[文章编号] 1004- 0609(2000) 04- 0609- 04

基于证据理论的岩体力学参数信度估计方法①

刘沐宇, 徐长佑

(武汉工业大学 土木工程与建筑学院, 武汉 430070)

[摘　要] 针对岩体力学参数的未确知性, 提出了基于证据理论的岩体力学参数信度估计方法。在构造岩体力学参数的识别框架上, 对多个具有不同信度的抽样试验证据用 Dempster-Shafer 合成法则进行信度综合, 从而获得在其识别框架上的基本可信度分配、信任函数和似真函数, 并在此基础上, 利用定义的类概率函数确定岩体力学参数的取值。应用实例表明, 该方法在岩体力学参数的分析和选取上取得了较好的结果。

[关键词] 证据理论; 不确定性; 信度; 力学参数

[中图分类号] TD 31　　　　[文献标识码] A

矿山岩石力学与工程中存在大量主观上和客观上的不确定性问题。这种不确定性包括随机性、模糊性、灰性以及未确知性。由于存在这种不确定性, 目前还无法精确描述岩体力学参数, “参数给不准”已成为岩石力学与工程理论分析中的一个“瓶颈”问题[1]。传统的岩体力学参数取值估计方法基本都建立在概率论和数理统计的基础上[2], 把岩体力学参数看作是随机变量。近年来, 在考虑到工程地质岩组划分的模糊性和抽样试验的随机性之后, 有关研究人员提出了岩体力学参数的随机模糊处理方法[3~6], 把岩体力学参数看作是随机模糊变量。位移反分析法亦为岩体力学参数的确定提供了可行之路[7]。然而, 岩体的性质是极其复杂的, 以概率论和数理统计为基础的岩体力学参数抽样试验, 在实际工程的应用中无法保证做到大子样抽样试验, 即使是小子样抽样试验也只是名义上的抽样试验。不同部位获得的抽样试验结果, 其性质是不同的, 试验数据往往具有很强的离散性。抽样试验所获得的每一个数据究竟具有多大的信度, 如何对多个具有不同信度的不确定性抽样试验证据进行信度的综合, 采用怎样的信度合成法则等等, 都是值得深入研究的问题。

针对岩体力学参数的未确知性, 本文提出了基于证据理论的岩体力学参数信度估计方法。在构造的岩体力学参数的识别框架上, 对多个具有不同信度的不确定性抽样试验证据, 采用证据的 D-S 合成法则进行信度的综合, 从而获得在岩体力学参数识别框架上的基本可信度分配、信任函数和似真函数。在此基础上, 利用定义的类概率函数确定岩体力学参数的取值。笔者将其应用于某实际工程的岩体力学参数的分析选取, 获得了令人满意的结果。

1　岩体力学参数与证据理论

矿山开采过程中通常采用岩体力学参数抽样试验来评估岩体力学性质, 但事实上, 岩体力学参数抽样试验结果的分析从客观上讲是不充分的, 而且在试验结果的分析处理过程中又包含了许多主观的分析、判断和取舍。显然, 岩体力学参数的取值问题具有典型的未确知性。所谓未确知性, 是由于掌握的证据尚不足以确定其真实状态和数量关系所造成的认识上的不确定性。证据理论[8]为研究信息的未确知性提供了理论基础。

证据理论是由 Shafer 于 1976 年首先提出的。Shafer 认为[8]: 在一批给定的证据与一个给定的命题之间没有什么一定的客观联系能够确定一个精确的支持度; 通过对证据加以分析从而得到他本人希望赋予命题的信度; 这里的证据指的不是实证据, 而是我们的经验和知识的一部分, 是我们对该问题所作的观察和研究的结果; 我们不仅要强调证据的客观性而且也要强调证据估计的主观性。这种基于证据分析, 确定相信一个命题为真的程度的方法, 亦称为证据处理。证据理论舍弃了概率必须满足可加性的要求, 满足比概率论弱的公理, 能够区分

① [基金项目] 湖北省重点科技项目(981P201)　　[收稿日期] 2000- 02- 24; [修订日期] 2000- 07- 04
[作者简介] 刘沐宇(1963-), 男, 副教授.

"不确定"与"不知道"的差异，并能处理由"不知道"引起的不确定性，而且有一个比较合理的由 Dempster 和 Shafer 给出的信度 D-S 合成法则。证据理论具有较大的灵活性，在分析和处理不确定性问题中越来越受到人们的重视。

2 岩体力学参数的信度估计方法

2.1 基本可信度分配、信任函数、似真函数以及类概率函数

证据理论是用集合表示命题的。

首先应根据实际情况确定出岩体力学参数所有可能的结果的集合，用 H 表示。那么，所讨论的任一命题都将对应于 H 的一个子集。Shafer 称其为识别框架。H 的选取依赖于我们的经验和认识水平，依赖于我们所知道的和想要知道的[8]。

设 H 为岩体力学参数的识别框架。如果集函数 $m: 2^H \to [0, 1]$ 满足

$$m(\varnothing) = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{A \subseteq H} m(A) = 1 \tag{2}$$

则称 m 为框架 H 上岩体力学参数的基本可信度分配；$\forall A \subseteq H$，$m(A)$ 称为 H 上 A 的基本可信数，它反映了对命题 A 本身的信度大小。$m(A)$ 不仅可以在 H 的单点集上赋值，也可在非单点的集上赋值。由式(1)可知：对于岩体力学参数空集(空命题)将不产生任何信度；虽然可以给岩体力学参数的一个命题赋任意大小的信度值，但要求给所有命题赋的信度值的和等于 1，即总信度为 1。

对给定的 m，$\forall A \subseteq H$，

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \tag{3}$$

$$Pla(A) = 1 - Bel(\overline{A}) = \sum_{A \cap B \neq \varnothing} m(B) \tag{4}$$

式中 $Bel(A)$，$Pla(A)$ 分别被称为岩体力学参数的信任函数和似真函数。$Bel(A)$ 是支持岩体力学参数某一命题 A 的信度的最小值，$Pla(A)$ 是支持命题 A 的信度的最大值。这样 $[Bel(A), Pla(A)]$ 就形成了对命题 A 的信度区间，$Pla(A) - Bel(A)$ 的值反映了我们对命题 A 不知道的程度。

定义命题 A 的类概率函数 $f(A)$ 为：

$$f(A) = Bel(A) + \frac{|A|}{|H|} \times [Pla(A) - Bel(A)] \tag{5}$$

式中 $|A|$ 和 $|H|$ 分别是 A 和 H 中元素的个数。$f(A)$ 具有类似概率的性质，$\forall A \subseteq H$，$0 \leqslant f(A) \leqslant 1$，且 $Bel(A) \leqslant f(A) \leqslant Pla(A)$。利用 $f(A)$ 可进行岩体力学参数的信度估计。

2.2 信度的 D-S 合成法则[9, 10]

D-S 合成法则反映了多个证据的联合作用。给定几个同一识别框架上基于不同证据的信任函数，如果这几批证据不是完全冲突的(完全矛盾的)，那么利用 D-S 合成法则可计算出一个信任函数，这个信任函数就是在那几批证据的联合作用下产生的信任函数。

设 Bel_1，Bel_2，…，Bel_k 是同一岩体力学参数识别框架 H 上的信任函数；m_1，m_2，…，m_k 分别是 Bel_1，Bel_2，…，Bel_k 的基本可信度分配，则采用 D-S 法则合成后的信任函数 $Bel = \bigoplus_{i=1}^{k} Bel_i$，它相应的基本可信度分配 $m = \bigoplus_{i=1}^{k} m_i$，由下式确定：

$$m(A) = K^{-1} \sum_{\cap A_i = A} \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} m_i(A_i),$$

$$\forall A \subseteq H, \ A \neq \varnothing \tag{6}$$

式中 $K = \sum_{\cap A_i \neq \varnothing} \prod_{1< i< k} m_i(A_i)$。

2.3 岩体力学参数信度估计的步骤

如前所述，可以用 $[Bel(A), Pla(A)]$ 表示证据的不确定性，$Pla(A) - Bel(A)$ 的值表示对命题 A 不知道的程度。由于命题 A 的信任函数和似真函数都是在其基本可信度分配的基础上定义的，因而随着岩体力学参数某一命题的基本可信度分配的不同，将产生不同的应用模型。本文定义如下基本可信度分配。

设岩体力学参数的识别框架 $H = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$，其基本可信度分配满足

$$m(\{S_i\}) \geqslant 0, \ \forall S_i \in H;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m(\{S_i\}) \leqslant 1;$$

$$m(H) = 1 - \sum_{i=1}^{n} m(\{S_i\});$$

$$m(A) = 0, \ \forall A \subseteq H, \text{且} |A| > 1 \text{或} |A| = 0。$$

由此可得

$$Bel(A) = \sum_{S_i \in A} m(\{S_i\}) \tag{7}$$

$$Pla(A) = 1 - Bel(\overline{A}) = Bel(A) + m(H) \tag{8}$$

$$f(\{S_i\}) = m(\{S_i\}) + \frac{1}{n} m(H) \tag{9}$$

在此基本可信度分配中，只有单个元素构成的子集和识别框架 H 的基本可信数才有可能大于 0，其他子集的基本可信数均为 0。

在给定的试验证据条件下，岩体力学参数信度估计由下述步骤求出：

1) 构造岩体力学参数的识别框架 H 。

2) 基于证据分析，在识别框架 H 上赋某一命题的基本可信数

$$m(\{S_i\}) = Cer(E) \times C_i \tag{10}$$

$$m(H) = 1 - \sum_{i=1}^{n} Cer(E) \times C_i \tag{11}$$

式中　C_i 表示 $S_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的信度，$C_i \geqslant 0$，且 $\sum_{i=1}^{n} C_i \leqslant 1$；$Cer(E)$ 表示不确定性证据 E 的确定性，且 $0 \leqslant Cer(E) \leqslant 1$；$m(H)$ 表示对 S_i 的不知道的程度。

对于同一识别框架 H 上多个不确定性证据的联合作用，利用 D－S 合成法则求出 $Bel = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{k} Bel_i$ 。

3) 岩体力学参数的信度估计

由定义的类概率函数 $f(\{S_i\})$，可求得岩体力学参数的信度估计值如下：

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \times f(\{S_i\}) \tag{12}$$

3　应用实例

湖北省某大型磷矿采用房柱开采法。为了更好地开发和利用磷矿资源，研究其采空区的稳定性，探讨合理的采场结构参数和矿柱的承载能力，笔者对采空区的岩体力学参数进行了测试和分析选取工作。岩体抗压强度、弹性模量和容重的抽样试验结果见表 1。现采用上述方法对其进行取值的信度估计。

1) 岩体抗压强度的信度估计

根据试验结果，并考虑到便于不同批次的试验证据的信度综合和对试验数据赋信度，将岩体抗压强度的识别框架确定为区间型，即 $H = \{[0, 30], [30, 60], [60, 90], [90, 120], [120, 150], [150, 180]\}$。根据试验结果在每个区间的分布，考虑到岩体抗压强度的未确知性，分别对二次抽样试验数据在其识别框架上赋基本可信度分配，$m_1(\{S_i\}) = \{0, 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.2\}$，$m_1(H) = 0.1$，$m_2(\{S_i\}) = \{0.1, 0.2, 0, 0.2, 0.2, 0.2\}$，$m_2(H) = 0.1$。二次抽样试验结果的确定性分别为 $Cer(E_1) = 0.9$，$Cer(E_2) = 0.85$。由此得出二个证据信度综合之后的基本可信度分配和类概率函数：

$$m(\{S_i\}) = \{0.0331, 0.1411, 0.0868, 0.1411, 0.2907, 0.2159\}$$

$$f(\{S_i\}) = \{0.0483, 0.1563, 0.1020, 0.1563, 0.3059, 0.2311\}$$

由公式 $S = \sum_{i=1}^{n} S_i \times f(\{S_i\})$ 计算，得到岩体抗压强度的信度估计值 $S = 111.24$ MPa，其中 S_i 为每个区间的均值。

2) 岩体弹性模量的信度估计

同样，确定其识别框架为 $H = \{[0, 20], [20, 40], [40, 60], [60, 80], [80, 100], [100, 120], [120, 140]\}$。相应地可以根据试验结果在识别框架上赋基本可信度分配，即 $m(\{S_i\}) = \{0, 0.15, 0.05, 0.20, 0.25, 0, 0.15\}$，$m(H) = 0.2$。抽样试验的确定性 $Cer(E_1) = 0.85$。由此得出基本可信度分配和类概率函数：

$$m(\{S_i\}) = \{0, 0.1275, 0.0425, 0.1700, 0.2125, 0, 0.1275\}$$

$$f(\{S_i\}) = \{0.0457, 0.1732, 0.0882, 0.2157, 0.2582, 0.0457, 0.1732\}$$

相应的岩体弹性模量的信度估计值 $S = 75.943 \times$

表 1　岩体抗压强度、弹性模量和容重的抽样试验分析结果

Table 1　Testing and analysing results of compressive strength, elastic modulus and unit weight of rockmass

Sample number	Elastic modulus/ 10^3 MPa		Compressive strength/ MPa			Unit weight/ $(kN \cdot m^{-3})$		
	Samples	Belief estimation	Samples of batch 1	Samples of batch 2	Belief estimation	Samples of batch 1	Samples of batch 2	Belief estimation
1	28.2		37	23		24.9	22.4	
2	89.5		141	104		29.7	29.7	
3	128.0		175	160		29.0	28.5	
4	63		64	53		30.5	30.2	
5	131	75.943	162	170	111.24	28.1	27.6	27.535
6	27.6		35	22		26.5	27.6	
7	85		140	55		27.5	28.5	
8	91.3		130	102		28.5	28.7	
9	74		120	140		25.7	27.6	
10	55		76	129		21.4	23.5	

10^3 MPa。

3) 岩体容重的信度估计

由试验抽样结果，确定其识别框架为 $H=\{[20, 22], [22, 24], [24, 26], [26, 28], [28, 30], [30, 32]\}$。根据试验结果在各区间的分布，对二次抽样试验数据赋基本可信度分配，$m_1(\{S_i\})=\{0.05, 0, 0.15, 0.2, 0.4, 0.05\}$，$m_1(H)=0.15$，$m_2(\{S_i\})=\{0, 0.15, 0, 0.25, 0.4, 0.05\}$，$m_2(H)=0.15$。二次抽样试验结果的确定性分别为 $Cer(E_1)=0.85$，$Cer(E_2)=0.80$，由此得出二个证据信度综合之后的基本可信度分配和类概率函数：

$$m(\{S_i\})=\{0.0213, 0.0522, 0.0640, 0.2258, 0.4808, 0.0414\}$$

$$f(\{S_i\})=\{0.0403, 0.0712, 0.0830, 0.2448, 0.4998, 0.0604\}$$

相应的岩体容重的信度估计值 $S=27.535\ \mathrm{kN/m^3}$。

[REFERENCES]

[1] FENG Xia-ting(冯夏庭) and YANG Cheng-xiang(杨成祥). 智能岩石力学(2) —参数与模型的智能辨识 [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering(岩石力学与工程学报), 1999, 18(3): 350- 353.

[2] XU Jian-ping(徐建平), HU Hou-tian(胡厚田), ZHANG An-song(张安松), et al. 边坡岩体物理力学参数的统计特征研究 [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering(岩石力学与工程学报), 1999, 18(4): 382- 386.

[3] XIONG Wen-lin(熊文林) and LI Hu-sheng(李胡生). 岩石样本力学参数值的随机-模糊处理方法 [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering(岩土工程学报), 1992, 14(6): 101- 108.

[4] LI Hu-sheng(李胡生) and XIONG Wen-lin(熊文林). 岩石力学参数概率分布的随机模糊估计方法 [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics(固体力学学报), 1993, 14(4): 347- 350.

[5] LI Hu-sheng(李胡生), CHEN Dao-qing(陈道清) and DING Xiang-yang(丁向阳). 具有平面型破坏面岩石边坡的随机模糊可靠度计算 [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报), 1994, 4(1): 12- 15.

[6] HUANG Zhi-quan(黄志全), WANG Si-jing(王思敬), LI Hua-ye(李华晔), et al. 岩体力学参数取值的置信度及其可靠性 [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering(岩石力学与工程学报), 1999, 18(1): 33- 35.

[7] FENG Xia-ting(冯夏庭), ZHANG Zhi-qiang(张治强), YANG Cheng-xiang(杨成祥), et al. 位移反分析的进化神经网络方法研究 [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering(岩石力学与工程学报), 1999, 18(5): 529- 533.

[8] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.

[9] ZHANG Yao-ting(张尧庭) and DU Jin-song(杜劲松). Probabilistic Methods in Artificial Intelligence(人工智能中的概率统计方法) [M]. Beijing: Science Press, 1998.

[10] LI Fan(李 凡). Uncertainty in Artificial Intelligence (人工智能中的不确定性)[M]. Beijing: Meteorological Press, 1992.

Belief estimation of rockmass mechanical parameters based on evidence theory

LIU Mu-yu, XU Chang-you

(Institute of Civil Engineering and Architecture, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, P. R. China)

[Abstract] Based on a mathematical theory of evidence and considering the uncertainty of rockmass mechanical parameters, a new method for belief estimation of rockmass mechanical parameters was presented, by which the frame of discernment of rockmass mechanical parameters was established. In consideration of different degrees of belief for many testing evidences of rockmass mechanical parameters, their total degree of belief was obtained with the Dempster-Shafer rule of combination. The basic probability assignments, belief functions, plausibility functions of rockmass mechanical parameters were given, and the belief estimation of rockmass mechanical parameters were determined with the defined functions similar to probabilistic properties. An example shows that the method applied in mining engineering for analysis and selection of rockmass mechanical parameters has obtained a satisfactory results.

[Key words] theory of evidence; uncertainty; degree of belief; mechanical parameter

(编辑 何学锋)