

[文章编号] 1004- 0609(2002)02- 0383- 05

# 考虑材料剪胀性的球形空腔扩张问题的弹塑性分析<sup>①</sup>

温世游, 陈云敏, 凌道盛, 李月健  
(浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027)

**[摘要]** 在考虑材料剪胀性和塑性区弹性变形的情况下, 研究了塑性区中弹、塑性变形情况以及对应力场、位移场的影响。研究表明剪胀角  $\phi$  和内摩擦角  $\phi$  对弹塑性交界处半径  $R$  有显著影响; 给出了塑性区中平均体积应变及弹、塑性变形体积的计算公式和剪胀角的测试方法。通过算例研究发现, 弹塑性交界处半径  $R$  随着剪胀角  $\phi$  的增大而逐渐减小, 塑性区平均体积应变却随着剪胀角  $\phi$  的增大而增大。研究表明塑性区中弹性变形部分忽略是不合理的。

**[关键词]** 剪胀性; 球形空腔扩张; 弹塑性分析

**[中图分类号]** TU 473

**[文献标识码]** A

在岩土工程中, 球形空腔扩张问题的研究在静力触探、桩基承载力、旁压试验、土体锚杆锚固端阻力等方面具有重要的理论和工程意义。Vesic<sup>[1]</sup>研究了土体中球形空腔扩张的应力问题, 但没有给出平均塑性体积应变的表达式; 后又将其解答进一步推广到考虑平均体积应变的情形, 得到极限孔压的近似解。Carter<sup>[2]</sup>给出了球形空腔扩张中塑性区位移的隐式通解, 但没有研究塑性区中的弹、塑性变形, 而且只考虑了剪胀的情形。张季如<sup>[3]</sup>从非线性的角度, 通过能量平衡分析给出了球形孔扩张最终压力的解答, 但其解答局限于砂性土。文献[4]和[5]在应力跌落应变软化模型的基础上, 对球形空腔扩张问题进行理论和应用研究, 但都没有考虑土体材料的剪胀性。Yu 和 Houlsby<sup>[6]</sup>在忽略塑性区中弹性应变的前提下, 研究了剪胀角、泊松比等对极限孔压的影响。Hughes<sup>[7]</sup>在砂土中进行旁压试验时也忽略了塑性变形区中弹性应变的贡献。Bigoni 和 Laudiero<sup>[8]</sup>强调了在球形空腔扩张中塑性区的弹性变形的重要作用, 并采用半数值半解析的方法解决了球形空腔扩张问题。本文作者主要研究在考虑材料剪胀性和塑性区弹性变形的情况下, 塑性区中弹、塑性变形的情况以及对应力场、位移场的影响, 同时考察剪缩的情形。

## 1 球形空腔扩张问题的弹塑性分析

对无限体内球形空腔扩张问题的研究, 假定土

体是均匀的、各向同性的理想弹塑性体, 符合摩尔—库仑屈服准则, 采用剪胀角  $\phi$  来描述土体的剪胀性或剪缩性, 体积力不计, 不考虑几何非线性, 塑性区内的流动采用相适应的流动法则。考虑初始应力  $p_0$ , 假定土体内有初始孔半径为  $R_1$  的球体, 承受均布的球形孔压力。当压力增加时, 围绕着某一球形孔的球形区将由弹性状态进入塑性状态。随着内压力的逐渐增大, 塑性区不断扩大, 直至内压力增大到极限孔压力  $p_u$ , 此时球形孔半径为  $R_u$ 。设弹、塑性交界处的半径为  $R$ , 在半径  $R$  以内为塑性区,  $R$  以外土体仍处于弹性状态(见图 1)。由于球形孔扩张是球对称问题, 采用球坐标, 并规定以压应力为正。

### 1.1 弹、塑区的应力场和位移场

球形孔扩张是中心对称问题, 采用球坐标, 其平衡微分方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

式中  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  分别为径向应力、环向应力。取应力函数为

$$\varphi = \frac{M}{r} \quad (2)$$

式中  $M$  为常数。考虑初始应力  $p_0$ , 弹性区的应力和位移表达式分别为

$$\sigma_\theta = -\frac{M}{r^3} + p_0 \quad (3a)$$

① [基金项目] 浙江省自然科学基金青年人才专项基金资助项目(RC9609)  
[作者简介] 温世游(1976-), 男, 博士研究生。

[收稿日期] 2001- 06- 18; [修订日期] 2001- 09- 13

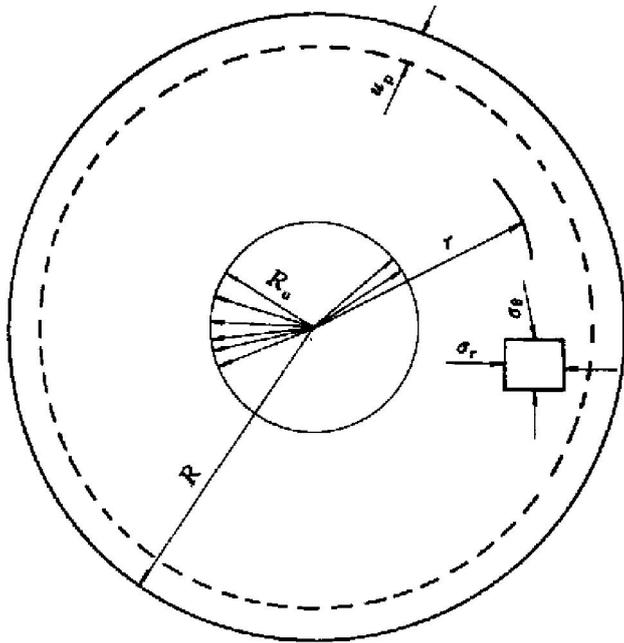


图1 球形空腔扩张图

Fig. 1 Spherical cavity expansion

$$\sigma_r = \frac{2M}{r^3} + p_0 \quad (3b)$$

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{M}{r^2} \quad (3c)$$

式中  $G$  为剪切模量,  $G = E/2(1 + \nu)$ ,  $\nu$  为泊松比。由式(3a)和(3b)可知

$$\sigma_r + 2\sigma_\theta = 3p_0 \quad (4)$$

所以, 在弹塑性的交界处( $r = R$ )有

$$\sigma_R + 2\sigma_{\theta|_{r=R}} = 3p_0 \quad (5)$$

由摩尔-库仑屈服条件

$$(\sigma_R - \sigma_{\theta|_{r=R}}) = (\sigma_R + \sigma_{\theta|_{r=R}}) \sin \phi + 2c \cos \phi \quad (6)$$

式中  $c$  为粘结力,  $\phi$  为内摩擦角。故

$$\sigma_R = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_{\theta|_{r=R}} + \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

令

$$N = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

则

$$\sqrt{N} = \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

有

$$\sigma_R = N \sigma_{\theta|_{r=R}} + 2c \sqrt{N} \quad (7)$$

将式(7)代入式(5)可得

$$\sigma_R = \frac{3Np_0 + 4c\sqrt{N}}{N+2}; \quad \sigma_{\theta|_{r=R}} = \frac{3p_0 - 2c\sqrt{N}}{N+2} \quad (8)$$

可见径向应力和环向应力与  $R$  无关。下面确定弹性区内应力和位移表达式中的常数  $M$ 。

在  $r = R$  处, 由径向应力连续条件, 从式(3b)

和式(8)可得

$$\frac{2M}{R^3} + p_0 = \frac{3Np_0 + 4c\sqrt{N}}{N+2}$$

所以

$$M = \left( \frac{N-1}{N+2} p_0 + \frac{2c\sqrt{N}}{N+2} \right) R^3 \quad (9)$$

令

$$F = \left( \frac{N-1}{N+2} p_0 + \frac{2c\sqrt{N}}{N+2} \right)$$

所以用  $R$  来表示弹性区的应力、位移表达式可写成如下形式:

$$\sigma_r = 2F \left( \frac{R}{r} \right)^3 + p_0 \quad (10a)$$

$$\sigma_\theta = -F \left( \frac{R}{r} \right)^3 + p_0 \quad (10b)$$

$$u = \frac{F}{2G} \frac{R^3}{r^2} \quad (10c)$$

将塑性区中  $\sigma_r = N\sigma_\theta + 2c\sqrt{N}$  代入平衡微分方程(1), 根据边界条件  $\sigma_r = p_u$  时,  $r = R_u$ , 得塑性区中径向应力表达式为

$$\sigma_r = \left( p_u + \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \right) \left( \frac{R_u}{r} \right)^{2\frac{N-1}{N}} - \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \quad (11)$$

可见塑性区中径向应力随着孔径的增大而减小。故

$$\sigma_R = \left( p_u + \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \right) \left( \frac{R_u}{R} \right)^{2\frac{N-1}{N}} - \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \quad (12)$$

令

$$\beta = 1 - 2 \frac{N-1}{N}$$

由式(11)和(12)可得

$$\sigma_r = \left( \sigma_R + \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^{1-\beta} - \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \quad (13)$$

由文献[2], 考虑材料的剪胀性( $\psi$  为剪胀角), 根据流动法则, 可得

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \sigma_\theta} = -\frac{2}{M}, \quad M = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (14)$$

根据 Carter 求得的塑性区位移满足下列方程:

$$\frac{u_r}{r} = A \left( \frac{R}{r} \right)^{1+\alpha} + B \left( \frac{R}{r} \right)^{1-\beta} + C \quad (15)$$

式中  $\alpha = 2/M$ ;  $A, B, C$  为文献[2]中相应  $A, B, C$  乘以系数  $F/2G$ 。由边界条件  $r = R_u$  时,  $u_{R_u} = R_u - R_1$ , 代入式(15)可得

$$\frac{R_u - R_1}{R_u} = A \left( \frac{R}{R_u} \right)^{1+\alpha} + B \left( \frac{R}{R_u} \right)^{1-\beta} + C \quad (16)$$

式(16)是变指数  $\alpha$  和  $\beta$  关于  $R/R_1$  的方程, 而  $\alpha$  和  $\beta$  的取值范围为  $1 \leq 1 + \alpha \leq 3, 0 \leq 1 - \beta \leq 2$ , 它们是关于  $\psi$  和  $\phi$  的函数, 无量纲化后进行求解。从上式可以看出只要知道前后孔径的变化情况, 就可以解

得弹塑性交界处的半径  $R$ , 从而得到塑性区的应力和位移分布。又由式(12)求得极限孔压为

$$p_u = (\sigma_R + \frac{2c\sqrt{N}}{N-1})(\frac{R}{R_u})^{1-\beta} - \frac{2c\sqrt{N}}{N-1} \quad (17)$$

### 1.2 塑性区中弹塑性变形分析

为计算方便, 先分析不考虑粘结力情形, 由塑性区的应力表达式可得

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_R} = (\frac{r}{R})^{\beta-1}$$

$$\beta = 1 - 2\frac{N-1}{N}$$

所以

$$\sigma_r = (\frac{r}{R})^{\beta-1} \sigma_R \quad (18)$$

对于确定的  $R$  来说,  $\sigma_r$  是关于  $r$  的函数, 得

$$\dot{\sigma}_r = (\beta-1)(\frac{r}{R})^{\beta-2} \frac{\sigma_R}{R}$$

$$\dot{\sigma}_0 = \frac{\beta-1}{N} (\frac{r}{R})^{\beta-2} \frac{\sigma_R}{R}$$

由  $d\sigma = D_e d\epsilon^e$  可得

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_r^e \\ 2\dot{\epsilon}_0^e \end{Bmatrix} = D_e^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_r \\ \dot{\sigma}_0 \end{Bmatrix} =$$

$$D_e^{-1} (\beta-1) \frac{\sigma_R}{R} (\frac{r}{R})^{\beta-2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/N \end{Bmatrix}$$

由

$$D_e = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda + G \end{bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$D_e^{-1} = \frac{2}{E} \begin{bmatrix} 1/2 & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix};$$

$$\lambda = \frac{\nu}{1-2\nu} 2G$$

得

$$\epsilon_e = \begin{Bmatrix} \epsilon_r^e \\ 2\epsilon_0^e \end{Bmatrix} = D_e^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_0 \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{2}{E} \begin{bmatrix} 1/2 & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} (\beta-1) \frac{\sigma_R}{R} (\frac{r}{R})^{\beta-2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/N \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{2}{E} (\beta-1) \frac{\sigma_R}{R} (\frac{r}{R})^{\beta-2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\nu}{N} \\ -\nu - \frac{1-\nu}{N} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_e = \int_{R_u}^R (\epsilon_r^e + 2\epsilon_0^e) dr =$$

$$\int_{R_u}^R \frac{2}{E} (\beta-1) \frac{\sigma_R}{R} (\frac{r}{R})^{\beta-2} (\frac{1}{2} - \nu - \frac{1}{N}) dr =$$

$$\frac{2}{E} \sigma_R (\frac{1}{2} - \nu - \frac{1}{N}) (\frac{r}{R})^{\beta-1} \Big|_{R_u}^R =$$

$$\frac{2}{E} \sigma_R (\frac{1}{2} - \nu - \frac{1}{N}) [1 - (\frac{R}{R_u})^{1-\beta}] \quad (19)$$

考虑粘结力时只要利用式(18), 将式中的  $\sigma_R$

变为  $\sigma_R + \frac{2c\sqrt{N}}{N-1}$  即可。根据球形空腔扩张后体积变化等于弹性区的体积变化与塑性区的体积变化之和, 可得

$$R_u^3 - R_1^3 = R^3 - (R - u_R)^3 + (R^3 - R_u^3) \Delta \quad (20)$$

式中  $\Delta$  为塑性区的平均体积应变。所以塑性区中的塑性应变为

$$\epsilon^e = \Delta - \epsilon^e \quad (21)$$

塑性区中的塑性变形的体积为

$$V^p = \int_{R_u}^R 4\pi r^2 (\Delta - \epsilon^e) dr \quad (22)$$

弹性变形的体积为

$$V^e = \int_{R_u}^R 4\pi r^2 \epsilon^e dr \quad (23)$$

## 2 剪胀角 $\phi$ 的确定

土体具有剪胀或剪缩特性, 使土有别于其他材料。这种特性是根据土体的塑性体积应变与正应变和剪应变关系定义的, 由

$$\epsilon_v = \epsilon_r + 2\epsilon_0 \quad (24)$$

及式(14)可推得

$$\frac{\epsilon_v}{\epsilon_r} = -\frac{2\sin\phi}{1-\sin\phi} \quad (25)$$

式(25)中的  $\phi$  值可由三轴试验获得。图 2 中  $\epsilon_v$  和  $\epsilon_r$  在三轴试验中表示体积应变和垂直应变。当  $\phi$  大于 0 时, 曲线中  $\epsilon_v$  和  $\epsilon_r$  的比值小于 0, 说明当  $\phi$  为正值时,  $\epsilon_v$  为负值, 这相当于图 2 中的曲线 2, 土体体积剪缩; 反之, 当  $\phi$  小于 0 时, 曲线中  $\epsilon_v$  和  $\epsilon_r$  的比值大于 0, 说明当  $\phi$  为负值时,  $\epsilon_v$  为正值, 这相当于图 2 中的曲线 1, 土体体积剪胀。从这里还可以看出, 对于一般粘土, 在荷载作用下体积一般剪缩, 因此,  $\phi$  值大于 0; 而对于密实砂土,  $\phi$  可能小于 0。剪胀角与孔隙比有关<sup>[9]</sup>, Schanz 和 Vermeer<sup>[10]</sup> 提出采用新近发展的一种扭转剪切装置来测试土体的剪胀角。

## 3 算例

图 3 和图 4 表示某球形空腔扩张时得到的应力

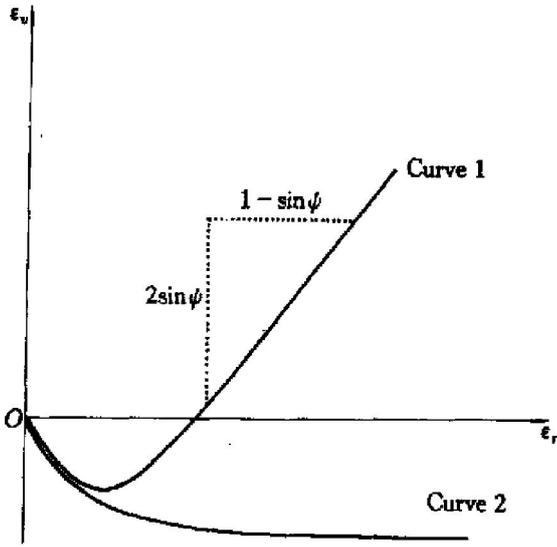


图2 三轴试验  $\epsilon_v - \epsilon_r$  曲线

Fig. 2 Resulting strain curves of  $\epsilon_v$  vs  $\epsilon_r$  for a standard triaxial test

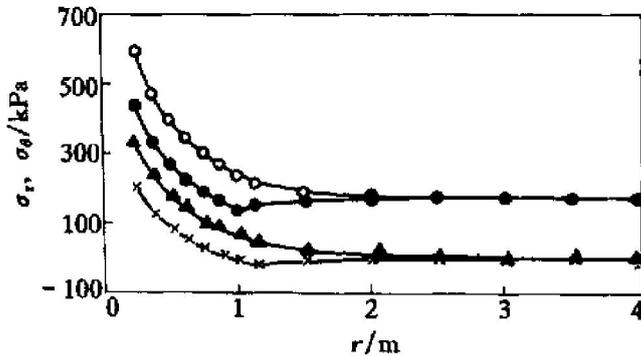


图3 径向应力和环向应力分布图

Fig. 3 Distribution of radial stress and circumferential stress

- Radial stress (considering initial stress);
- Circumferential stress (considering initial stress);
- ▲—Radial stress (ignoring initial stress);
- ×—Circumferential stress (ignoring initial stress)

和位移沿半径方向的变化曲线。计算参数为凝聚力  $c = 34 \text{ kPa}$ , 摩擦角  $\phi = 5^\circ$ , 剪胀角  $\psi = 1^\circ$ , 弹性模量  $E = 10 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.48$ , 扩张极限半径  $R_u = 0.25 \text{ m}$ , 初始应力为  $p_0 = 172 \text{ kPa}$  和  $p_0 = 0$  两种情况。当考虑初始应力时, 计算得到  $R$  的值为  $1.01 \text{ m}$ , 极限孔压为  $0.594 \text{ MPa}$ ; 不考虑初始应力时  $R$  为  $1.14 \text{ m}$ , 极限孔压为  $0.32 \text{ MPa}$ 。从图3可以看出, 若考虑初始应力, 在  $r < R$  时, 即在塑性区内,  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  均为压应力, 且随  $r$  的增加减小较快; 当  $r = R$  时, 由塑性状态变为弹性状态; 当  $r > R$  时, 即在弹性区内,  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  均为压应力。从图3还可以看出, 当不考虑初始应力时, 虽然曲线形

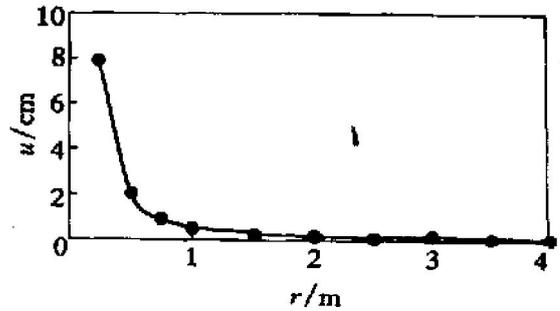


图4 径向位移曲线

Fig. 4 Radial displacement

状与考虑初始应力时类似, 但其值比考虑土体初始应力时小得多。在弹塑性交界处,  $\sigma_r$  为压应力,  $\sigma_\theta$  为拉应力。因此求解空腔扩张引起周围的应力场应考虑初始应力的影响。从图4表示的位移变化曲线可以看出径向位移是连续的, 位移随距离平方衰减, 最大位移发生在  $R_u$  处, 为  $8 \text{ cm}$ 。对塑性区进行弹塑性变形计算, 得塑性区的平均体积应变为  $0.002$ 。本例中塑性区中的弹性变形部分不可忽略不计。

图5是在其它土体参数不变的情况下,  $R/R_u$  随剪胀角的变化曲线图。从图中发现, 随着剪胀角的增大, 弹塑性区交界处的半径  $R$  逐渐减小。图6所示为剪胀角对塑性区平均体积应变的影响。塑性区平均体积应变随着剪胀角的增大而增大。由于土体剪胀性的存在, 增加了土体的抗剪切能力, 有阻止土体破坏的趋势, 可见考虑剪胀性对土体的影响是很重要的。

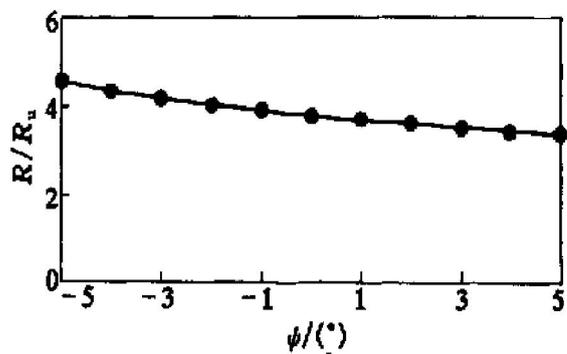


图5 剪胀角对  $R/R_u$  影响图

Fig. 5 Effect of dilation angle on  $R/R_u$

### 4 结论

1) 给出了球形空腔扩张时, 弹、塑性区的应力和位移表达式, 在弹塑性交界处径向应力、环向应力  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  为常数, 与交界处半径  $R$  的大小无关, 塑性区中径向应力随着孔径的增大而减小。

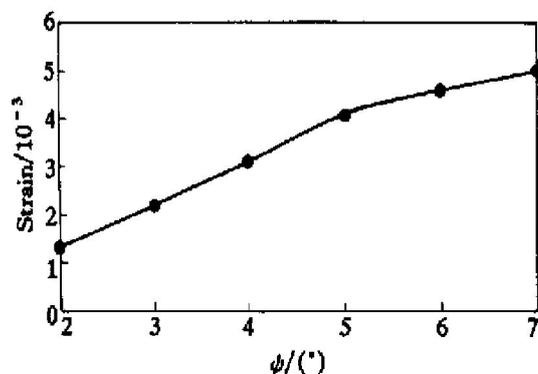


图 6 剪胀角对塑性区平均体积应变的影响

Fig. 6 Effect of dilation angle on average plastic volumetric strain

2) 球形空腔弹塑性交界处半径  $R$  是关于指数  $\alpha$  和  $\beta$  的函数, 而  $\alpha$  和  $\beta$  又是关于剪胀角  $\phi$  和内摩擦角  $\phi$  的函数, 剪胀角  $\phi$  和内摩擦角  $\phi$  对  $R$  有显著影响。

3) 给出了塑性区中平均体积应变及弹、塑性变形体积的计算公式和剪胀角的测试方法。

4) 通过算例发现, 球形空腔弹塑性交界处半径  $R$  随着剪胀角  $\phi$  的增大逐渐减小; 而塑性区中的平均体积应变却随着剪胀角  $\phi$  的增大而增大。

#### [ REFERENCES ]

- [ 1 ] Vesic A S. Expansion of cavities in infinite soil mass [ J ]. J SMFE ASCE, 1972, 98(SM3): 265- 290.
- [ 2 ] Carter J P, Booker J R, Yeung S K. Cavity expansion in cohesive frictional soils [ J ]. Geotechnique, 1972, 36 (2): 349- 358.
- [ 3 ] 张季如. 砂性土内球形孔扩张的能量平衡分析及其应用 [ J ]. 土木工程学报, 1994, 27(4): 37- 44.
- ZHANG Ji-ru. Analysis of spherical cavity expansion in sands by energy conservation and its application [ J ]. China Civil Engineering Journal, 1994, 27(4): 37- 44.
- [ 4 ] 张忠苗, 包 风, 陈云敏. 考虑材料应变软化的球 (柱) 孔扩张理论在桩底注浆中的研究 [ J ]. 岩土工程学报, 2000, 22(2): 243- 246.
- ZHANG Zhong-miao, BAO Feng, CHEN Yun-min. Research on grouted in pile bottom with spherical (columnar) hole expansion theory considering material strain softening [ J ]. Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(2): 243- 246.
- [ 5 ] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑材料应变软化的柱形孔扩张问题 [ J ]. 岩土工程学报, 1995, 17(4): 10- 19.
- JIANG Ming-jing, SHEN Zhu-jiang. Expansion of cylindrical cavity of materials with strain softening behavior [ J ]. Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(4): 10- 19.
- [ 6 ] Yu H S, Houlsby G T. Finite cavity expansion in dilatant soils: loading analysis [ J ]. Geotechnique, 1991, 41 (2): 173- 183.
- [ 7 ] Hughes J M O, Worth C P, Windle D. Pressuremeter test in sands [ J ]. Geotechnique, 1977, 27: 455- 477.
- [ 8 ] Bigoni D, Laudiero F. The quasi-static finite cavity expansion in a non-standard elastoplastic medium [ J ]. Int J Mech Sci, 1989, 31: 825- 838.
- [ 9 ] Brinkgreve R B J, Vermeer P A. Plaxis—Finite Element Code for Soil and Rock Analyses [ M ]. Netherlands: Material Models Manual, 1998.
- [ 10 ] Schanz T, Vermeer P A. Angles of friction and dilatancy of sand [ J ]. Geotechnique, 1997, 47(4): 887- 892.

## Elasto-plastic analysis of spherical cavity expansion with consideration of material dilatancy

WEN Shi-you, CHEN Yun-min, LING Dao-sheng, LI Yue-jian

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**[ Abstract ]** Elastic and plastic deformations in the plastic zone and their effects on stress and displacement fields were investigated with consideration of material dilatancy. It is shown that the angles of dilation and friction have obvious effects on the radius of elastic-plastic boundary. The expressions of elastic deforming volume and plastic deforming volume in the plastic zone were presented together with the average plastic volumetric strain. A testing method for dilation angle was given. It is proven by examples that ignoring the elastic strain in plastic zone is unreasonable. With the increase of dilation angle, the radius  $R$  decreases gradually while the average plastic volumetric strain increases.

**[ Key words ]** dilatancy; spherical cavity expansion; elasto-plastic analysis

(编辑 袁赛前)