

[文章编号] 1004- 0609(2001)06- 0993- 05

椭圆异型挤压塑性成形及模腔映射优化^①

齐红元¹, 朱衡君¹, 徐趁肖¹, 杜凤山², 刘 才², 邱 成¹

(1. 北方交通大学 机电工程学院, 北京 100044; 2. 燕山大学 机械工程学院, 秦皇岛 066004)

[摘 要] 针对非轴对称金属异型挤压塑性流动及模腔研究的理论课题, 借助于近代共形映射数学理论研究成果, 利用法线收敛法, 建立了映射函数解析方法。将三维金属异型材挤压塑性成形问题转化为二维轴对称成形问题, 求解椭圆异型挤压金属塑性成形连续流动场和应变速度场的数学解析模型, 并应用金属塑性成形理论, 建立了精密挤压异型材优化模腔的数学模型, 同时为精密快速地实现挤压模腔的 CAD/CAM 一体化目标提供了技术支持。

[关键词] 塑性成形; 挤压; 模腔; 优化

[中图分类号] TG 375; TH 123

[文献标识码] A

挤压是获得精密金属异型材的主要塑性成形工艺, 当今正努力以 CAD/CAM 一体化加工高精度挤压模腔方式来代替传统经验法, 实现制品的高精度, 其问题的关键在于如何建立异型材挤压金属塑性流动模型和模腔数学模型^[1, 2]。除了圆型材挤压变形机理为二维问题外, 椭圆等异型材成形均系非轴对称三维问题^[3~7], 由于缺乏数学理论支持, 至今尚无通用系统的挤压金属塑性流动求解理论。作者以椭圆型材成形三维问题求解为例, 借助共形映射和三角插值数学理论, 建立挤压金属塑性成形及其模腔的数学模型; 由塑性成形能量极值原理, 获得椭圆等异型材应变速度场解析、模腔优化参数, 完成椭圆模具 CAD 理论化工作, 再将模具几何解析函数与现代加工结合, 可实现模具的 CAM 技术目标。

1 椭圆域与单位圆域的映射解析

根据共形映射理论^[8], 寻求在任意给定椭圆边界域(图 1(b)) $z = x + iy$ 向 $|\xi| \leq 1$ 的单位圆域(图 1(a)) 的映射函数。图 1(b) 的椭圆型材截面几何图形可用下式级函数进行描述:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^n \quad (\xi = \rho \exp i\theta) \quad (1)$$

式(1)中的多项式 $c_n = a_n + ib_n$ 为复系数。将式(1)以复变三角形式表达:

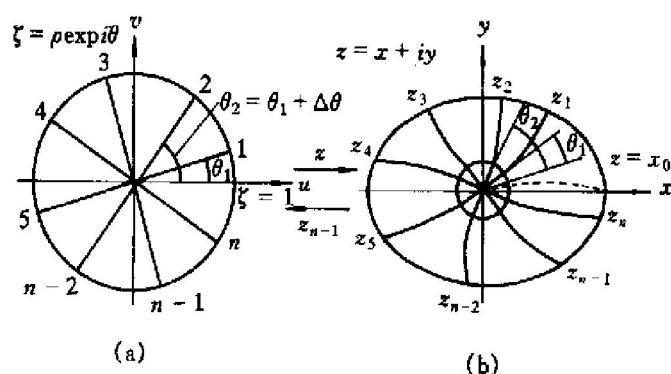


图 1 椭圆域共形映射

Fig. 1 Conformal mapping of ellipse zoom

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \cos n\theta \\ y(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \sin n\theta \end{cases} \quad (2)$$

如图 1 所示, 设 1, 2, ..., n 点复向量幅角为 θ_k 值, 在求解未知对应 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 插值点的过程中, 经常需要取 $n = 2^5, 2^6, 2^7, \dots$ 个数插值点进行迭代计算, 收敛过程相当缓慢, 才能得到式(1)级函数的 a_n 和 b_n 值。由于椭圆型材截面域是含有两个对称轴的图形, 即长轴和短轴, 可证明式(1)的级函数系数 c_n 为实数, 且偶数项系数为零, 简化得

$$z = \sum_{n=1}^{2N-1} c_n \xi^n; \quad c_n = a_n; \quad n = 1, 3 \dots, 2N-1 \quad (3)$$

同时采用奇偶插值点相互迭代及法线式收敛法

既可实现快速收敛,又可确保寻求单位圆边界点与椭圆轮廓映射插值点坐标值及系数 a_n 的精度^[9]。

2 椭圆异型挤压模腔建模

异型挤压通常是以金属圆棒材为坯料,获得非圆截面型材的塑性成形工艺。如图2所示,设坯料截面为半径 R_0 的圆域,椭圆型材轮廓向径为 $R(\theta, L)$,模腔变形区的长度为 L ,模腔曲面向径函数 $R(\theta, z)$ 应满足进、出口轮廓几何条件的模腔曲面方程:

$$R(\theta, z) = f(z)R_0(\theta, z=0) + [1-f(z)]R(\theta, z=L) \quad (4)$$

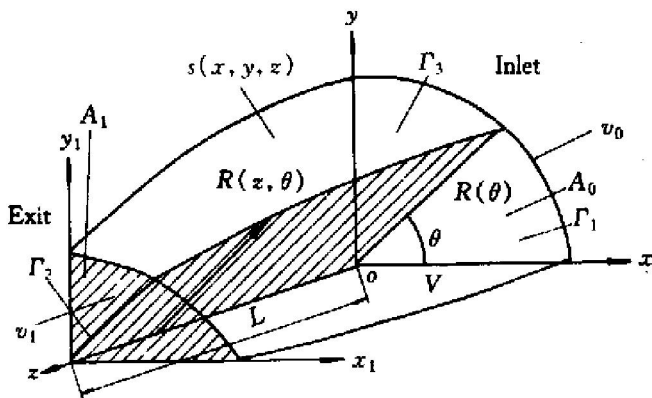


图2 椭圆型材挤压

Fig. 2 Ellipse product extrusion

在模腔曲面沿进、出口的纵向变化率为零时,金属塑性成形的能耗为最低^[10],则纵向多项式插值函数 $f(z)$ 应满足下列条件:

$$\begin{cases} f(0) = 1; f'(0) = 0 \\ f(L) = 0; f'(L) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

由式(2), (4)和(5)联立得模腔变形体域函数参数方程:

$$\begin{cases} x = f(z)R_0\rho\cos\theta + [1-f(z)]\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n\cos n\theta \\ y = f(z)R_0\rho\sin\theta + [1-f(z)]\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n\sin n\theta \\ z = z \quad 0 < z < L, 0 < \theta < 2\pi, \\ 0 < \rho < 1 \end{cases} \quad (6)$$

通过共形复映射和纵向插值函数,式(6)将三维金属异型挤压塑性流动问题转化二维轴对称 ρ 和 θ 两流面的流动问题进行描述,完成挤压塑性成

形及模腔(当 $\rho=1$ 时)的建模。

3 异型挤压塑性变形流动场

如图2所示, A_0 , A_z , v_0 分别为金属模腔入口横截面面积、任意 z 处横截面面积、坯料进口处 z 轴方向的速度。设在垂直 z 轴任意截面中,沿 z 轴方向速度 v_z 是均布的,由流管性质得

$$v_z = \frac{A_0 v_0}{A_z} \quad (7)$$

在轴对称挤压成形变形区中,决定金属塑性流动的两个流面曲面方程:

$$\rho(x, y, z) = \text{constant}; \theta(x, y, z) = \text{constant} \quad (8)$$

由轴对称挤压塑性成形域与异型材域关系是单值对应的,异型材塑性流动的流面函数与轴对称的也应是一一对应。设在异型材金属变形区中,沿坐标轴 x 和 y 方向的塑性流动速度分量为 v_x 和 v_y ,由流体力学理论,将式(8)分别对 ρ 和 θ 两任意流面取全微分,整理得异型挤压塑性成形的流函数方程:

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{-\sum_{n=1}^{\infty} B'_n(z) \rho^n \cos n\theta} &= \\ \frac{v_y}{-\sum_{n=1}^{\infty} B'_n(z) \rho^n \sin n\theta} &= \frac{v_z}{1} \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $B_1(z) = R_0 f(z) + a_1[1-f(z)]$; $B_n(z) = a_n[1-f(z)]$ ($n=2, 3, \dots, \infty$)。

由塑性成形理论^[11],得应变速度场:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad (10)$$

如图2所示,设 $S(x, y, z)$ 为模腔曲面函数,可证明式(9)和(10)速度场和应变速度场满足速度边值条件和体积不可压缩条件^[12],即

$$\text{grad } S(x, y, z) \cdot \mathbf{v}_{\rho=1} = 0; \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (11)$$

综上所述,只要已知坯料和型材截面域轮廓边值函数,就能得到异型挤压金属塑性流动场。

4 异型挤压能参数及模腔参数优化

设 σ_s 为金属塑性屈服极限, V 为金属变形体空间体积, k 为剪切屈服极限, m 为摩擦因子, $v_{r_1}(z=0)$, $v_{r_2}(z=L)$ 为模腔进、出口处间断速度,

$v_{S(\rho=1)}$ 为模腔与金属表面相对速度, 在变形区中金属成形总能耗等于变形能耗、 Γ_1 和 Γ_2 面剪切能耗和 Γ_3 表面摩擦的耗能之和。由金属塑性理论, 塑性变形区的总能耗为

$$J^* = \iiint_V \dot{\epsilon} \sigma_s dV + k \iint_{\Gamma_1} v_{z=0} d\Gamma_1 + k \iint_{\Gamma_2} v_{z=L} d\Gamma_2 + mk \iint_{\Gamma_3} v_{\rho=1} d\Gamma_3 \quad (12)$$

设挤压相对载荷比为

$$p = \frac{J^*}{A_0 v_0 \sigma_s} \quad (13)$$

式(13)对 p 取极值, 得优化的模具参数 L 、速度场和应变速度场, 可完成模具 CAD, 并与 NC 技术结合, 使精密异型挤压模具技术实现快速 CAD/CAM 成为可能。

5 实例计算分析

坯料为 $d30$ mm 的圆棒料; 椭圆型材长轴 $2a = 28$ mm, 短轴 $2b = 25$ mm。设收敛精度 $\text{eps} = 0.000\,05$, 由式(1)将椭圆型材域映射成 $|\xi| \leq 1$ 的单位圆域。通常将各几何参数变为无量纲值, 令 $b = 1$, 则 $a = 14/12.5$ (相对值)。在第一象限中, 采用共形映射法迭代运算, 取 32 个插值点来代替式(1)无限多个点, 得

$$\begin{aligned} a_{2n-1} = & 1.316\,552, 0.073\,814, 0.007\,726, \\ & 0.001\,113, 0.000\,699, 0.000\,065, \\ & -0.000\,570, -0.000\,035, \\ & 0.000\,695, 0.000\,043, \\ & -0.000\,930, -0.000\,056, \\ & 0.001\,448, 0.000\,087, \\ & -0.003\,114, -0.000\,186 \\ a_{2n} = & 0 (n = 1, 2, 3, \dots, 16) \end{aligned} \quad (14)$$

将 a_{2n-1} 代入式(6), 得到椭圆成型变形体域函数及模具模腔函数。利用塑性成形能量方程, 在断面比 $\lambda = A_1/A_0 = 0.78$ 和不同摩擦条件下, 得到模具参数 L 的优化值。如图 3 所示, 每一曲线优化点 L/b 对应着曲线 p 的极值点。当 $\lambda = 0.78$ 和摩擦因子 $m = 0.15$ 时, 优化的模具参数相对值 $L/b = 1.05$; 当 $m = 0.30$ 时, 对应着优化参数 $L/b = 0.85$ 。同样从式(13)分析得到, 随着摩擦因子增大和 λ 值减小, 载荷 p 也随之增大。

由图 4 的分析, 金属切向流动速度为 v_θ , 在变形区 $z = L/2$ 截面的对称成形流面上, 即 $\theta = 0^\circ$ 和

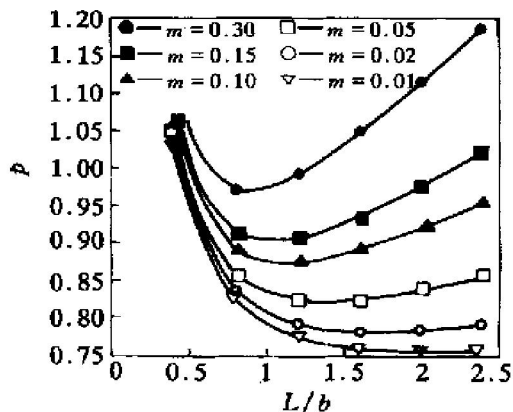


图 3 模具参数优化曲线

Fig.3 Optimized curves of die parameter

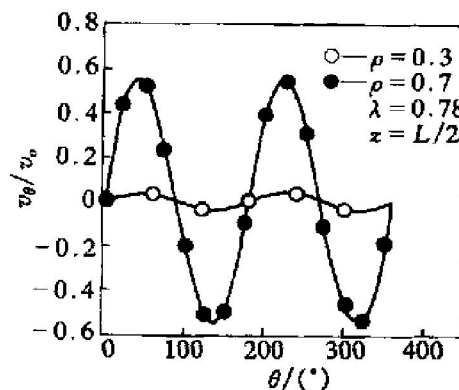


图 4 切向速度 $v_\theta - \theta$

Fig.4 Shear velocity $v_\theta - \theta$

$\theta = 90^\circ$ 流面, 其速度为零, 在近于 $\theta = 45^\circ$ 和 $\theta = 135^\circ$ 处流面上为最大; 流动速度呈以 π 为周期的近似正弦变化, 同时随着值递减, 变化幅度减小, 说明接近心部的金属不均匀变形呈减弱的趋势。由图 5 分析径向流动 v_r , 在 $\theta = 0^\circ$ 和 $\theta = 180^\circ$ 上, 速度绝对值为最小, 在近于 $\theta = 90^\circ$ 处, 速度绝对值为最大, 即短轴上径向速度为最大, 在长轴面上的径向速度为最小, 速度以 π 为周期呈现变化。以上速度分布与 MARCO 有限元计算和实验测量相吻合。通过椭圆型材成形模腔参数 L 的优化, 经式(6)得 $m = 0.15$, $\lambda = 0.78$ 的挤压模腔的 CAD 图 6; 与数控技术结合, 可实现模腔的 NC 编程及其 CAM 技术目标。

如图 7 所示, 坯料为 $d32$ mm 的棒材, 在摩擦因子 $m = 0.2$ 和断面比 $\lambda = 0.75$ 时, 通过对金属变形区长度 L 寻优, 椭圆型材偏心率 e 变化对模具优化参数 $L/10$ mm 无显著影响, 而随着椭圆偏心率的增大, 载荷比 p 将随之增大, 这是因为金属不均

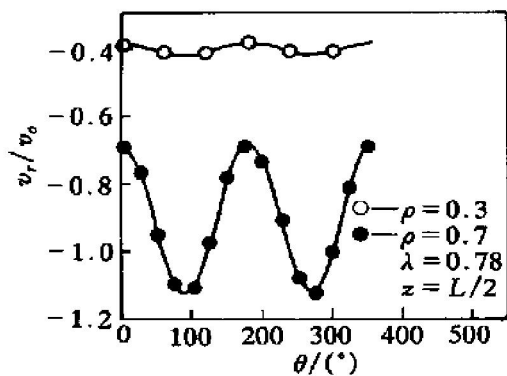
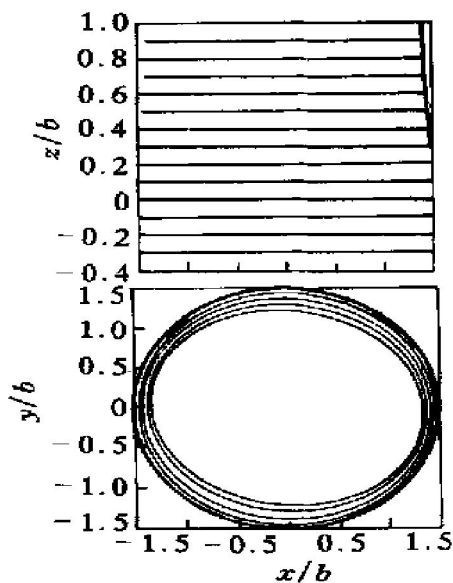
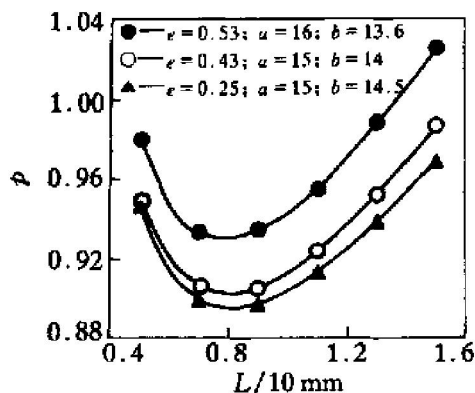
图 5 径向速度 $v_r - \theta$ Fig. 5 Radial velocity $v_r - \theta$ 

图 6 优化模腔

Fig. 6 Optimized die cavity

图 7 e 与优化参数 L Fig. 7 e and optimized parameter L

匀变形的加剧, 导致能耗增加, 经计算, 偏心率为零的圆棒材挤压能耗最低。

6 结论

1) 提出的金属成形和模腔优化的映射解析理

论, 实用于任意金属异型材挤压塑性流动规律求解及模腔优化, 同时进行了椭圆挤压塑性流动的规律性分析。

2) 理论上证明了在相同条件下, 椭圆型材截面偏心率变化对模具优化参数 L 值大小无显著影响; 椭圆型材偏心率的增大, 载荷比也随之增大。

3) 利用优化的模腔函数, 为实现椭圆等异型材的精密快速 CAD/CAM 一体化目标提供技术支持。

[REFERENCES]

- [1] Chitkara N R. Application of an upper bound method to off-centre extrusion of square section, analysis and experiments [J]. Inter J Mech Sci, 2000, 42: 321.
- [2] Sahoo S K. Round-to-hexagon drawing through straightly converging dies: an application of the SERR technique [J]. Inter J Mech Sci, 2000, 42: 445.
- [3] Laila S. Round-to-square section drawing through flat middle rolls [J]. Inter J Mech Sci, 1999, 41: 1323.
- [4] Chitkara N R. Axis-symmetry tube extrusion through a flat-face circular die: numerical construction of slip-line fields and associate velocity fields [J]. Inter J Mech Sci, 1997, 39(3): 341.
- [5] Knap F, Mat J. Drawing of square twisted wire [J]. Pro Tech, 1996, 60: 167.
- [6] Chitkara N R. A general numerical method of construction of axis-symmetry slip-line field [J]. Inter J Mech Sci, 1992, 34: 833.
- [7] Gunasekera J S. Analysis of extrusion of polygonal section through streamlined die [J]. J Eng Indu Tran ASME, 1985, 107: 229.
- [8] Yavuz N. Conformal Field Theory [M]. Cambridge, Massachusetts, USA: Perseus Pub, 2000, 1: 35.
- [9] WEN Guo-chun (闻国椿). Conformal Mapping and Boundary Problem (共形映射与边界值问题) [M]. Beijing: Higher Education Press, 1985. 96-101.
- [10] QI Hong-yuan (齐红元), ZHU Heng-jun (朱衡君). In: Chinese Postdoctoral Science Foundation ed. Proceedings of Chinese Postdoctoral Academic Conference: Branch of Mechanical and Instrument Engineering (2000 年中国博士后学术大会论文集机械与仪表分册) [C]. Beijing: Science Press, 2001. 484.
- [11] ZHAO Zhi-ye (赵志业). Theory Basis of Metal Stress Process (金属压力加工理论基础) [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1989. 82-88.
- [12] QI Hong-yuan (齐红元), ZHU Heng-jun (朱衡君). 精密挤压金属方型材相似成形与模具映射优化研究

Mapping optimization of plastic deformation and die cavity in ellipse special-shaped extrusion

QI Hong-yuan¹, ZHU Heng-jun¹, XU Chen-xiao¹, DU Feng-shan², LIU Cai², QIU Cheng¹

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Northern Jiaotong University,

Beijing 100044, P. R. China;

2. College of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, P. R. China)

[Abstract] On basis of the theory of metal plastic fluid and research of die cavity on non-axis-symmetry extrusion of special-shaped products, in virtue of mathematical research results of the conformal mapping theory, by using method of normal convergence, numerical value analysis of mapping function was built. Three-dimension metal plastic deformation of special-shaped products was transformed into two-dimension axis-symmetry problem, analysis model of the continuous stream and strain rate fields were sought in metal plastic deformation of ellipse-shaped product. By metal plastic theory, the mathematical model optimized to ellipse die cavity is established in exact extrusion. The integrative goal that realizes quickly CAD/CAM of exact ellipse product die cavity is supported.

[Key words] plastic deformation; extrusion; die cavity; optimization

(编辑 黄劲松)