\bmod M$ 表示除以 M 后取余数。给定初值 Z_0, 进行双倍位乘法运算得到伪随机数 Z_1, Z_2, Z_3, …, Z_m。然后按式(3)求得在[0, 1]区间上服从均匀分布的伪随机数 r_i:

$$r_i = \frac{Z_i}{M} - \mathrm{entire}\left[\frac{Z_i}{M}\right] \tag{3}$$

通过 Box-Muller 变换法将 r_i 转化为服从 $N(0, 1)$ 分布的伪随机数

$$\dot{x}_i = \sqrt{-2\ln(r_i)} \times \cos(2\pi r_{i+1}) \tag{4a}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \sqrt{-2\ln(r_i)} \times \sin(2\pi r_{i+1}) \tag{4b}$$

由此得到服从 $N(0, 1)$ 分布的伪随机数向量 $\dot{\boldsymbol{x}}$。

以下是证明。

为了书写方便, 令

$\dot{x}_i = x$, $\dot{x}_{i+1} = y$, $r_i = r_1$, $r_{i+1} = r_2$, 则由式(4a), (4b)得到:

$$r_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}\left[x^2 + y^2\right]\right],$$

$$r_2 = \frac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}\left[\frac{x}{y}\right] \tag{5}$$

根据公式

$$l(x, y) = f(h_1(x, y), h_2(x, y))J(x, y),$$

可得到 x, y 的联合概率密度函数:

$$f(x, y) = g(r_1, r_2) \times J(x, y) \tag{6}$$

因为 r_1, r_2 为独立均匀分布随机量, 故

$$g(r_1, r_2) = g_1(r_1) \times g_2(r_2) = 1。$$

将雅可比式及 $g(r_1, r_2)$ 代入式(6)得:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \tag{7}$$

所以 x, y 相互独立且服从标准正态分布。

依据测量参数的偏差 σ(通过方差估计已经获得), 按下式求出偏差的扰动伪随机数:

$$\Delta = \sigma \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

式中　Δ 为扰动误差的纯偶然误差向量, $\Delta \sim N(0, \sigma^2)$; $\dot{\boldsymbol{x}}$ 为伪随机数向量, 则多组模拟偶然误差构成的向量为:

$$\omega = \sigma \times \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \cdots & \dot{x}_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dot{x}_{m1} & \dot{x}_{m2} & \cdots & \dot{x}_{mn} \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)。$$

3　模拟精度的输出

对于式(1a), 以输入测量参数 x_1, x_2, x_3, …, x_m 为初值的向量 $\boldsymbol{o}$, 加入式(8)计算的伪随机数 Δ 即得到模拟测量值 $\boldsymbol{f}$。

$$\underset{m\times 1}{\boldsymbol{f}}(i) = \underset{m\times 1}{\boldsymbol{o}} + \underset{m\times 1}{\omega}(i) \tag{9}$$

式中　i 表示向量组数, $i = 1, 2, 3, \cdots, n$。将式(9)代入式(1a), 得到一组模拟函数值 y_F 且 $y_F \sim N(y_F, \sigma_F^2)$。按 Bessel 公式统计 y_F 的精度 s^2 为:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (y_F(i) - \bar{y}_F)^2 \tag{10}$$

4　实际应用的几点考虑

Monte-Carlo 方法用于强非线性函数的方差估计, 还必须考虑一些实际问题:

1) 式(2)中, 要合理选择 a, x_0, M, c 四个参数。对于二进制计算机, 取 $M = 2^k$, k 为一个数字的尾部字长, 则最大可能的周期为 2^{k-2}, 例如; 对于用 8 位二进制表示字长的微型机, 运算器中以定点数运算, 此时用高 1 位表示符号位, 其余 7 位表示尾部字长。选取 x_0 为小于或等于 M 的任意正奇数即 $x_0 = 2^k - 1$; 取 $a = 8b + 3$, b 为任意正整数; 取 $c = 0$。这样可使产生的伪随机数序列周期长, 速度快, 统计性能良好。

2) 线性同余法产生的伪随机数受数字规律的限制且表现出周期性和相关性，不是完全统计意义上的随机数。而 Monte-Carlo 方法的数学理论依据是统计理论。因此，在式(9)计算之前必须对式(8)中的伪随机扰动方差进行数据处理以确保模拟数据的质量。

4.1　均值检验

对 m 个 n 维方差未知的标准正态子样 $Q_{ij} = \sigma x_{ij}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, m;\ j = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 构造统计量:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{Q}_i - 0)}{S} \sim t(n-1) \tag{11}$$

式中 $\overline{Q}_i$ 为子样均值，S 为子样标准差。作出假设

对于 H_0: $\overline{Q}_i = 0$;

对于 H_1: $\overline{Q}_i \neq 0$。

给定显著性水平 α 及自由度 $(n-1)$，查得分位值 $t_{\alpha/2}(n-1)$，当 $|T| < t_{\alpha/2}(n-1)$ 时，接受 H_0；否则拒绝 H_0。

4.2　方差检验

对于 $\Delta \sim N(0, \sigma^2)$，$S$ 的含义同上，则统计量:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \tag{12}$$

假设 H_0: $S^2 = \sigma^2$，H_1: $S^2 \neq \sigma^2$，在显著性水平 α 下接受域为

$$\left[\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1},\ \frac{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}{n-1} \right]。$$

4.3　正态分布检验

将 Q_{ij} 中 j $(j > 50)$ 个伪随机数按大小顺序分成 K 组(一般 $K \in [7, 14]$，区间样本数不小于 5 个)，每组对应一个确定的误差区间。假设母体服从正态分布，可求出每一误差区间的理论频率，从而得出理论频数 np_i 与实际频数 f_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, k)$，以此构造统计量:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{np_j}(f_j - np_j)^2 \tag{13}$$

如果假设成立即母体服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布，则 $\chi^2 \sim \chi^2(k - t - 1)$，$t$ 为正态分布的参数个数，这里 $t = 2$。

4.4　相关性检验

通过式(11)，(12)和(13)的检验可以判明伪随机数是否服从 $N(0, 1)$ 分布，但是若伪随机数之间存在相关关系或独立性不好都会对函数的方差估计产生影响。因此必须对伪随机数间的相关性进行检验。构造统计量:

$$R = \frac{\sum_{n=1}^{n} Q_{ij} Q_{i(j+1)}}{\sum_{n=1}^{n} Q_{ij}^2},\quad Q_{i(n+1)} = Q_{i1} \tag{14}$$

当 $R < R_{(n,\alpha)}$ 时，接受伪随机数之间相互独立的假设。

4.5　伪随机数据的粗差检验与剔除

式(11)～(14)的检验表明伪随机数是满足标准正态分布的随机数。受多种因素的影响，伪随机数据中可能含有"离群"的数据，理论上称为粗差。必须对其进行判别与剔除。于是构造统计量:

$$w_i = \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} \tag{15}$$

式中 $\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$，$v_i$ 是第 i 个数据的一阶中心矩。给定显著水平 α 得到相应的 W。$|v_i| < W\sigma_{vi}$ 时表明伪随机数据中不存在粗差，否则应当剔除。

5　算例

图 2 为大地四边形网，观测值及平差值如表 1。用 Monte-Carlo 方法求 AD 边的相对精度。

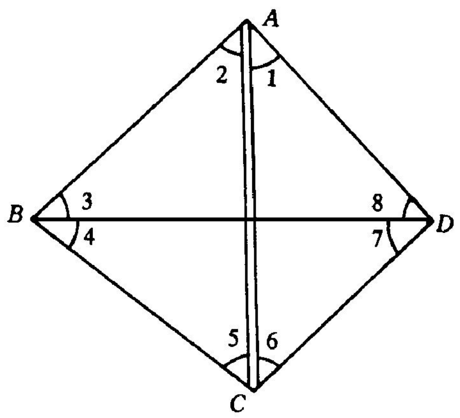

图 2　大地四边形控制网

Fig. 2　Geodetic network of quadrangle

1) AD 边的函数表达为

$$AD = AC \frac{\sin(\angle 5) \times \sin(\angle 3)}{\sin(\angle 3 + \angle 4) \times \sin(\angle 8)} \tag{16}$$

2) 按式(8)求得测量参数的 32 组方差扰动矩阵 ω，矩阵数据如表 2 所示。

3) 按式(11)～(15)对 ω 作统计分析，分析表明 ω 符合随机数的统计性质。

4) 取 AC 为一个已知单位量，由式(1a)得出一组 AD 的模拟计算值，如表 3。

5) 按式(10)统计得到 AD 的标准偏差 m 及相对精度。$m = \pm 4.12 \times 10^{-6}$(边长单位)，$m/AD = 1/27\,000$，经典计算法的结果为 1/24 000。

表 1 观测值及平差值

Table 1 Observation value and adjusted quantity

No.	Observation value	Correction value	Square error	Adjusted quantity
1	65°52′35.03″	0.23″		65°52′35.26″
2	63°14′25.02″	0.26″		63°14′25.28″
3	23°28′50.06″	1.15″		23°28′51.21″
4	23°31′29.31″	−0.69″	$\sigma^2=0.64$	23°31′28.62″
5	69°45′14.74″	0.15″		69°45′14.89″
6	61°40′57.38″	−0.48″		61°40′56.90″
7	25°02′19.23″	0.37″		25°02′19.60″
8	27°24′08.77″	−0.52″		27°24′08.25″

表 2 方差的随机扰动数据

Table 2 Random disturbance data of square error

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
∠3	0.23	0.25	−0.52	0.61	0.52	−0.19	0.69	0.68	−0.70	0.19	−0.45
∠4	−0.13	0.44	−0.41	−0.98	0.65	0.72	−2.01	−0.31	−0.18	1.70	−0.47
∠5	−0.53	0.15	−0.31	−1.3	−1.1	−1.04	0.58	−0.56	0.17	−0.87	0.17
∠8	−0.47	−0.44	1.99	0.49	0.36	0.28	−1.50	−0.23	−0.65	0.17	−0.28

No	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
∠3	−1.1	−0.10	0.88	0.42	1.3	0.21	−1.04	−0.38	−1.67	−0.35	1.21
∠4	0.55	0.50	0.39	0.39	1.20	1.08	−0.4	0.32	0.08	0.03	−0.17
∠5	0.04	0.32	−0.12	0.36	1.1	0.99	0.77	−0.41	0.49	−0.08	0.72
∠8	−1.23	0.33	−1.68	0.33	1.01	−0.15	1.37	−0.35	−0.82	−1.11	0.31

No	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
∠3	−0.17	−2.64	1.20	0.93	0.44	0.11	−1.49	−1.39	0.37	−0.52
∠4	0.63	−0.62	−0.59	−0.55	−0.34	−1.48	−1.33	0.37	0.32	−0.45
∠5	−1.69	−0.26	1.36	1.51	−0.38	−0.90	−0.30	1.01	0.26	−0.37
∠8	0.52	−0.51	0.91	−0.34	−0.36	0.42	0.54	0.60	0.2	−0.28

表 3 目标函数的模拟计算值

Table 3 Simulation value of target function

No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Value	1.113028	1.113028	1.113018	1.113027	1.113024	1.113022	1.113038	1.113029

No.	9	10	11	12	13	14	15	16
Value	1.113027	1.113022	1.113027	1.113027	1.113024	1.113034	1.113025	1.113024

No	17	18	19	20	21	22	23	24
Value	1.113026	1.113019	1.113025	1.113025	1.113029	1.113029	1.113021	1.113022

No	25	26	27	28	29	30	31	32
Value	1.113028	1.113032	1.113029	1.113027	1.113022	1.113020	1.113026	1.113026

[REFERENCES]

[1] TAO Hua-xue(陶华学). 现代变形监测多目标非线性动态优化设计的一个新方法 [J]. Science and Technology of Prospecting(勘察科学技术), 1999(3): 52- 54.

[2] TAO Ben-zao(陶本藻) and HU Sheng-wu(胡圣武). 非线性模型的平差 [J]. Information and Engineering of Surveying and Mapping(测绘信息与工程), 1997(3): 27- 33.

[3] ZHOU Jiang-wen(周江文). 测量极值问题的经验解式—兼论绝对和极小问题 [J]. Journal of Mapping and Surveying(测绘学报), 1999, 28(1): 11- 14.

[4] LI Chao-kui(李朝奎). Method of parameters estimation on non-linear error model [J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2000(2): 32- 36.

[5] LI Xi-quan(李锡泉). 利用现代测量方法更新保加利亚三角网的研究 [J]. Translation of Surveying and Mapping(测绘译丛), 1982(2): 15- 21.

[6] HUANG Gui-ping(黄桂平) and LI Guang-yun(李广云). 蒙特卡罗法在直伸网模拟计算中的应用 [J]. Journal of Surveying and Mapping Institute of Liberation Army(解放军测绘学院学报), 1998, 15(4): 237- 240.

[7] PEI Lu-cheng(裴鹿成). Way and Application of Monte-Carlo(蒙特卡罗方法及其应用) [M]. Changsha: National Defense University of Science and Technology Press, 1993. 63- 65.

[8] YAN Hua-sheng(严华生), XIE Ying-qi(谢应齐) and CAO Jie(曹　杰). 非线性统计预报方法及其应用 [M]. Kunming: Yunnan Science and Technology Press, 1998. 26- 28.

Variance estimation of intensive nonlinear functions based on Monte-Carlo method

LI Chao-kui[1, 2], HUANG Li-min[1], ZENG Zhuo-qiao[2], FU Ming[2]

(1. Department of Civil Engineering,
Xiangtan Polytechnic University, Xiangtan 411201, P. R. China;
2. College of Resources, Environment and Civil Engineering,
Central South University of Technology, Changsha 410083, P. R. China)

[Abstract] Based on the way of Monte-Carlo, the problems of variance-estimation of intensive nonlinear function has been studied. By random disturbance of the standard deviation of directly observed values, a group of false random values of nonlinear function which submit to the regular distribution were produced, then they were transfered into false random value which submit to the $N(0, 1)$ distribution by the way of Box-Muller, and some statistical tests had been done on them. On the basis of these statistics, the visual variance of intensive nonlinear function was counted by Bessel formula. Example shows that the variance estimation of intensive nonlinear function counted by the way of Monte-Carlo variance-estimation has some advantages over that counted by the way of classical variance-estimation.

[Key words] Monte-Carlo method; variance estimation; intensive nonlinear functions

(编辑　何学锋)