

[文章编号] 1004-0609(2002)02-0377-06

基于胞映射理论的岩体动力系统可预测尺度模型^①

周 辉¹, 冯夏庭^{1, 2}, 谭云亮³, 王泳嘉²

(1. 中国科学院 武汉岩土力学研究所 岩土力学重点实验室, 武汉 430071; 2. 东北大学 资源与土木工程学院, 沈阳 110004;
3. 山东科技大学 矿压研究所, 泰安 271019)

[摘 要] 岩体混沌动力系统演化过程的可预测尺度是非线性预测理论研究的重要内容。在利用传统的理论和方法分析实际问题时, 常常由于观测资料不足而无法计算岩体动力系统的可预测尺度。为了解决这一问题, 基于胞映射理论提出了一种新的岩体动力系统可预测尺度的计算模型。该模型基于系统的非线性动力学方程和随机过程理论, 将点到点的映射转化成胞到胞的映射, 以系统演化达到极限状态概率分布前的时段作为系统的可预测尺度, 消除了初值观测误差和系统离散化对系统造成的影响, 从而可以更精确地描述系统的混沌性本质。实例的应用也表明了这一点。

[关键词] 胞映射理论; 岩体动力系统; 可预测尺度

[中图分类号] TD 324

[文献标识码] A

大量研究表明^[1~9], 大多数岩体动力系统的演化过程都会表现出明显的混沌性, 从而导致系统演化的长期不可预测性^[8]。因此, 对于岩体混沌动力系统而言, 其预测理论应包括两个方面的内容, 可预测尺度理论及预测理论和方法。其中, 可预测尺度问题是岩体混沌动力系统非线性预测理论研究的前提和重要内容。在传统理论中, 混沌系统的可预测尺度通常采用最大 Lyapunov 指数 LE_1 和所有正的 Lyapunov 指数之和 LE^+ 的倒数来衡量, 并分别将其定义为混沌系统的最大可预测尺度 $T_{\max}$ 和平均可预测尺度 $\bar{T}$ 。然而, 在大多数情况下, 要由实际岩体动力系统的观测资料来计算其 Lyapunov 指数并不容易。因为要得到一个较好的最大 Lyapunov 指数的估计值, 要求观测资料的个数最少不小于 10^{D_0} (D_0 为系统混沌吸引子的分维)^[10]; 且由于至少要在大于 2 维的空间中才会产生混沌, 所以 D_0 应大于 2。因此, 计算最大 Lyapunov 指数所需的观测资料的个数至少应大于 10^2 。当实际观测资料的个数小于 10^2 时, 所得到的 Lyapunov 指数就很可能存在较大误差, 这时, 我们就无法准确计算系统的可预测尺度。为了解决这一问题, 作者基于胞映射理论的基本原理, 提出一种新的岩体混沌动力系统可预测尺度的计算模型, 该模型可以更深刻地描述系统的混沌性和可预测尺度。

1 胞映射理论的基本原理

胞映射理论由 Hsu 提出^[11~16], 是非线性动力系统特别是强混沌性系统全局分析的一种有效工具。胞映射将点到点的映射转化为胞到胞的映射, 可以“平滑”并削弱观测初值的随机性和系统的内在随机性对系统动力学模式的影响。其基本原理如下。

设 N 维动力系统的非线性动力学方程可以表示为

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N; \alpha_i) \quad (1)$$

式中 x_i 为系统的状态变量, α_i 为控制变量。

把 N 维状态空间的每个坐标都分成许多小段, 每段用一个整数 Z_i 表示, 离散化状态空间的 N 维有限单元称为胞, 以 N 个整数 Z_i ($i=1, 2, \dots, N$) 构成向量 $\mathbf{Z}$ (称为胞向量) 来表征。

将系统的动力学行为(从 n 时刻到 $n+1$ 时刻)用胞对胞的映射 c 表示为离散化的整数方程

$$\mathbf{Z}(n+1) = c\mathbf{Z}(n) \quad (2)$$

对于胞映射, 需要计算出每个胞在下一时刻映射到多个胞 i 中的概率, 记为 ξ_i 。把这些概率汇总成胞概率向量, 记为 $\xi(t)$ (t 为时间)。在实际计算中, $\xi(t)$ 可按下述的样本法进行计算:

将第 j 个胞离散细化为若干个子胞, 设第 k 个

① [基金项目] 国家自然科学基金资助项目(50179034; 59804005)
[作者简介] 周 辉(1972-), 男, 博士。

[收稿日期] 2001-07-09; [修订日期] 2001-09-13

子胞的中心点状态向量为 $\mathbf{X}^d(n)$, 则其一次映射后的状态向量可由式(1)经差分运算求得

$$\mathbf{X}^d(n+1) = F(\mathbf{X}^d(n)) \quad (3)$$

记胞 j 的所有子胞经上述映射后落入胞 i 的个数为 M_{ij} , 则从胞 j 到胞 i 的一次转移概率为

$$P_{ij} = M_{ij} / N_s \quad (4)$$

式中 N_s 为一个胞内子胞的总数。

由 P_{ij} 构成 Markov 一次转移概率矩阵 $\mathbf{P}$, 则系统的动力学行为可用概率方程表示为

$$\xi(n+1) = \mathbf{P}\xi(n) = \mathbf{P}^n\xi(0) \quad (5)$$

式中 $\xi(0)$ 为系统初始时刻的状态概率向量; $\xi(n+1)$ 为系统第 $n+1$ 时刻的状态概率向量。利用上式, 可以分析非线性动力系统的各种演化特性。

2 基于胞映射理论的岩体动力系统可预测尺度模型

胞映射和随机过程理论已经证明^[11~16], 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由式(5)求得的系统状态概率的极限分布 ξ^* 与初始状态概率分布 $\xi(0)$ (即初始信息) 无关, 初始信息已不再对系统的继续演化起作用。也就是说, 对于达到极限状态概率分布 ξ^* 前的系统状态, 可利用初始信息进行预测, 超过了这一范围, 就不能再利用初始信息进行预测。因此, 达到极限状态概率分布 ξ^* 前的时段即是系统的可预测尺度。

由随机过程理论可知, 极限状态概率分布 ξ^* 不依赖于初始状态的信息 $\xi(0)$, 系统的状态概率分布将随演化进程而逐渐趋近于 ξ^* 。本文作者采用以下两种指标来判别系统趋近于极限状态概率分布的程度。

1) Shannon 信息量: 若事件每个可能结果发生的概率为 q_i , 则定义与该结果相对应的信息量为

$$I_1 = - \sum_{i=1}^n q_i \lg q_i \quad (6)$$

式中 n 为事件所有可能结果的个数。

在胞映射中, 当迭代到第 t 步时, 状态概率不为 0 的胞的集合对应于系统状态所有的可能结果, 根据式(6)可以计算出系统状态在不同迭代时步的信息量。根据该信息量的演化即可识别系统的状态概率分布随时间而逐渐趋近于极限分布 ξ^* (某一稳定值) 的程度。

2) 均方误差 Δ : t 时刻系统状态概率分布 $\xi(t)$ 与 $t-1$ 时刻状态概率分布 $\xi(t-1)$ 之间的均方误差为

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i(t) - \xi_i(t-1))^2} \quad (7)$$

式中 i 为状态胞编号。

若在时刻 T 时, $\Delta \leq \Delta^*$ (其中, Δ^* 为给定的判别阈值), 就可以近似判定系统的状态在 T 时刻已处于极限概率分布状态, 从而系统的可预测尺度即为 T 。

采用上述两种判别指标可以尽可能地消除由数值相对量的大小而引起的主观判别误差。

3 计算实例

表 1 为门头沟煤矿某工作面的试验观测数据, 由于只有少量的观测数据, 因此采用传统的方法无法计算系统的可预测尺度。利用本文作者提出的方法, 则可以计算该系统的可预测尺度, 其方法和步骤如下。

表 1 门头沟煤矿某工作面系统变量的试验观测数据

Table 1 Variable data of a working face in Mentougou Coal Mine

Date	y_1	y_2	y_3
1	13	856	9
2	119	6 294	17
3	18	1 283	0
4	10	454	36
5	24	2 068	5
6	30	2 220	5
7	28	1 742	55
8	3	45	37
9	32.3	176	- 19
10	35	2 900	- 18
11	391	4 129	23
12	349	1 265	41
13	3.6	229	29
14	21	404	- 19
15	224	2 313	- 10

y_1 is the frequency of acoustic emission, times/minute; y_2 is the energy rate of acoustic emission; y_3 is strain difference of photoelasticity.

3.1 反演系统的非线性动力学方程

为了削弱观测数据的随机性, 消除变量之间的非独立性, 提高反演非线性动力学方程对原始系统的描述精度, 对传统的非线性动力学方程反演方法作如下改进处理。

1) 为了消弱观测数据中的“噪音”成分, 首先

对观测数据进行五点三次平滑滤波; 为了消除滤波后变量之间的非独立性, 将滤波值序列生成独立主变量(具体方法见文献[8]); 为了加强独立主变量序列中的确定性信息, 削弱其随机成分, 将独立主变量序列进行 AGO 生成:

$$y_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k Y_i(j) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

式中 $Y_i(j)$ 为由滤波序列生成的独立主变量。利用新的生成序列 $y_i^{(1)} (i = 1, 2, 3)$ 作为系统的状态变量来反演其动力学方程。

2) 将系统的非线性动力学方程设为四次多项式(见文献[8])。

对表 1 中 3 日~9 日的观测数据进行上述处理, 可以反演得到系统在 3 日~9 日的非线性动力学方程(此过程由计算机完成)。经过上述改进, 可以显著提高反演非线性动力学方程对系统的描述精度^[8]。

3.2 生成胞向量空间和初始胞向量

首先确定系统的可能状态空间。将原始观测数据进行 3 次滤波, 进而生成独立主变量序列, 再经累加处理后, 得到系统的可能状态空间为

$$\begin{aligned} & -1.842 \leq y_1^{(1)} \leq 0.313 \times 10^{-7}, \\ & -2.203 \leq y_2^{(1)} \leq 3.58 \times 10^{-7}, \\ & -1.402 \leq y_3^{(1)} \leq 1.656 \end{aligned} \quad (9)$$

将上述区间均匀地划分成 $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ 个胞(胞向量编号为 1 至 1 000), 连同沉没胞(即由系统的所有不可能状态空间组成的胞, 编号为 0)共 1 001 个胞; 将累加生成序列中第“3 日”的数据所对应的胞向量 $(\underbrace{0, \dots, 0}_{813 \text{ 个 } 0}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{187 \text{ 个 } 0})$ 作为初始胞向

量。

3.3 确定系统的可预测尺度

利用上文所建立的系统的非线性动力学方程和划分的胞向量空间建立一次转移概率矩阵(用样本法计算一次转移概率矩阵时, 在每个胞内各取 1000 个样本点进行计算); 将初始状态概率向量与一次转移概率矩阵进行迭代, 分别得到系统演化的 Shannon 信息量和第 i 步与第 $i+1$ 步的系统状态概率向量间的均方误差随迭代步数的变化曲线(如图 1 所示)。由图 1(a) 可见, 当迭代至第 6 步时, Shannon 信息量基本趋于稳定(第 6 步与第 7 步的 Shannon 信息量差值为 0.003), 表明在第 6 步以后, 系统的 Shannon 信息量已不再随迭代步数的增加而发生有意义的变化; 同时, 由图 1(b) 可见, 第 6 步与第 7 步的系统状态概率分布的均方误差为 8.873×10^{-5} , 表明第 6 步的系统状态概率分布已充分接近于系统的极限状态概率分布。综合上述两种不同指标的识别结果可以判定: 由 3 日~9 日的观测数据所确定的动力系统在演化至第 6 步时已经进入混沌态, 初始信息不再对系统的继续演化起作用, 因此在该时段内, 系统的可预测尺度为 6 d。

为了比较不同初始状态概率分布(初始信息)对可预测尺度的影响, 分别用另外两种初始条件, 条件 I: 初始状态概率分布 $-(\underbrace{0, \dots, 0}_{500 \text{ 个 } 0}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{500 \text{ 个 } 0})$; 条件 II: 初始状态概率分布 $-(\underbrace{\frac{1}{1001}, \frac{1}{1001}, \dots, \frac{1}{1001}}_{1001 \text{ 个 } 1})$, 与上述动力系统的一次

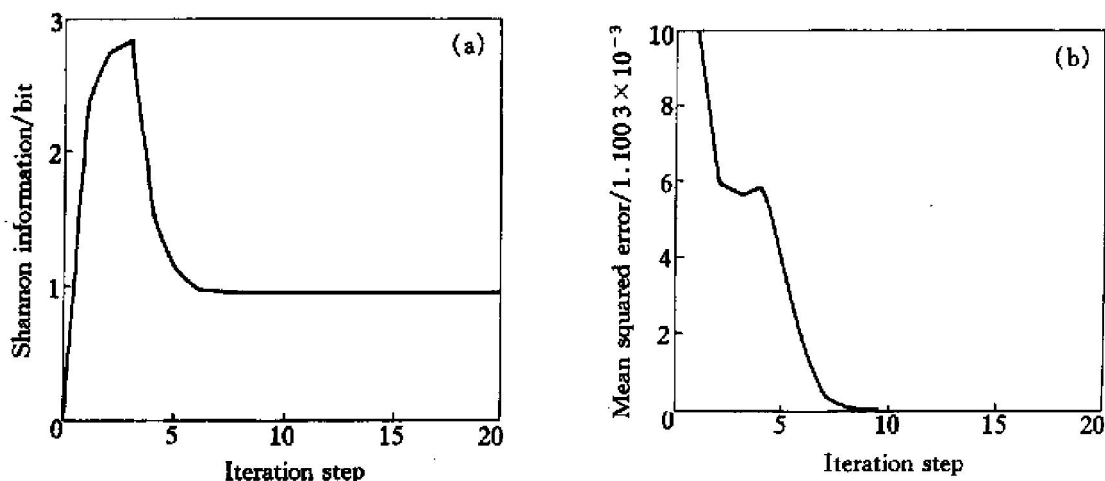


图 1 Shannon 信息量(a)和状态概率向量的均方误差(b)随迭代步数的变化曲线

Fig. 1 Curves of Shannon information (a) and mean squared error of state probability vector (b) according to iteration steps

状态转移概率矩阵进行迭代, 相应得到这两种初始条件下的 Shannon 信息量和均方误差随迭代步数的变化曲线分别如图 2 和图 3 所示。可见, 在条件 I 和条件 II 两种不同的初始条件下, 系统的可预测尺度均为 6 d, 与图 1 相同。因此可以得到如下结论:

1) 用胞映射理论可将动力系统的演化描述为: 相对于初始信息而言, 动力系统的演化过程即是状态概率向量的渐进稳定过程;

2) 动力系统的极限状态概率分布仅由其非线性动力学方程完全确定, 而与初始信息无关。

利用本文作者提出的方法计算表 1 所示的动力系统在不同时段的可预测尺度(如表 2 所列), 可得到该系统的可预测尺度随时间的变化曲线(如图 4 所示)。

需要进一步说明的是: 1) 由胞映射理论得到

的动力系统的可预测尺度不是对个别变量的反映, 而是构成系统非线性动力学方程的所有变量综合作用的结果, 因此, 提出的基于胞映射理论的岩体动力系统的可预测尺度是系统的平均可预测尺度; 2) 由于可预测尺度是由系统的混沌性所导致的, 且与混沌性成反比关系, 而由胞映射理论得到的可预测尺度是动力系统整体混沌性的体现, 所以可用表 2 中的可预测尺度值的倒数来定性表征系统的混沌性(如表 2 和图 5 所示)。可见, 图 5 所示的岩体动力系统在发生破坏前出现了明显的混沌性下降现象, 这与岩体破坏前的“降维”^[1~4, 6, 8]现象是一致的。

4 结语

针对传统岩体动力系统非线性预测理论在观测

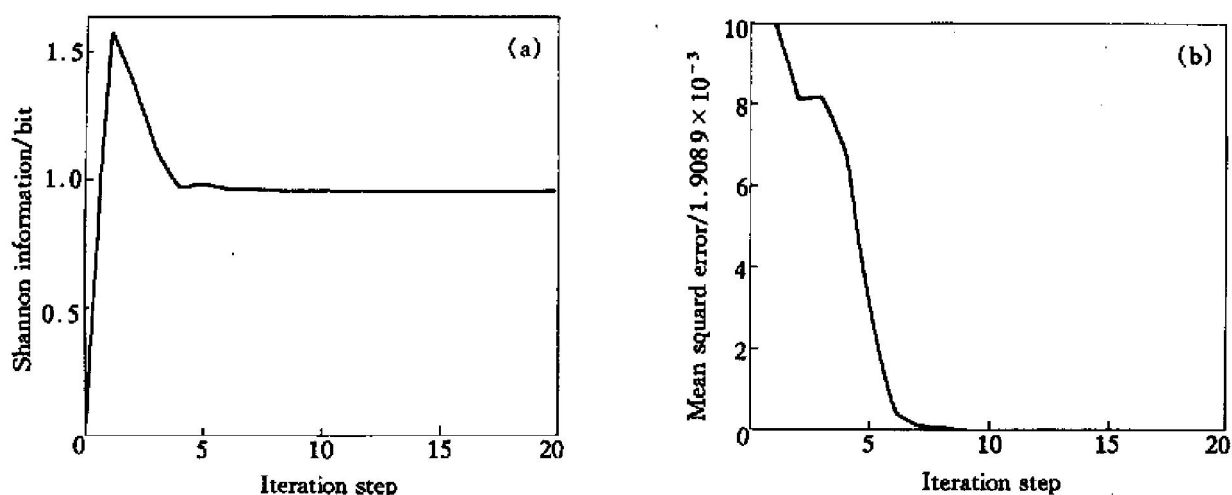


图 2 条件 I Shannon 信息量(a)和状态概率向量的均方误差(b)随迭代步数的变化曲线

Fig. 2 Curves of Shannon information (a) and mean squared error of state probability vector (b) according to iteration steps on condition I

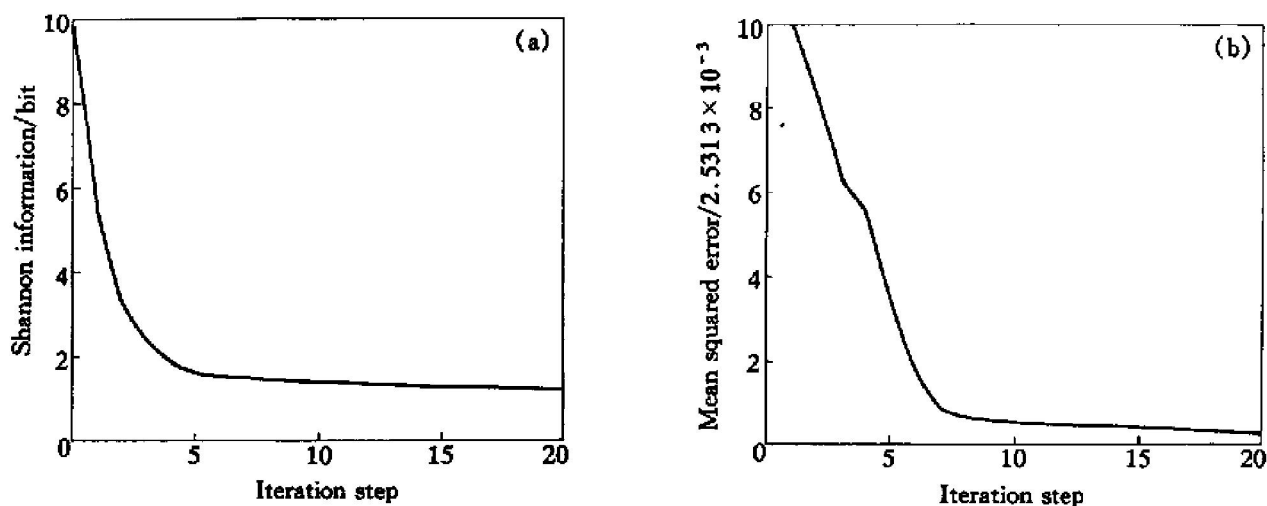


图 3 条件 II Shannon 信息量(a)和状态概率向量的均方误差(b)随迭代步数的变化曲线

Fig. 3 Curves of Shannon information (a) and mean squared error of state probability vector (b) according to iteration steps on condition II

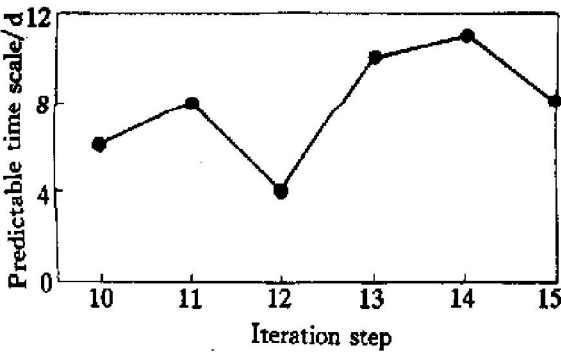


图 4 岩体动力系统不同时段的可预测尺度变化曲线

Fig. 4 Curve of predictable time scale of rock mass dynamic system in different time segments

表 2 岩体动力系统不同时段的可预测尺度和混沌性
Table 2 Predictable time scale and chaos of rock mass dynamic system in different time segments

Time segments	Predictable time scale/ d	Chaos(qualitatively)
3~ 9	6	0.167
4~ 10	8	0.125
6~ 12	4	0.25
7~ 13	10	0.1
8~ 14	11	0.091
9~ 15	8	0.125

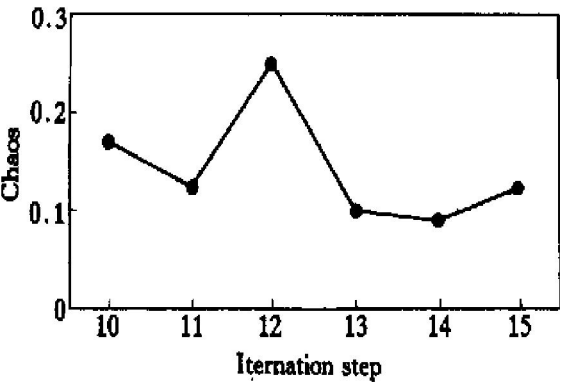


图 5 矿震系统不同时段混沌变化曲线

Fig. 5 Curve of chaos of rock mass dynamic system in different time segments

资料不足的情况下无法计算系统可预测尺度的理论缺陷, 基于胞映射理论建立了一种新的岩体动力系统可预测尺度的计算方法, 成功地解决了这一难题。由于用该方法计算得到的系统可预测尺度是建立在系统的非线性动力学方程之上的, 因此可以更深刻和科学地刻画和描述系统总体变量的综合作用与整体混沌性。提出的方法可以计算各种岩体动力系统的可预测尺度, 具有重要的理论和应用价值, 是对岩体非线性动力学理论的进一步发展和完善。

[REFERENCES]

[1] 谢和平. 矿山非线性岩石力学的研究与展望 [J]. 煤炭学报, 1997(Suppl.): 180- 186.
XIE He-ping. Research and outlook on mine nonlinear rock mechanics [J]. Journal of China Coal Society, 1997 (Suppl.): 180- 186.

[2] 秦四清, 张倬元, 王士天, 等. 非线性工程地质学导引 [M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1993. 109- 110.
QIN Si-qing, ZHANG Zhuo-yuan, WANG Shi-tian, et al. An Introduction to Nonlinear Engineering Geology [M]. Chengdu: Southwestern Jiaotong University Press, 1993. 109- 110.

[3] Xie H, Pariseau W G. Fractal character and mechanism of rock bursts [J]. Int J Rock Mech Min Sci, 1993, 30 (4): 343- 350.

[4] Feng Xi-ting, Seto M. Fractal structure of the time distribution of microfracturing in rocks [J]. Geophys J Int, 1999, 136: 257- 285.

[5] 陈子林, 周硕愚. 蕴震系统前兆场的混沌吸引子及分维 [J]. 地震学报, 1993(4): 463- 469.
CHEN Zi-lin, ZHOU Shuo-yu. Chaotic attractor and fractal of earthquake precursors [J]. Journal of Seism, 1993(4): 463- 469.

[6] 安镇文, 王林瑛, 姚栋华, 等. 大震孕育过程中的混沌特征 [J]. 地震学报, 1992(4): 393- 399.
AN Zhen-wen, WANG Lin-ying, YAO Dong-hua, et al. Chaos in the process of great earthquake [J]. Journal of Seism, 1992(4): 393- 399.

[7] Hirata T, et al. Fractal structure of spatial distribution earthquake the two point correlation function [J]. Geophys J R Astron Soc, 1980, 62: 303- 320.

[8] 周 辉. 矿震孕育过程中的混沌性及非线性预测理论研究 [D]. 沈阳: 东北大学, 2000. 31- 56.
ZHOU Hui. Chaos and Nonlinear Forecasting Theory in the Process of Mine Quake [D]. Shenyang: Northeastern University, 2000. 31- 56.

[9] 周 辉, 冯夏庭, 谭云亮, 等. 矿震系统的胞映射-突变预测模型 [J]. 中国有色金属学报, 2002, 12(1): 155- 160.
ZHOU Hui, FENG Xi-ting, TAN Yun-liang, et al. Cell-mapping-catastrophic forecasting model of mine quake system [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2002, 12(1): 155- 160.

[10] Wolf A. Determining lyapunov exponents from time series [J]. Physica, 1988, 16D: 285.

[11] Hsu C S. A theory of cell-to-cell mapping dynamics systems [J]. ASME J Appl Mech, 1980, 47: 931- 939.

- [12] Hsu C S, Guttalu R S. An untravelling algorithm for global analysis of dynamical systems: an application of cell-to-cell mappings [J]. ASME Jour Appl Mech, 1980, 47: 940– 948.
- [13] Hsu C S. Generalized theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems [J]. Jour Appl Mech, 1981, 49: 634– 642.
- [14] Hsu C S, Guttalu R S, Zhu W H. A method of analyzing generalized cell mappings [J]. ASME Jour Appl Mech, 1982, 49: 885– 894.
- [15] Hsu C S. A probabilistic theory of nonlinear dynamical systems based on cell state space concept [J]. ASME Jour Appl Mech, 1982, 49: 895– 902.
- [16] Hsu C S. Global analysis of dynamic systems using posets and digraphs [J]. Int J of Bifur and Chaos, 1995, 5(4): 1085– 1118.

Study on predictable time scale of rock mass dynamic system using cell-mapping theory

ZHOU Hui¹, FENG Xia-ting^{1, 2}, TAN Yur-liang³, WANG Yong-jia²

(1. Key Laboratory of Rock and Soil Mechanics, Institute of Rock and Soil Mechanics,
The Chinese Academy of Science, Wuhan 430071, China;

2. School of Resource and Civil Engineering, Northeastern University,
Shenyang 110004, China;

3. Shandong University of Science and Technology, Tai'an 271019, China)

[Abstract] Predictable time scale of the evolution of chaotic rock mass dynamic systems is one of the most important parameters in nonlinear forecasting theory. However, the predictable time scale of most rock mass dynamic systems can't be calculated because of lack of the observing data. In order to solve this problem, a new model to calculate the predictive time scale of rock mass dynamic system was proposed using the cell-mapping theory. The model transforms the point-to-point mapping to cell-to-cell mapping using the nonlinear dynamic equation of system and stochastic process theory, and considers period of time before evolution of system reaches to the limit probability distribution as the predictable time scale of system. The model eliminates the influences of error of initial conditions and dispersal on the evolution of system, so chaotic essence of system can be characterized more accurately which is also proved by the example. Case study indicates these advantages.

[Key words] cell-mapping theory; rock mass dynamic system; predictable time scale

(编辑 袁赛前)