

[文章编号] 1004- 0609(2002)02- 0388- 05

复杂轴系扭振动力学建模网络法^①

贺尚红^{1, 2}, 段吉安²

(1. 长沙交通学院 机电工程系, 长沙 410076; 2. 中南大学 机电工程学院, 长沙 410083)

[摘 要] 提出了一种复杂轴系扭振动力学建模的网络法, 该方法将轴系各支路特性及节点和终端边界条件用规范的矩阵形式表示, 通过简单的矩阵运算将网络各支路与边界条件耦合起来, 并可求得剩余扭矩函数。针对剩余扭矩方程求解中出现的“增根”问题, 提出了一种简便的技术途径。算例证明了该方法的实用性和准确性。

[关键词] 传动系统; 扭转振动; 传递矩阵; 网络

[中图分类号] TH 113

[文献标识码] A

扭振特性分析是保证轴系传动机构良好动力学特性的重要环节, 通过对轴系扭振固有频率和振型的仿真计算, 可为设计和故障诊断提供理论依据^[1]。传递矩阵法作为一种典型的振动分析方法, 其物理概念明确, 矩阵维数不随系统自由度的增加而增大, 成为求解链状结构振动问题的主要方法。用该方法处理分支轴系时, 普通传递矩阵法必须加以改进才能适应^[2]。对于复杂轴系, 因分支太多或分支层次增加使数学处理复杂。文献[3]利用分支轴系之间的协调关系, 将直串子结构动力分析的动态矩阵法与子结构模态结合起来, 使问题得到简化。文献[4]根据分支轴系的树形结构, 自末端分支向根部递归计算剩余扭矩。本文作者则根据轴系分支点处的边界条件, 提出了复杂轴系扭振动力学建模的网络方法, 使建模过程标准化和通用化。

传递矩阵法的另一技术难题是求剩余扭矩频率函数时有时会出现数值的不稳定, Riccati 矩阵法从一定程度上克服了数值计算的不稳定^[5], 但其频率方程式常引起“增根”和“漏根”。当剩余扭矩函数值出现符号交替的奇异点时, 二分法基于对微区间函数值符号判断逼近的原理, 会误将奇异点判断为方程的根而引起“增根”现象。文献[6]通过构造一个与原系统互补的系统, 将原系统异号无穷大奇异点变为互补系统的同号无穷大奇异点, 通过对互补系统扭矩方程的求解得到系统的固有频率, 从而避免原方程求解中出现的“增根”, 但这种方法需设计与原系统互补的系统, 在复杂系统中难于实施。文献[4]在剩余扭矩的递归过程中逐步修改, 以消除奇

异点。文献[7]根据轴系在分支点及末端的边界条件得出频率特征多项式, 避免了奇异点的产生, 但需通过求解高次方程才可求得固有频率。文献[8]引入一种可自动调整步长的频率迭代函数, 在很大程度上避免了“漏根”的产生。

作者在分析剩余扭矩频率特性的基础上, 在二分法中引入奇异点的智能判断, 可有效排除方程求解中出现的“增根”, 通过提高计算精度减少产生“漏根”的可能性, 使求解过程变得非常简便。

1 元件传递矩阵及边界条件

一个复杂的轴系传动系统可看做由一系列基础单元及节点和终端边界条件组成, 以下为各基础单元传递矩阵及边界条件。

1) 惯性圆盘

$$T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 J 为惯性圆盘的转动惯量; ω 为角频率。

2) 弹性轴

$$T_E = \begin{bmatrix} 1 & 1/K \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 K 为弹性轴扭转弹性系数。

3) 串联元件

如图 1 所示, 从入端到出端总传递矩阵为

$$T = T_E^{(n)} T_E^{(n-1)} \dots T_E^{(j)} \dots T_E^{(1)} \quad (3)$$

各元件入端和出端满足

① [基金项目] 国家自然科学基金资助项目(59905023); 湖南省自然科学基金资助项目(00JJY2051)

[收稿日期] 2000- 08- 23; [修订日期] 2001- 04- 28

[作者简介] 贺尚红(1965-), 男, 副教授, 博士研究生。

$$\begin{bmatrix} \theta_o^{(j)} \\ M_o^{(j)} \end{bmatrix} = T_E^{(j)} \begin{bmatrix} \theta_i^{(j)} \\ M_i^{(j)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 $\theta_i^{(j)}$, $M_i^{(j)}$ 分别为元件 j 入端的角位移和扭矩; $\theta_o^{(j)}$, $M_o^{(j)}$ 分别为出端的角位移和扭矩。



图 1 串联元件

Fig. 1 Elements in series

4) 节点边界条件

如图 2 所示, 支路 I 和 II 为主支, 1, 2, ..., n 为分支, 则节点处边界条件为

$$M^{(I)} + M^{(II)} + \sum_{j=1}^n M^{(j)} = 0 \quad (5)$$

$$\theta^{(I)} = \theta^{(II)} = -\theta^{(1)} = -\theta^{(2)} = \dots = -\theta^{(j)} \dots = -\theta^{(n)} \quad (6)$$

式中 $M^{(I)}$, $M^{(II)}$, $M^{(j)}$ 分别为主支 I 和 II 及分支 j 在节点处的扭矩, $\theta^{(I)}$, $\theta^{(II)}$, $\theta^{(j)}$ 为相应的角位移。

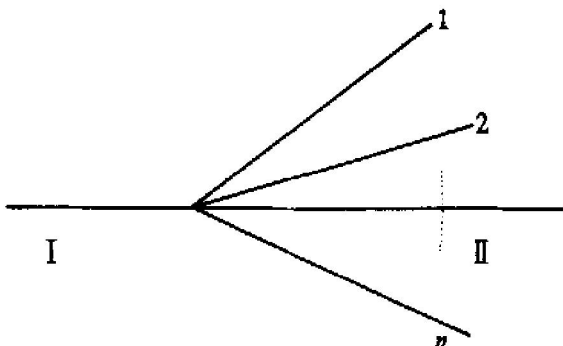


图 2 节点边界条件

Fig. 2 Junction boundary condition

5) 终端边界条件

终端自由: $M_i = 0$ (或 $M_o = 0$)

终端固定: $\theta_i = 0$ (或 $\theta_o = 0$)。

其中, M_i , M_o 分别为支路入端和出端扭矩; θ_i , θ_o 为支路入端和出端的角位移。

2 网络建模

以图 3 为例说明本文方法的建立、建模过程由如下步骤组成。

1) 支路编号及向量定义

如图 3 所示, 对网络各支路进行编号, 编号原则为:

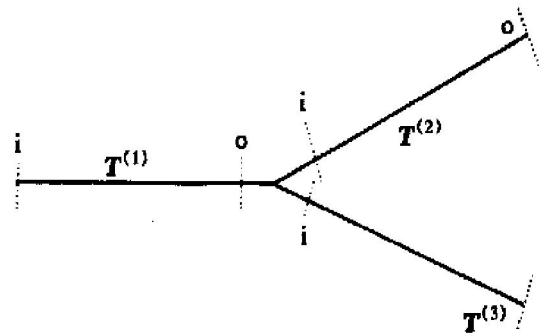


图 3 网络模型

Fig. 3 Network model

① 振型基准位移所在支路编为第 1 号;

② 剩余扭矩所在的支路编号为最大序号;

③ 各支路用“i”和“o”标识入端和出端。

取各支路入端和出端扭矩和角位移为研究对象, 按支路编号从小到大, 先入端后出端的顺序定义向量 M 和 θ :

$$M = [M_i^{(1)} \quad M_o^{(1)} \quad M_i^{(2)} \quad M_o^{(2)} \quad M_i^{(3)} \quad M_o^{(3)}]^T$$

$$\theta = [\theta_i^{(1)} \quad \theta_o^{(1)} \quad \theta_i^{(2)} \quad \theta_o^{(2)} \quad \theta_i^{(3)} \quad \theta_o^{(3)}]^T$$

式中, 向量元素中上标对应支路编号, 下标为出入端标识。

2) 网络特性矩阵的确定

如图 3 所示, 根据各支路串接元件情况用式 (3) 求得各支路总传递矩阵 $T^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$), 各支路特性满足:

$$\begin{bmatrix} \theta_o^{(j)} \\ M_o^{(j)} \end{bmatrix} = T^{(j)} \begin{bmatrix} \theta_i^{(j)} \\ M_i^{(j)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

将式 (7) 转化为

$$\begin{bmatrix} \theta_i^{(j)} \\ \theta_o^{(j)} \end{bmatrix} = B^{(j)} \begin{bmatrix} M_i^{(j)} \\ M_o^{(j)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 $B_{11}^{(j)} = -T_{22}^{(j)} / T_{21}^{(j)}$; $B_{12}^{(j)} = 1 / T_{21}^{(j)}$;

$$B_{21}^{(j)} = (T_{12}^{(j)} T_{21}^{(j)} - T_{11}^{(j)} T_{22}^{(j)}) / T_{21}^{(j)};$$

$$B_{22}^{(j)} = T_{11}^{(j)} / T_{21}^{(j)}$$

由各支路特性矩阵 $B^{(j)}$ 组装成网络特性矩阵 B , 则满足

$$\theta = BM \quad (9)$$

式中

$$B = \begin{bmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & & & & \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} & & & & \\ & & B_{11}^{(2)} & B_{12}^{(2)} & & \\ & & B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} & & \\ & & & & B_{11}^{(3)} & B_{12}^{(3)} \\ & & & & B_{21}^{(3)} & B_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

3) 节点边界条件矩阵表示

根据与节点相联支路的编号及方向(入端或出

端) 确定边界条件矩阵 C_1 和 D_1 。

$$M_o^{(1)} + M_i^{(2)} + M_i^{(3)} = 0$$

$$\theta_o^{(1)} + \theta_i^{(2)} = 0$$

$$\theta_o^{(1)} + \theta_i^{(3)} = 0$$

用矩阵形式表示为

$$C_1 M = 0 \quad (10)$$

$$D_1 \theta = 0 \quad (11)$$

式中 $C_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$;

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4) 终端边界条件矩阵形式

根据相关支路末端约束情况列写终端边界条件矩阵 C_2 和 D_2 。

图 3 中各支路为自由端, 支路 3 末端扭矩为待求扭矩, 因此不出现在终端边界条件中。为了求得支路 3 末端的扭矩及固有频率下的振型, 不失一般性, 令 $\theta_i^{(1)} = 1$, 因此可得如下矩阵形式的终端边界条件:

$$C_2 M = 0 \quad (12)$$

$$D_2 \theta = 1 \quad (13)$$

式中 $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

$$D_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

5) 剩余扭矩求取

由式 (10), (12) 及式 (11), (13) 可得

$$CM = 0 \quad (14)$$

$$D\theta = E \quad (15)$$

式中 $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$; $E = [1 \ 0 \ 0]^T$

由式 (9) 及 (15) 可得

$$DBM = E \quad (16)$$

则由式 (16) 及 (14) 可得

$$FM = G \quad (17)$$

式中 $F = \begin{bmatrix} DB \\ C \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$

令 $X = F^{-1}$, 则由式 (17) 可得

$$M = XG \quad (18)$$

因 $G = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 则剩余扭矩 M_s 为

$$M_s = M_o^{(3)} = X_{61} \quad (19)$$

6) 固有频率及振型求取

求解剩余扭矩方程 $M_s = 0$, 则可求得系统固有频率。各固有频率下网络各支路入端和出端角位移可通过式 (18) 及 (9) 求得为

$$\theta = BXG \quad (20)$$

由式 (18) 和 (20) 可求得各支路入端和出端在固有频率下的扭矩和角位移, 各支路惯量元件角位移和扭矩可由该元件至相应支路入端的传递矩阵求取, 因此可求出网络各惯量元件角位移而得到系统主振型。

上述分析是以图 3 为例进行的, 对于任意复杂的多分支及多层次网络, 完全可按上述步骤进行。

3 方程求解

对固有频率的求取归结为求非线性方程 $M_s = 0$ 的解, 求解非线性方程通常采用的是二分法, 即通过判断微区间端点的函数值符号进行搜索及逼近, 对于连续函数, 只要给定合适的步长, 可有效地求出方程的近似解。

图 4 所示为剩余扭矩频率特性图, 其中 ω_a 为方程的根, ω_b 为方程的异号无穷大奇异点, $\Delta\omega_i$ 为第 i 次逼近的频率区间, 扭矩变化值为 $|\Delta M_i|$, $\Delta\omega_{i+1}$ 为第 $i+1$ 次逼近的频率区间, 扭矩变化值为 $|\Delta M_{i+1}|$ 。当区间逼近点为异号无穷大奇异点时, 有 $|\Delta M_{i+1}| > |\Delta M_i|$; 如区间逼近点为方程的根, 则有 $|\Delta M_{i+1}| < |\Delta M_i|$ 。因此, 可根据这一互不相容的特性, 在程序中设计适当的判断语句即可区分方程的根和异号无穷大奇异点。此外, 计算表明, 当扭矩函数逼近无穷大奇异点时, 扭矩值会迅速增加, 超过计算机的存贮范围使计算无法进行。作者在计算程序中除将各计算变量设置成双精度变量外还分别设置了奇异点判断门坎值 ΔM_s 及扭矩极限值 M_{lim} 。当扭矩变化值 $|\Delta M_i| \geq \Delta M_s$ 时, 进入判

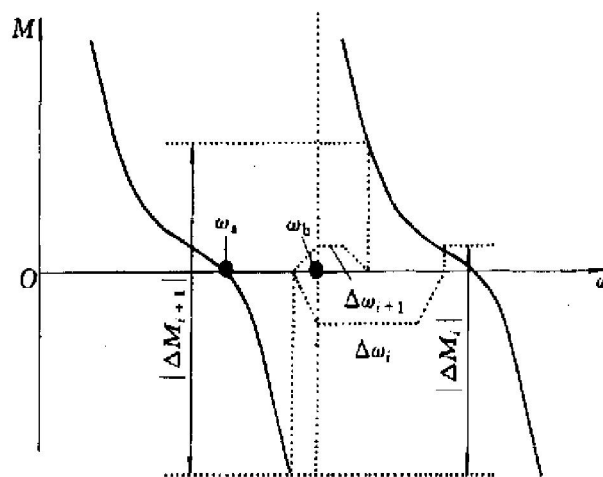


图 4 剩余扭矩频率特性图

Fig. 4 Scheme of remnant torque

断区间; 当 $|M_s| \geq M_{lim}$ 时, 取 $M_s = \text{sign}(M_s) M_{lim}$ 。这样在计算中, 可设置较小的频率步长以尽量避免产生“漏根”, 同时保证在特殊情况下使计算不因计算机存贮范围的限制而无法进行。作者经过大量试算表明, 在大多数情况下, 这种判断是行之有效的。但在某些系统中, 当进入高频段时, 剩余扭矩函数值对角频率 ω 极为敏感, 剩余扭矩函数值交替变化剧烈, 情况将变得非常复杂, 在此本文不作研究。

4 算例考核

图 5 所示为文献[2]提供的扭振计算模型,

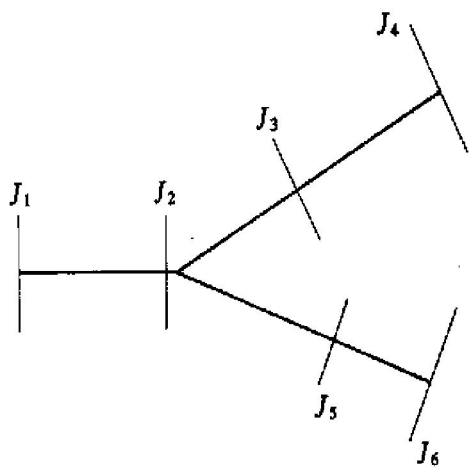


图 5 计算模型
Fig. 5 Calculated model

表 1 所列为文献的计算结果, 本文计算结果如表 2 所示。

从上可看出, 本文计算结果与文献的结果吻合较好, 在 $f = 3.994\ 4$ 附近出现异号无穷大奇异点。逼近区间为 $[3.994\ 0, 3.996\ 0]$ 时, 函数值区间为 $[5\ 994\ 922\ 889\ 760.33, -14\ 106\ 477\ 753\ 751.82]$, $|\Delta M| = 74\ 055\ 706\ 651\ 442.14$; 当逼近区间为 $[3.994\ 0, 3.995\ 0]$ 时, 函数值的区间为 $[5\ 994\ 922\ 889\ 760.33, -36\ 845\ 984\ 780\ 126.6]$, $|\Delta M| = 96\ 795\ 213\ 677\ 816.94$ 。 $|\Delta M|$ 成递增关系, 用本文方法有效排除了该奇异点。

本文方法已用于中南大学 211 工程实验轧机主传动固有特性的校核。作者还用该程序系统对宝钢平整机主传动固有频率进行过计算, 计算的一、二阶固有频率与实验结果吻合。

5 结论

- 1) 网络建模方法将支路特性、节点和终端边界条件用矩阵形式表示, 通过矩阵运算将网络各支路与边界条件耦合起来, 在处理大型复杂系统时, 问题大大简化。
- 2) 方法主要涉及支路特性矩阵、节点及终端边界条件矩阵的确定, 各矩阵元素取值法则规范, 主要计算只涉及简单的矩阵运算, 便于工程应用。
- 3) 设计的非线性方程求解算法, 可有效

表 1 文献[2]计算结果
Table 1 Results of Ref. [2]

Natural frequency /Hz	Vibration shape					
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
2.110	- 30.277	0.947 4	1.307 2	1.309 8	0.999 6	1.000 0
7.005	0.040 8	0.422 4	0.199 1	0.203 5	0.996 2	1.000 0
28.681	0.043 7	- 8.277 7	0.109 4	0.171 8	0.935 9	1.000 0
135.11	0.000 48	- 2.007 8	91.724 0	- 12.943 1	- 0.422 6	1.000 0

表 2 本文作者计算结果
Table 2 Calculated results in this paper

Natural frequency /Hz	Vibration shape					
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
2.111 0	- 30.674 8	0.947 9	1.312 9	1.316 0	1.000 0	1.000 0
7.008 9	- 0.040 7	0.422 3	- 0.199 2	- 0.203 7	0.996 2	1.000 0
28.694 9	0.043 7	- 8.277 5	0.108 9	0.171 3	0.935 9	1.000 0
135.176 6	0.000 6	- 2.609 0	119.057 5	- 16.799 2	- 0.416 7	1.000 0
135.820 3	0	0.009 6	- 0.006 2	0.000 9	- 0.436 1	1.000 0

排除异号无穷大奇异点引起的“增根”，数学处理简便可靠，程序设计简单。

4) 算例及实际应用证明了方法的正确性，对其他工程领域有一定的借鉴作用。

[REFERENCES]

- [1] 陈 勇, 陆颂元, 顾 芳, 等. 汽轮发电机组轴系扭振特性计算分析 [J]. 汽轮机技术, 1999, 41(5): 276–279.
CHEN Yong, LU Song-yuan, GU Fang, et al. The calculation and analysis of torsional vibration characteristic of turbine generator rotor system [J]. Turbine Technology, 1999, 41(5): 276–279.
- [2] 郑兆昌. 机械振动(中册) [M]. 北京: 机械工业出版社, 1988. 521–522.
ZHENG Zhao-chang. Mechanical Vibration (Vol. 2) [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1988. 521–522.
- [3] 吴慧新, 严新生. 分支轴系扭振分析的动态子结构矩阵法 [J]. 振动、测试与诊断, 1995, 15(2): 1–8.
WU Hu-xin, YAN Xin-sheng. A dynamic substructure matrix method for the torsional vibration analysis of shaft system with branches [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1995, 15(2): 1–8.
- [4] 陈奎孚, 彭红涛, 焦群英. 复杂传动轴系扭振的递归传递矩阵法 [J]. 农业工程学报, 1999, 15(2): 42–45.
CHEN Kui-fu, PENG Hong-tao, JIAO Qun-ying. The recursive transfer matrix method to calculate the torsional vibration of complex transmission system [J]. Transactions of The CSAE, 1999, 15(2): 42–45.
- [5] Horner G C, Pilkey W D. The Riccati transfer matrix method [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1978, 100(4): 297–302.
- [6] 王 正. Riccati 传递矩阵法的奇点及消除方法 [J]. 振动与冲击, 1987(2): 74–78.
WANG Zheng. The singularity of the Riccati transfer method and a method for its being eliminated [J]. Journal of Vibration and Shock, 1987(2): 74–78.
- [7] 冯 英. 轴扭转自由振动计算的研究 [J]. 武汉工业大学学报, 1995, 17(3): 89–93.
FENG Ying. The research in calculation of free torsional vibration of shaft system [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 1995, 17(3): 89–93.
- [8] 钟 掘, 杨勇学. 力学分析的高效算法 [M]. 长沙: 中南工业大学出版社, 1989. 2–16.
ZHONG Jue, YANG Yong-xue. Efficient Method of Mechanical Analysis [M]. Changsha: Central South University of Technology Press, 1989. 2–16.

Network method for dynamic modeling of complex shafting torsional vibration system

HE Shang-hong^{1, 2}, DUAN Ji-an²

(1. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Changsha Communications University, Changsha 410076, China;

2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

[Abstract] A network method for modeling of complex shafting torsional vibration system was established. The method deals with the characteristics of network and boundary conditions in matrix form. By simple operation of matrices, all branches and boundary conditions are coupled, and the nonlinear torsional function can be obtained. The natural frequencies can be calculated by solution of the equation. In order to avoid the “Augment of Root” of nonlinear equation, a simple technical method was proposed. It is proved that the methods proposed are practical and accurate.

[Key words] transmission system; torsional vibration; transfer matrix; network

(编辑 袁赛前)