

文章编号: 1004 - 0609(2003) 03 - 0735 - 08

## 基于内时理论的软岩流变本构模型<sup>①</sup>

陈沅江, 潘长良, 曹 平, 王文星

(中南大学 资源与安全工程学院, 长沙 410083)

**摘 要:** 从内时理论出发, 通过在内蕴时间中引入牛顿时间, 在 Helmholtz 自由能中引入损伤变量, 对它们分别进行重新构造, 利用连续介质不可逆热力学的基本原理推导了软岩的内时流变本构方程。然后, 对该方程在单轴应力条件下进行了求解、分析与试验验证。结果表明: 该方程能有效地描述软岩蠕变过程中衰减蠕变、稳定蠕变和加速蠕变等三个阶段的力学特性; 当损伤尚未发生或未明显出现时, 该方程能用来描述软岩蠕变第一、二阶段的特性及松弛特性, 当损伤开始发生或出现时, 该方程描述的是蠕变第三阶段的特性; 造成软岩蠕变加速阶段出现的原因是损伤起始于或明显显现于蠕变第二阶段之末。

**关键词:** 软岩; 流变; 内时理论; 本构模型; 损伤

**中图分类号:** TU 521.02

**文献标识码:** A

软岩是世界上分布最为广泛的一类岩石, 其中的泥岩和页岩就占地球表面岩石的 50% 左右<sup>[1]</sup>, 在建筑、道路、水利水电、矿山以及国防军事等工程领域中经常遇到。软岩力学性质最大的特点之一是它具有很强的流变性, 与软岩相关的岩土工程的失稳破坏主要是由于软岩的流变性引起的<sup>[2, 3]</sup>, 因此, 研究软岩的流变本构规律具有十分重大的工程现实意义。然而, 当前这方面的研究大都是在元件模型理论、经验模型理论或经典的粘塑性力学理论的指导下进行的, 以至无法精确地描述软岩流变的复杂规律<sup>[4, 5]</sup>。为此, 本文作者利用 Valanis 提出的内时理论<sup>[6, 7]</sup>, 通过对内蕴时间的重新构造, 建立了一种新的软岩流变内时本构模型。有关实例验证表明, 该模型能有效地反映软岩的复杂的流变特性, 可在软岩工程施工设计中广泛应用。

### 1 软岩流变的内时本构模型

由于本研究仍在连续介质力学的范畴内进行, 故在考虑软岩流变的有关力学特性时, 对其作如下几个基本假设:

- ①材料连续均质;
- ②材料为各向同性;
- ③材料为小变形;
- ④材料的变形过程为等温绝热过程;

⑤材料变形为粘塑性变形。

由于软岩强度低, 其受力后产生的弹性变形远小于粘塑性变形<sup>[1, 3, 8]</sup>, 故忽略前者。下面的研究均在此 5 个基本假设的基础上进行。

#### 1.1 内蕴时间的定义及基本热力学方程的建立

由于软岩是一种耗散材料, 其流变破坏过程是一种不可逆热力学过程<sup>[9, 10]</sup>, 因此可以用耗散材料的内时理论来研究这一过程。在用内时理论进行软岩的流变研究时, 最重要的是恰当地定义内蕴时间。据文献[6]和[7]对内蕴时间的定义, 内蕴时间增量是内蕴时间度量  $\zeta$  对时间的变化率的函数, 即有  $dZ = F(\dot{\zeta}) dt$  (其中  $Z$  为内蕴时间,  $t$  为牛顿时间), 且内蕴时间度量  $\zeta$  是随粘塑性应变增量单调递增的。因此, 在上述基本假设的基础上, 考虑到软岩介质中广泛存在着剪胀或剪缩等交错效应<sup>[11]</sup> 以及岩石在受力过程中存在内部损伤累积<sup>[12]</sup>, 今引入  $n$  个相互独立的内变量  $q^a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) 及一个损伤变量  $D$  (限于各向同性损伤的情况,  $D$  为标量) 与热力学基本状态变量一起用来描述软岩流变变形过程中的各个状态。其中每一个内变量  $q^a$  都可以分解成两个分量: 一个为分量  $q_{ij}^a$ , 用来描述应力偏量  $S_{ij}$  引起的粘塑性变化, 与它对应的内蕴时间是  $Z_s$ ; 另一个分量为  $q_m^a$ , 用来描述平均正应力  $\sigma_m$  引起的粘塑性变化, 与它对应的内蕴时间是

① 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50274074)

收稿日期: 2002 - 05 - 08; 修订日期: 2002 - 06 - 11

作者简介: 陈沅江(1970 -), 男, 博士。

通讯联系人: 陈沅江, 博士; 电话: 0731 - 8832424; E-mail: yuanjiang\_chen@21cn.com

$Z_H$ 、 $Z_S$ 、 $Z_H$  分别定义如下:

$$\left. \begin{aligned} dZ_S &= \frac{A_{11}dt}{t} + \frac{A_{12}d\zeta_S}{\zeta_S} \\ d\zeta_S &= \left| \left| de_{ij} - \frac{k_0 dS_{ij}}{2G_0} \right| \right| \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} dZ_H &= \frac{A_{21}dt}{t} + \frac{A_{22}d\zeta_H}{\zeta_H} + \frac{A_{23}d\zeta_S}{\zeta_S} \\ d\zeta_H &= \left| d\varepsilon_m - \frac{k_1 d\sigma_m}{3K_t} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $e_{ij}$  为应变偏张量;  $\varepsilon_m$  为平均正应变;  $A_{11}$ 、 $A_{12}$ 、 $A_{21}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{23}$  均为常数;  $G_0$  为初始剪切弹性模量;  $K_t$  为体积弹性模量;  $k_0$ 、 $k_1$  为 0~1 之间的常数, 若粘塑性假设成立即不考虑材料的弹性变形时  $k_0 = k_1 = 0$ ; 此外, 若不考虑剪胀、剪缩等交错效应时  $A_{23} = 0$ 。

据连续介质不可逆热力学原理<sup>[10]</sup>, Helmholtz 自由能  $\psi$  可表示为应变  $\varepsilon$ 、温度  $T$ 、内变量  $q$  和损伤变量  $D$  的函数, 即

$$\psi = E - \theta \eta = \psi(\varepsilon_{ij}, T, a, D) \quad (3)$$

若不考虑损伤, 这种描述在蜕化的情况下就回到了与势能体系对应的描述。由于所研究的过程为等温过程, 故自由能函数中可不含温度, 于是据式(3), 且将自由能  $\psi$  分为与平均正应变及内变量球张量有关的  $\psi_H$  和与偏应变及内变量偏张量有关的  $\psi_S$  两部分, 可得

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_H + \psi_S \\ \psi_S &= \psi_S(e_{ij}, q_{ij}^a, D) \\ \psi_H &= \psi_H(\varepsilon_m, q_m^a, D) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由不可逆热力学理论<sup>[10, 13]</sup>, 与内变量对应的广义内摩擦力为

$$\left. \begin{aligned} F_{ij}^a &= - \frac{\partial \psi_S}{\partial q_{ij}^a} \\ F_m^a &= - \frac{\partial \psi_H}{\partial q_m^a} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

内变量球张量及偏张量的演化方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_S}{\partial q_{ij}^a} + b_{ijkl}^a \frac{dq_{kl}^a}{dZ_S} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial q_m^a} + b_{kkll}^a \frac{dq_m^a}{dZ_H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中  $b^a$  为材料常数, 且对  $a$  不作和。此外, 假定软岩所处的初始状态是无应力、无应变的, 且此时的 Helmholtz 自由能、内变量、内摩擦力及内蕴时间均设定为零(零初始条件), 于是, 据文献[10, 14], 将式(4)中的 Helmholtz 自由能作 Taylor 展开, 并略

去二阶以上的部分, 构造为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \psi_S &= \frac{1}{2} A_{ijkl} e_{ij} e_{kl} (1-D)^2 + \\ &\sum_{a=1}^n B_{ijkl}^a e_{ij} q_{kl}^a (1-D) + \\ &\frac{1}{2} \sum_{a=1}^n C_{ijkl}^a q_{ij}^a q_{kl}^a \\ \psi_H &= \frac{1}{2} \alpha_1 \varepsilon_m^2 (1-D)^2 + \\ &\sum_{a=1}^n \alpha_2^a \varepsilon_m q_m^a (1-D) + \\ &\frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \alpha_3^a (q_m^a)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2^a$ 、 $\alpha_3^a$  均为正的常数。至此, 内蕴时间的定义及推导本构方程的基本热力学关系式已建立。

## 1.2 偏斜应变流变本构方程

由 Coleman 关系式<sup>[15]</sup>有

$$S_{ij} = \frac{\partial \psi_S}{\partial e_{ij}} \quad (8)$$

将式(7)第一式代入式(8)可得

$$S_{ij} = \left[ A_{ijkl} e_{ij} (1-D)^2 + \sum_{a=1}^n B_{ijkl}^a q_{ij}^a (1-D) \right] \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (9)$$

式中  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 常数。将式(7)第一式代入式(5)第一式, 并考虑到各内变量的相互独立性, 可求出广义内摩擦力的偏斜分量为

$$F_{ij}^a = [-B_{ijkl}^a e_{ij} (1-D) - C_{ijkl}^a q_{ij}^a] \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (10)$$

据上述的假设, 所研究的软岩材料为各向同性均质体, 故材料常数  $A$ 、 $B^a$ 、 $C^a$  及  $b_{ijkl}^a$  均为四阶各向同性张量。由张量理论<sup>[16]</sup>, 可将式(9)和(10)化为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \alpha \cdot e_{ij} (1-D)^2 + \sum_{a=1}^n \beta^a q_{ij}^a (1-D) \\ F_{ij}^a &= -\beta^a e_{ij} (1-D) - r^a q_{ij}^a \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中  $\alpha$ 、 $\beta^a$ 、 $r^a$  均为标量常数。把式(11)第二式代入式(5)第一式并利用式(6)第一式可得

$$\beta^a e_{ij} (1-D) + r^a q_{ij}^a + \chi^a \frac{dq_{ij}^a}{dZ_S} = 0 \quad (12)$$

式中  $\chi^a$  亦为标量常数。式(12)为一阶常微分方程。解此方程并考虑到零初始条件可得

$$q_{ij}^a = - \frac{\beta^a}{\chi^a} (1-D) e^{-\alpha Z_S} \int e_{ij} e^{\alpha Z_S} dZ_S \quad (13)$$

式中  $\alpha_s = \frac{\chi^a}{\chi^s}$  为常数。将其代入式(11)第一式并

由积分和微分间关系可得

$$S_{ij} = \alpha \cdot e_{ij}(1-D)^2 + \sum_{a=1}^n \left[ -\frac{\beta^a}{\lambda^a} (1-D)^2 \cdot \int_0^{Z_s} e^{-\alpha_s(Z_s-Z'_s)} e_{ij} dZ'_s \right] \quad (14)$$

式中  $\alpha$ 、 $\beta^a$ 、 $\lambda^a$ 、 $\alpha_s$  均为常数。式(14)就是软岩的应力偏量、应变偏量与时间关系的内时流变本构方程, 它考虑了蠕变过程中损伤的影响。

### 1.3 体积应变流变本构方程

同样据 Coleman 关系式并结合式(7)第二式有

$$\sigma_m = \frac{\partial \Phi_H}{\partial \varepsilon_m} = \alpha_1 \varepsilon_m (1-D)^2 + \sum_{a=1}^n \alpha_2^a q_m^a (1-D) \quad (15)$$

由式(5)、(7)中第二式可得

$$F_m^a = -\frac{\partial \Phi_H}{\partial q_m^a} = -\alpha_2^a \varepsilon_m (1-D) - \alpha_3^a q_m^a \quad (16)$$

将上式代入式(6)第二式可得

$$\alpha_2^a \varepsilon_m (1-D) + \alpha_3^a q_m^a + b_{kkll}^a \frac{dq_m^a}{dZ_H} = 0 \quad (17)$$

解此微分方程, 并将所得结果代入式(15)可得

$$\sigma_m = \omega \varepsilon_m (1-D)^2 + \sum_{a=1}^n \left[ -\frac{\mu_{11}^a}{\mu_{22}^a} (1-D)^2 \int_0^{Z_H} e^{-\alpha_H(Z_H-Z'_H)} \varepsilon_m dZ'_H \right] \quad (18)$$

式中  $\omega$ 、 $\mu_{21}$ 、 $\mu_{22}$  和  $\alpha_H$  均为常数。此式即为软岩的应力球张量、应变球张量与时间关系的流变内时本构方程, 其中亦考虑了损伤的影响。

为求简便, 现只考虑一个内变量的情况, 于是式(14)、(18)可改写为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \alpha \cdot e_{ij}(1-D)^2 - \frac{\beta^a}{\lambda^a} (1-D)^2 \cdot \int_0^{Z_s} e_{ij} dZ'_s \\ \sigma_m &= \omega \varepsilon_m (1-D)^2 - \frac{\mu_{11}^a}{\lambda_{22}^a} (1-D)^2 \cdot \int_0^{Z_H} \varepsilon_m dZ'_H \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其统一张量形式为

$$\sigma = B(1-D)^2 \varepsilon - \frac{K_1}{K_2} (1-D)^2 \cdot \int_0^Z \varepsilon \cdot e^{-\alpha(Z-Z')} dZ' \quad (20)$$

积分式(14)、(18)、(19)和(20)的边界条件为: 当  $Z_s = Z_H = 0$  时,  $S_{ij0} = \sigma_{m0} = 0$ ,  $e_{ij0} = \varepsilon_{m0} = 0$ 。

## 2 软岩内时流变本构模型中参数的确定及试验验证

下面以单轴压应力状态为例来说明软岩内时流变本构式(19)的解答及其本构常数的确定, 其它如平面应力应变、轴对称应力状态下的求解可依此类推。

### 2.1 单轴压缩时内时流变本构方程的解

在单轴压缩条件下, 一点的应力、应变状态在主轴空间可表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中  $\sigma_1$ 、 $\varepsilon_1$  分别为软岩的轴向应力、应变,  $\nu$  为软岩的泊松比。为利用内时流变本构模型求解, 现将式(21)分解为球张量与偏张量之和表达:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\sigma_1 \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{ij} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(1-\nu)\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(1-\nu)\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(1-\nu)\varepsilon_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中  $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_1$ 、 $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(1+2\nu)\varepsilon_1$  分别为平均应力、应变。将式(23)中的偏应变代入式(1)并考虑软岩的粘塑性假设, 可得

$$\left. \begin{aligned} \xi_s &= \frac{\sqrt{6}}{3}(1-\nu) |\varepsilon_1| \\ dZ_s &= \frac{A_{11} dt}{t} + \frac{A_{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}(1-\nu) |d\varepsilon_1|}{\frac{\sqrt{6}}{3}(1-\nu) |\varepsilon_1|} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

考虑到  $A_{12}$  为待求参数, 由式(24) 可得

$$Z_S = A_{11} \ln t + A_{12} \ln(\varepsilon_1) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e^{Z_S/A_{12}} \cdot e^{-(A_{11}/A_{12}) \ln t} \\ &= e^{Z_S/A_{12}} \cdot t^{-A_{11}/A_{12}} \end{aligned} \quad (26)$$

取张量分量  $S_{11} = \frac{2}{3} \sigma_1$ 、 $e_{11} = \frac{2}{3}(1-\nu) \varepsilon_1$  代入式(19) 第一式得

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha(1-\nu)(1-D)^2 \varepsilon_1 - \frac{\beta}{\lambda} (1-\nu) \cdot \\ &\quad (1-D)^2 \int_0^{Z_S} e^{-\alpha(Z_S-Z'_S)} \varepsilon_1 dZ'_S \end{aligned} \quad (27)$$

结合式(25)、(26), 对式(27) 中积分项进行 Laplace 变换求解, 并经有关数学整理可得

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [E_L(1-D)^2] + \\ &\quad E_C(1-D)^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m} \varepsilon_1^{-n} \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (28)$$

式中  $E_L$ 、 $E_C$  对于软岩流变来说为不小于零的常数,  $|n| \leq 1$ ,  $0 < m < 1$  亦为常数,  $t_0$  为试验中的单位时间(可为 1 s、1 min、1 d 或 1 a), 它的加入使时间成为一无量纲的量, 从而简化数学处理。式(28) 即为考虑损伤的单轴压缩流变时轴向应力、轴向应变与时间关系的流变本构方程。

下面考察  $D=0$  即损伤尚未开始时式(28) 所能描述的软岩的流变性状。此时, 该方程化为

$$\sigma_1 = [E_L + E_C \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m} \varepsilon_1^{-n}] \varepsilon_1 \quad (29)$$

式(29) 在  $\varepsilon_1 = \varepsilon_c$  (常数) 时所表达的不同常应变下软岩应力松弛情况如图 1(a) 中曲线所示。由图 1(a) 可见, 这些松弛曲线的形状和以往研究所得的软岩流变松弛曲线的形状<sup>[1, 17]</sup> 完全一致。因此, 可认为式(29) 能用来描述软岩的松弛流变过程。

若式(29) 中应力  $\sigma_1 = \sigma_c$  (常数), 则其转化成单轴蠕变本构方程为

$$\varepsilon_1 = G_{vc} \sigma_c, \quad G_{vc} = \frac{1}{E_L + E_C \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m} \varepsilon_1^{-n}} \quad (30)$$

由式(30) 绘出的不同应力水平下软岩蠕变曲线如图 1(b) 所示。由图可见: 式(30) 表达了单轴应力条件下当应力保持恒定(蠕变) 时, 软岩应变随时间的增长而递增的趋势; 曲线的形状和以往研究中软岩发生第一、第二阶段蠕变时曲线的形状<sup>[1, 17]</sup> 一致。故亦可认为式(29) 能用来描述软岩的第一、二阶段蠕变。

通过以上分析, 可认为不考虑损伤时的软岩内时流变本构式(29) 能用来描述软岩的松弛及蠕变第一、第二阶段的力学性状, 然而它不能用来描述软岩的第三阶段蠕变(加速蠕变) 特性。要使式(28) 能

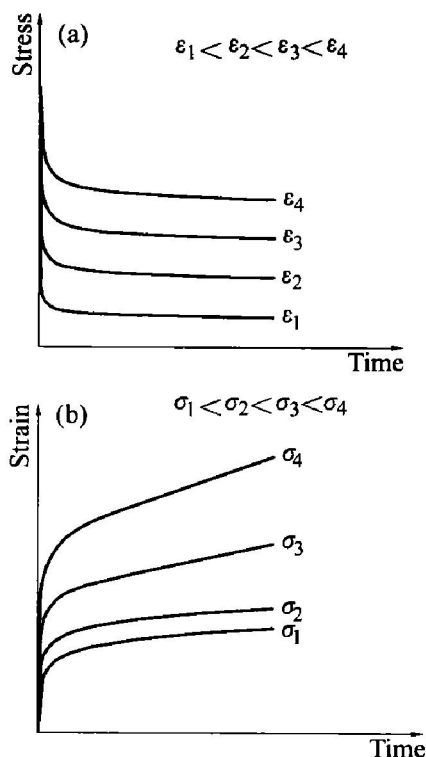


图 1 单轴应力条件下  
不考虑损伤的内时流变曲线

Fig. 1 Endochronic creep curves without regard to damage under uniaxial stress  
(a) —Relaxation curves; (b) —Creep curves

用来描述软岩的第三阶段蠕变, 现考察其中存在损伤变量的情况。据文献[18, 19], 损伤一般起始于从蠕变第二阶段之末, 且在恒定应力下其与时间的关系为

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^K \quad (31)$$

式中  $D$  为损伤变量,  $t$  为从损伤起始点或损伤明显出现时刻开始计算的时间,  $K$  为与温度有关正的材料参数,  $t_c$  为材料的损伤破坏临界时间, 与所施加的恒应力水平有关<sup>[20]</sup>。考虑到岩石在蠕变第二阶段结束损伤才开始明显发生, 为将式(31) 中的时间  $t$  与式(28) 中的时间  $t$  统一, 可将式(31) 改写为

$$D = 1 - \left(1 - \left\langle \frac{t-t_1}{t_f-t_1} \right\rangle\right)^K \quad (32)$$

式中  $t$  为从蠕变开始点计算的时间;  $t_1$  为蠕变第二阶段结束第三阶段开始时间;  $t_f$  为岩石的蠕变破坏时间, 它们均与蠕变应力水平有关, 可通过试验确定; 符号  $\langle \cdot \rangle$  为正值函数, 定义如下:

$$\langle t \rangle = \begin{cases} t, & \text{当 } t \geq 0 \\ 0, & \text{当 } t < 0 \end{cases} \quad (33)$$

若式(28) 中的应力  $\sigma_1 = \sigma_c$  (常数), 并利用式(32), 可得单轴应力条件下考虑损伤的蠕变本构方程为

$$\varepsilon_1 = G_{YCD} \sigma_C,$$

$$G_{YCD} = \frac{1}{[E_L + E_C (\frac{t}{t_0})^{-m} \varepsilon_1^{-n}] (1 - \langle \frac{t-t_1}{t_f-t_1} \rangle)^{2K}} \quad (34)$$

与式(30)相比, 式(34)中增加了使其快速增长的乘积项  $(1 - \langle \frac{t-t_1}{t_f-t_1} \rangle)^{2K}$ , 故其中的  $\varepsilon_1$  在  $t = t_1$  时刻后将以远大于该时刻以前的速度递增, 标志着岩石蠕变加速阶段的来临。由式(34)反映的软岩蠕变情形( $t_1$  为有限值或零)如图 2 所示, 图 2 中的曲线和前人研究的软岩在高应力水平下的蠕变三阶段曲线具有较好的一致性。因此, 可认为能用式(28)来反映软岩蠕变的三阶段特性: 在软岩蠕变时, 当损伤未超过其门槛值或损伤没有明显发生时, 岩石只产生第一、二阶段蠕变; 随着蠕变时间的延长, 损伤开始产生或明显产生, 从而导致岩石加速蠕变阶段的出现, 这一点和文献[20~22]中从热力学角度得到的“损伤造成了蠕变加速阶段的出现”之结论是一致的。

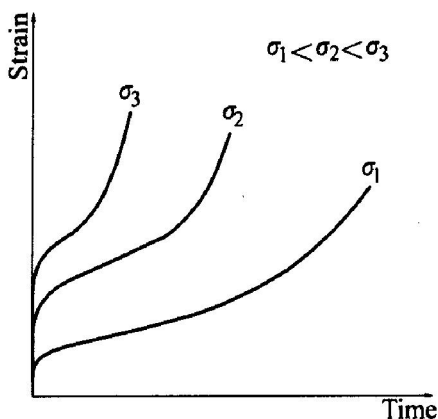


图 2 单轴高应力条件下的内时损伤蠕变曲线

Fig. 2 Endochronic damaged creep curves under uniaxial stress

## 2.2 本构常数的确定及模型的试验验证

以上通过定性分析讨论了式(28)能用来描述软岩蠕变三阶段特性的可能性。本节通过具体试验来进一步验证之。首先用单轴蠕变试验结果来说明式(28)中本构常数的确定。通过单轴蠕变试验下的全量加载、分级增量加载或分级增量循环加卸载试验<sup>[23]</sup>, 可以获得软岩的如下几类蠕变曲线(见图 3): ①在较低应力下的稳定蠕变曲线; ②在较高应力下包括蠕变第一、第二阶段的不稳定蠕变曲线; ③在高应力下包括蠕变第一、二、三阶段的不稳定蠕变曲线; ④在很高应力下只包括蠕变第一、第三阶段的不稳定蠕变曲线。利用这几类曲线, 可方便

地求得本构式(28)中的各参数, 方法如下:

1) 在较低应力水平(如图 3(a)中  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ )下, 软岩蠕变是稳定的, 即  $t_1 \rightarrow \infty$ , 此时不存在损伤,  $D = 0$ , 由蠕变方程式(30), 且当  $t \rightarrow \infty$  时, 其可进一步写为

$$\sigma_L = E_L \varepsilon_1 \quad (35)$$

故利用图 3(a)中低应力水平  $\sigma_1$  下蠕变达到稳定时的应变值  $\varepsilon_1$  (即图中蠕变曲线的渐近线所对应的应变值)可求得参数  $E_L = \sigma_L / \varepsilon_1$ 。

2) 在图 3 所示任意两种应力水平  $\sigma_a$ 、 $\sigma_b$  对应的两条蠕变曲线上, 找到对应于单位时间  $t_0$  时的蠕变应变值  $\varepsilon_{a0}$ 、 $\varepsilon_{b0}$ 。由于  $t = t_0 < t_1$ , 故此时亦不存在损伤,  $D = 0$ , 由式(30), 且当  $t = t_0$  时, 可将其化为

$$\sigma_1 = [E_L + E_C \varepsilon_1^{-n}] \varepsilon_1 \quad (36)$$

于是, 利用  $t_0$  时刻从两曲线上获得的  $(\sigma_a, \varepsilon_{a0})$ 、 $(\sigma_b, \varepsilon_{b0})$  两组值可求得参数  $E_C$ 、 $n$ , 其计算公式如下:

$$n = 1 - \frac{\ln(\frac{\sigma_a - E_L \varepsilon_{a0}}{\sigma_b - E_L \varepsilon_{b0}})}{\ln(\frac{\varepsilon_{a0}}{\varepsilon_{b0}})}, \quad E_C = \frac{\sigma_1 - E_L \varepsilon_{a0}}{(\varepsilon_{a0})^{-n+1}} \quad (37)$$

3) 在图 3(a)和(b)中任取一条蠕变曲线, 于其稳定蠕变阶段取一点, 获得一组值  $(\sigma_C, t_C, \varepsilon_C)$ , 由于其处在稳定蠕变阶段, 故由式(32), 并利用上两步取得的参数  $E_L$ 、 $E_C$ 、 $n$ , 可计算出参数  $m$ , 其公式如下:

$$m = - \frac{\ln \frac{\varepsilon_C^n}{E_C} (\frac{\sigma_C}{\varepsilon_C} - E_L)}{\ln(\frac{t_C}{t_0})} \quad (38)$$

4) 在图 3(b)和(c)所示的不稳定蠕变曲线之加速蠕变段上取一点, 获得一组值  $(\sigma_C, t_D, \varepsilon_D)$ , 由于此时存在损伤, 故采用式(34), 利用已知的参数  $E_L$ 、 $E_C$ 、 $n$ 、 $m$ 、 $t_1$ 、 $t_f$ , 可计算出参数  $k$ , 其公式如下:

$$Z = \frac{\sigma_C - E_C (\frac{t_D}{t_0})^{-m} \varepsilon_D^{-n+1}}{E_L \varepsilon_D}, \quad k = \frac{\ln Z}{\ln(1 - \langle \frac{t-t_1}{t_f-t_1} \rangle)} \quad (39)$$

至此, 单轴蠕变条件下式(28)中的本构参数已全部确定。计算时也可多取一些点进行计算, 然后取平均值, 这样效果会更好。

现利用文献[23]中对江西某铜矿页岩进行单轴蠕变实验时所获得的结果为例对所推导的软岩内时

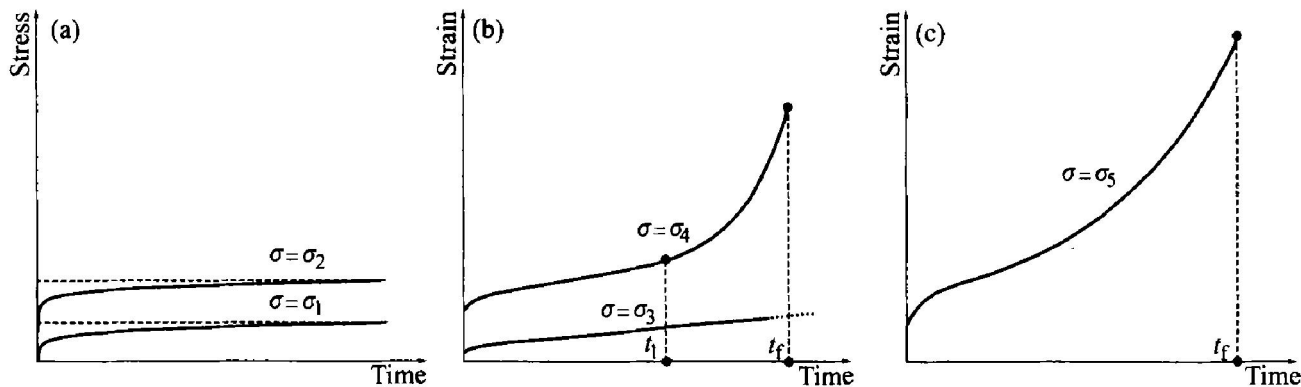


图3 软岩蠕变试验获得的各种蠕变曲线(应力水平  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$ )

Fig. 3 Various creep curves from creep test of soft rock (stress  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$ )

(a) —Stable creep curves ①; (b) —Unstable creep curves ② and ③; (c) —Unstable creep curves ④

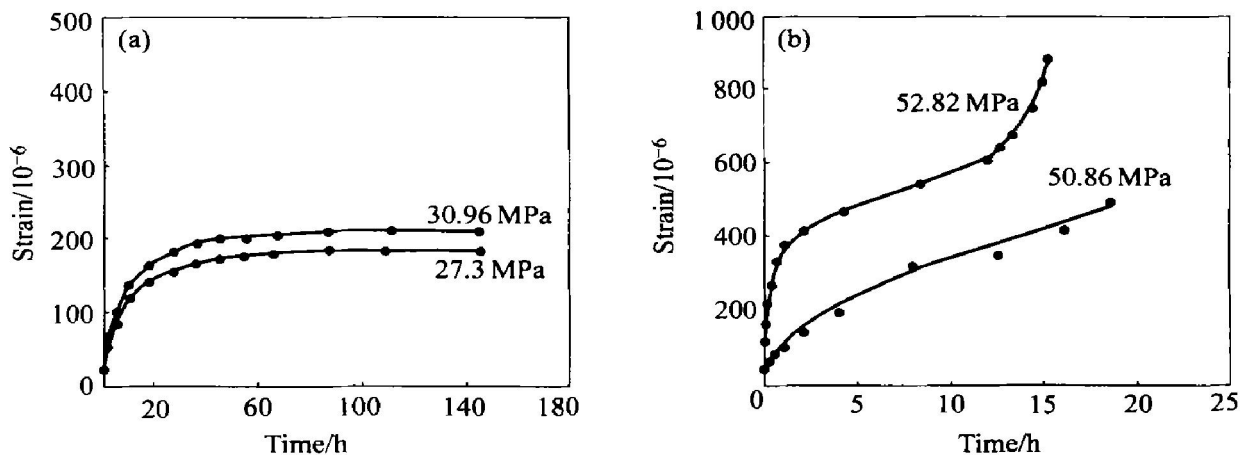


图4 某矿页岩的蠕变试验结果及理论计算结果(“•”为试验结果, “—”为理论计算结果)

Fig. 4 Results of creep test and theoretical computation of shale from certain mine

(“•” is from test and “—” is from computation)

(a) —Stable creep under low stress level; (b) —Unstable creep under high stress level

流变本构方程式(28)进行验证。采用所述的计算方法, 得到该页岩的内时流变本构方程在蠕变时的本构参数为:  $E_L = 1.4755 \times 10^5$  MPa,  $E_c = 1.2558 \times 10^4$  MPa,  $n = 0.3646$ ,  $m = 0.3939$ ,  $k = 1.028$ 。由此获得的不同应力水平下岩石的单轴蠕变曲线如图4中实线所示。可见, 理论计算的结果和试验结果具有较好的一致性, 证明了本文作者所推导的内时流变本构方程在描述软岩蠕变时的有效性。

### 3 结论

1) 从软岩流变变形过程为一不可逆热力学耗散过程的观点出发, 基于内时理论, 通过对内蕴时间的重新构造及在 Helmholtz 自由能中引入损伤变量, 利用不可逆热力学的基本原理, 推导了软岩的内时流变本构方程。由于它具有不可逆热力学的根

基, 若恰当定义内蕴时间, 该方程应具有广泛的适用性。

2) 通过在单轴应力条件下对软岩流变的内时本构方程进行求解、分析和试验验证表明: 不考虑损伤的软岩内时流变本构方程可有效地描述软岩的蠕变第一、二阶段特性和松弛特性; 考虑损伤的内时流变本构方程能有效地描述软岩蠕变过程中衰减蠕变、稳定蠕变和加速蠕变等三个阶段的力学特性; 损伤起始于或明显显现于蠕变第二阶段之末, 是造成软岩蠕变加速阶段出现的原因。

3) 尽管所获得的软岩内时流变本构方程在复杂应力应变条件下求解十分复杂, 但在工程实际中, 所涉及到的问题其应力应变条件并不复杂, 往往可以简化为单轴应力、平面应力应变或轴对称条件来进行求解, 如采矿工程中矿柱的流变破坏、隧道工程中围岩的流变变形收敛、水利水电工程中边

坡的蠕变破坏、大坝坝基及地基的流变变形沉降等等。在这种条件下, 本文所推导的内时流变本构方程求解却十分简单, 并且其参数的确定亦容易实现, 故其可在软岩工程的施工设计实践中广泛应用。

4) 未对软岩流变过程中损伤变量与时间及应力水平的关系作深入探讨, 只是简单地引用了前人研究的有关结论。实际上, 软岩蠕变时的两个特征时间  $t_1$ 、 $t_f$  是与其所受的应力水平有关的, 若将它们间的关系引入到损伤变量与时间的关系式(32)中, 便可由式(34)讨论不同应力水平下软岩的不同蠕变特性, 这些工作笔者将在以后的文章中讨论。

## REFERENCES

- [1] 刘特洪, 林天健. 软岩工程设计理论与施工实践[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2001.  
LIU Te hong, LIN Tian jian. Design Theory and Construction Practice of Soft Rock Engineering[M]. Beijing: China Architectural Industry Press, 2001.
- [2] 陈沅江, 潘长良, 曹平, 等. 层状岩质边坡蠕变破坏及其影响因素分析[J]. 勘察科学技术, 2001(6): 43 - 48.  
CHEN Yuan jiang, PAN Chang-Liang, CAO Ping, et al. Analysis on the creep failure of the bedded rock slope and its effecting factors[J]. Site Investigation Science and Technology, 2001(6): 43 - 48.
- [3] 廖协兴, 何满潮. 软岩力学[M]. 北京: 中国矿业大学出版社, 1995.  
MIU Xie-Xing, HE Man-chao. Soft Rock Mechanics[M]. Beijing: China University of Mining and Technology Press, 1995.
- [4] 刘元雪. 岩土本构理论的几个基本问题研究[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(1): 45 - 48.  
LIU Yuan xue. Study of several basic problems in constitutive theory of geomaterials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(1): 45 - 48.
- [5] 袁静, 龚晓南, 益德清. 岩土流变模型的比较研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(6): 732 - 779.  
YUAN Jing, GONG Xiao-nan, YI De-qing. Comparison study on rheological constitutive models[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(6): 732 - 779.
- [6] Valanis K C. A theory of viscoplasticity without a yield surface[J]. Archives of Mechanics, 1971, 23(5): 517 - 551.
- [7] Valanis K C. On the substance of Rivlin's remarks on the endochronic theory[J]. International Journal of Solids and Structures, 1981, 17(5): 249 - 265.
- [8] 林崇德, 牛锡倬. 软弱岩体中巷道围岩的特性及其支护特点[J]. 煤炭学报, 1988(1): 23 - 30.  
LIN Chong-de, NIU Xi-zhuo. Characteristics of soft rock mass surrounding a tunnel[J]. The Chinese Journal of Coal, 1988(1): 23 - 30.
- [9] 潘长良, 陈沅江, 曹平. 岩石蠕变过程的不可逆热力学分析[J]. 中南工业大学学报, 2002, 33(5): 441 - 444.  
CHEN Yuan jiang, PAN Chang-liang, CAO Ping. Analysis of the process of the rock creep by means of irreversible thermodynamics[J]. Journal of Central South University of Technology, 2002, 33(5): 441 - 444.
- [10] 范镜泓, 高芝晖. 非线性连续介质力学基础[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987.  
FAN Jing-hong, GAO Zhi-hui. Nonlinear Mechanics Foundation of Continuous Media[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1987.
- [11] 杨春和, 王武林, 范镜泓. 软岩静力学特性的一种内时本构描述[J]. 岩土力学, 1987, 8(1): 11 - 17.  
YANG Chun-he, WANG Wu-lin, FAN Jing-hong. A kind of endochronic constitutive description of mechanical properties of soft rock under static loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 1987, 8(1): 11 - 17.
- [12] 谢和平. 岩石和混凝土损伤力学[M]. 北京: 中国矿业大学出版社, 1990.  
XIE He-ping. Damage Mechanics of Rock and Concrete[M]. Beijing: China University of Mining and Technology Press, 1990.
- [13] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.  
YANG Ting-qing. Visco elastic Mechanics[M]. Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 1990.
- [14] 黄国明, 黄润秋. 岩石弹塑性损伤耦合本构模型[J]. 西安矿业学院学报, 1996, 16(4): 328 - 333.  
HUANG Guo-ming, HUANG Run-qiu. Coupling constitutive model between elastoplasticity and damage of rock[J]. Journal of Xi'an Mining Institute, 1996, 16(4): 328 - 333.
- [15] 曾丹苓. 工程非平衡热动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1991.  
ZENG Dan-ling. Nonequilibrium Thermodynamics in Engineering[M]. Beijing: Science Press, 1991.
- [16] 孔超群, 李康先. 张量分析及其在连续介质力学中的应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨船舶工程学院出版社, 1989.  
KONG Chao-qun, LI Kang-xian. Tensor Analysis and Its Application to Mechanics of Continuous Media[M]. Harbin: Harbin Ship Engineering Institute Press, 1989.
- [17] 孙均. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.

- SUN Jun. Rheology of Rock and Soil Material and Its Application in Engineering[M]. Beijing: China Architectural Industry Press, 1999.
- [18] 楼志文. 损伤力学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1990.
- LOU Zhiwen. Foundation of Damage Mechanics[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1990.
- [19] 金丰年, 范华林, 浦奎源. 岩石蠕变损伤模型研究[J]. 工程力学, 2001(增刊): 227-231.
- JIN Fengnian, FAN Hualin, PU Kuizuan. Study on creep damage model of rock[J]. Engineering Mechanics, 2001(Suppl): 227-231.
- [20] 卡恰诺夫 L M. 连续介质损伤力学引论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989.
- Kacharukhu L M. An Introduction to damage Mechanics of Continuous Media[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989.
- [21] Cozzarelli F A, Bemasconi G. Nonlinear creep damage under one dimensional variable tensile stress[J]. Int J Nonlinear Mechanics, 1981, 16(1): 37-38.
- [22] Burke K, Cozzarelli F A. On the thermodynamic foundations of strain dependent creep and rupture in three dimension[J]. Int J Solids Structures, 1984, 20(5): 487-497.
- [23] 马明军. 岩石流变性的实验研究和理论分析[D]. 长沙: 中南工业大学, 1986.
- MA Mingjun. Experimental Study and Theoretical Analysis on Rheological Properties of Rock[D]. Changsha: Central South University of Technology, 1986.

## Endochronic rheological constitutive model of soft rock

CHEN Yuanjiang, PAN Changliang, CAO Ping, WANG Wengxing

(The School of Resources Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** Starting from the endochronic theory, the basic principle of the irreversible thermodynamics of continuum media was used to derive a new endochronic rheological constitutive equation of soft rock by introducing Newton time into intrinsic time and a damage variable into the Helmholtz free energy to rebuild them. The solution, analysis and experimental validation of the new equation under uniaxial stress were performed. The results show that, the new constitutive equation can effectively describe the mechanics characteristics of three creep stages of the decaying, stable and accelerating creep of soft rock; the damage variable performs an important effect in the new equation, which can describe the characteristics of the first and second creep stage and relaxation when damage does not happen, and the characteristics of the third creep stage when damage appears. The new equation correctly reflects such a fact as that the creep damage starts or appears at the end of the second stage and results in the accelerating creep and failure.

**Key words:** soft rock; rheology; endochronic theory; constitutive model; damage

(编辑 何学锋)