[文章编号] 1004- 0609(2001)05- 0875- 06

塑性硬化材料亚耦联系统的变分原理及其在塑性加工中的应用①

潘景升，任运来

(燕山大学 机械工程学院，秦皇岛 066004)

[摘　要] 为降低金属塑性成形模拟试验的成本和难度，针对塑性加工中最常见的塑性硬化材料，给出了塑性成形模拟中原型与模型的定义，以及位移亚耦联系统和载荷亚耦联系统的定义，并建立了塑性硬化材料位移亚耦联系统和载荷亚耦联系统的变分原理，从而建立了有不同本构方程的两种材料的变形关系，克服了目前只有本构方程相同的两种材料才可以进行塑性变形模拟的理论限制。利用建立的变分原理，分析了铝、钢两种材料镦粗的变形关系。

[关键词] 塑性硬化材料；亚耦联系统；变分原理；塑性加工

[中图分类号] TG 301　　　　[文献标识码] A

金属塑性变形模拟是现代成形领域里的前沿技术之一，模拟理论与模拟方法研究是众所关注的问题[1~4]。目前，金属塑性变形的模拟理论一般要求原形和模型除满足几何尺寸、边界条件、加载路线相同外，还要求原形和模型有相同的本构方程[5, 6]。选择两种本构方程相同的材料在生产实际中是十分困难的，文献[7, 8]建立了塑性硬化材料的耦联系统和变分原理，为塑性变形模拟提供了新理论和新方法。然而塑性硬化材料耦联系统仍要求原形和模型之间有相同的位移边界条件和力边界条件。在多数情况下，两塑性变形体要么位移边界相同而力边界条件不一定相同，要么力边界相同而位移边界条件不一定相同，针对这种更广泛存在的塑性变形体之间的关系，作者建立了塑性硬化材料的亚耦联系统和变分原理。

1　基本方程及塑性硬化材料亚耦联系统

1.1　基本方程

对于小变形，有下述基本方程[9]

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (x_i \in V) \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \qquad (x_i \in s_p) \tag{2}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (x_j \in V) \tag{3}$$

$$u_i = \bar{u}_i \qquad (x_i \in s_u) \tag{4}$$

$$\frac{\partial E(e)}{\partial e_{ij}} \sigma_{ij}$$

或者

$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} e_{ij} \tag{5}$$

式中　s_p 为应力表面，s_u 为位移表面，式(1)中略去体积力。

1.2　变分法预备定理

根据文献[10]变分法的预备定理可以描述为：

如果函数 $F(x)$ 在线段(α, β)上连续，且对于满足某些一般条件的任选函数 $\delta y(x)$，有

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, \delta y(x) \mathrm{d}x = 0$$

则在线段(α, β)的任意点上，有

$$F(x) = 0 \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta$$

$\delta y(x)$的一般条件为：$\delta y(x)$一阶或若干阶可微，$\delta y(x)$或 $\delta y'(x)$有界。

该定理一般可以推广到二维和三维问题。

1.3　塑性硬化材料亚耦联系统的定义

塑性硬化材料亚耦联系统可分为位移亚耦联系统和载荷亚耦联系统，分别定义如下：

设变形体 Q_1 和 Q_2 由塑性硬化材料构成，它

① [收稿日期] 2001- 01- 15；[修订日期] 2001- 06- 07　　[作者简介] 潘景升(1942-)，男，副教授.

们符合 Mises 准则强化加载曲面，泊松系数 $\mu = 0.5$，满足单一曲线假设

$$\bar{\sigma} = \sigma_{s1} + A_1 \bar{e}^{n_1}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_{s2} + A_2 \bar{e}^{n_2}$$

式中 σ_{s1}，σ_{s2}，A_1，A_2，n_1，n_2 分别表示 Q_1 和 Q_2 初始屈服应力、材料常数和硬化指数。若 Q_1 和 Q_2 的几何尺寸相同，位移边界条件相同，加载路径相同，则称 Q_1 和 Q_2 为塑性硬化材料位移亚耦联系统。若 Q_1 和 Q_2 的几何尺寸相同，力边界条件相同，加载路径相同，则称 Q_1 和 Q_2 为塑性硬化材料载荷亚耦联系统。

1.4 差功原理

设有一位移(或载荷)亚耦联系统，它们的状态分别为 σ_{1ij}，e_{2ij}，u_{1ij} 和 σ_{2ij}，e_{2ij}，u_{2i}，应用式(1)于此位移(或载荷)亚耦联系统

$$\iiint_V (\sigma_{2ij,j} - \sigma_{1ij,j})(u_{2i} - u_{1i})\mathrm{d}V = \iiint_V \{[(\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(u_{2i} - u_{1ij})] - (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(e_{2ij} - e_{1ij})\}\mathrm{d}V = 0 \tag{6}$$

由 Green 公式[8]

$$\iiint_V [(\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(u_{2i} - u_{1ij})]\mathrm{d}V = \iint_{s_p+s_u} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij}) n_j (u_{2i} - u_{1i})\mathrm{d}s$$

式(6)可以写成

$$\iint_{s_p+s_u} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij}) n_j (u_{2i} - u_{1i})\mathrm{d}s - \iiint_V [(\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(e_{2ij} - e_{1ij})]\mathrm{d}V = 0 \tag{7}$$

对于位移亚耦联系统，在 s_u 面上，$\bar{u}_{2i} = \bar{u}_{1i}$，式(7)成为

$$\iint_{s_p+s_u} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij}) n_j (u_{2i} - u_{1i})\mathrm{d}s = \iiint_V [(\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(e_{2ij} - e_{1ij})\mathrm{d}V \tag{8}$$

由式(2) $\sigma_{2ij}n_j = \bar{p}_{2i} = \sigma_{1ij}n_j = \bar{p}_{1i}$，式(7)成为

$$\iint_{s_p} (\bar{p}_{2i} - \bar{p}_{1i})(u_{2i} - u_{1i})\mathrm{d}s = \iiint_V (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(e_{2ij} - e_{1ij})\mathrm{d}V \tag{9}$$

式(9)表示，对于位移亚耦联系统，力边界上外载荷之差与相应位移之差的积等于变形体内应力之差与应变之差的积。文献[11]称之为位移亚耦联系统的差功原理。

对于载荷亚耦联系统，在 s_p 面上，$\bar{p}_{2i} = \bar{p}_{1i}$，式(7)成为：

$$\iint_{s_u} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij}) n_j (\bar{u}_{2i} - \bar{u}_{1i})\mathrm{d}s = \iiint_V (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(e_{2ij} - e_{1ij})\mathrm{d}V \tag{10}$$

式(10)表示，对于载荷亚耦联系统，位移边界上的位移之差与相应外载荷之差的积等于变形体内应力之差与应变之差的积。文献[11]称之为载荷亚耦联系统的差功原理。

2 塑性硬化材料位移亚耦联系统的变分原理

设塑性变形体 Q_1 和 Q_2 是塑性硬化材料位移亚耦联系统，它们的状态分别为 σ_{1ij}，e_{1ij}，u_{ij} 和 σ_{2ij}，e_{2ij}，u_{2i}，并且 Q_1 的状态是已知的。

2.1 塑性硬化材料位移亚耦联系统的势能原理

式(8)对变形体 Q_2 的位移变分

$$\delta[\iiint_V (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(e_{2ij} - e_{1ij})\mathrm{d}V - \iint_{s_p} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij}) n_j (u_{2i} - u_{1i})\mathrm{d}s] = \iiint_V (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})\delta e_{2ij}\mathrm{d}V - \iint_{s_p} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij})(n_j - u_{2i})\mathrm{d}s \tag{11}$$

对于塑性材料与式(11)相应的泛函为

$$\pi = \iiint_V [E(e_{2ij}) - \sigma_{1ij}e_{2ij}]\mathrm{d}V - \iint_{s_p} (\sigma_{2ij} - \sigma_{1ij}) n_j u_{2i}\mathrm{d}s \tag{12}$$

对式(12)变分，并注意到在 s_u 面上，$\delta u_{2i} = 0$，得

$$\delta\pi = \iint_{s_p} (\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}} - \sigma_{2ij}) n_j \delta u_{2j}\mathrm{d}s - \iiint_V \frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}} - \sigma_{1ij}) n_j \delta u_{2i}\mathrm{d}V \tag{13}$$

式(13)取驻值，考虑到变形体 Q_1 的状态是已知的，再根据变分法预备定理[3]在变形体内

$$\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}} = 0 \qquad (x_i \in V)$$

在 s_p 上，$\sigma_{2ij}n_j = \bar{p}_{2i}$，所以

$$\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}} n_j = \bar{p}_{2i} \qquad (x_i \in s_p)$$

考查约束条件得

$$\sigma_{2ij} = \frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}$$

对于刚塑性硬化材料的本构方程[10]为

$$e_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{\bar{\sigma}} S_{ij}$$

$$E(e_{ij}) = \int_0^{e_{ij}} \sigma_{ij}\mathrm{d}e_{ij} = \int_0^{e_{ij}} S_{ij}\mathrm{d}e_{ij} = \int_0^{\bar{e}} \bar{\sigma}\mathrm{d}\bar{e}$$

将 $\bar{\sigma} = \sigma_s + A\bar{e}^n$ 代入上式，并注意到 $e_{ij}\sigma_{ij} = 0$

和$\bar{e}=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$，则

$$E(e_{ij})=\int_0^{\bar{e}}(\sigma_s+A\bar{e}^n)\mathrm{d}\bar{e}=\sigma_s\bar{e}+\frac{1}{n+1}A\bar{e}^{n+1}=\left(\sigma_s+\frac{A}{n+1}\bar{e}^n\right)\bar{e}\qquad(14)$$

$$\frac{\partial E}{\partial e_{ij}}=\frac{A}{n+1}n\bar{e}^n\frac{\partial\bar{e}}{\partial e_{ij}}+\left(\sigma_s+\frac{A}{n+1}\bar{e}^n\right)\frac{\partial\bar{e}}{\partial e_{ij}}$$

$$\frac{\partial\bar{e}}{\partial e_{ij}}=\frac{2}{3}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\bar{e}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial e_{ij}}=\frac{A}{n+1}n\bar{e}^n\frac{2}{3}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\bar{e}}+\left(\sigma_s+\frac{A}{n+1}\bar{e}^n\right)\frac{2}{3}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\bar{e}}=\frac{2}{3}\frac{e_{ij}}{\bar{e}}\left(\frac{A}{n+1}n\bar{e}^n+\sigma_s+\frac{A}{n+1}\bar{e}^n\right)=\frac{2}{3}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\bar{e}}(\sigma_s+A\bar{e}^n)=\frac{2}{3}\frac{\bar{\sigma}}{\bar{e}}e_{ij}=S_{ij}$$

上式表明对于刚塑性硬化材料，一定存在势函数 $E(e_{ij})$，使

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial E}{\partial e_{ij}}\qquad(15)$$

2.2　塑性硬化材料位移亚耦联系统的余能原理

将式(8)对变形体 Q_2 的应力变分

$$\delta\left[\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(e_{2ij}-e_{1ij})\mathrm{d}V-\iint_{s_p}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j(u_{2i}-u_{1i})\mathrm{d}s\right]=\iiint_V(e_{2ij}-e_{1ij})\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V-\iint_{s_p}(u_{2i}-u_{1i})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s\qquad(16)$$

与式(16)对应的泛函为

$$\pi=\iiint_V[B(\sigma_{2ij})-e_{1ij}\sigma_{2ij}]\mathrm{d}V-\iint_{s_p}(u_{2i}-u_{1i})n_j\sigma_{2ij}\mathrm{d}s\qquad(17)$$

对式(17)变分

$$\delta\pi=\iiint_V\left(\frac{\partial E(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}-e_{1ij}\right)\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V-\iint_{s_p}(u_{2i}-u_{1i})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s\qquad(18)$$

由于变形体 Q_2 的应力场是静力学容许的，所以

$$\iiint_V[u_{1i}\delta\sigma_{2ij,j}]\mathrm{d}V=\iint_{s_u+s_p}u_{1i}\delta\sigma_{2ij}n_j\mathrm{d}s-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{1i,j}+u_{1j,i})\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V\qquad(19)$$

$$\iiint_V[u_{2i}\delta\sigma_{2ij,j}]\mathrm{d}V=\iint_{s_u}u_{2i}\delta\sigma_{2ij}n_j\mathrm{d}s-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V\qquad(20)$$

将式(18)与(19)相减再与式(20)相加，得

$$\delta\pi=\iiint_V\left\{\left[\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{1i,j}+u_{1j,i})\right]\right\}\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V+\iint_{s_u}(u_{2i}-u_{1i})\delta\sigma_{2ij}n_j\mathrm{d}s\qquad(21)$$

式(21)取驻值，由于变形体 Q_1 的状态是已知的，再根据变分法预备定理在变形体内有

$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}-u_{2j,i})=0\qquad(x_i\in V)$$

在 s_u 面上

$$u_{2i}=u_{1i}=\bar{u}_{1i}=\bar{u}_{2i}\qquad(x_i\in s_u)$$

由几何方程得

$$e_{2ij}=\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})$$

$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}=e_{2ij}$$

对于刚塑性硬化材料，一定存在势函数 $B(\sigma_{ij})$，使 $\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}=e_{2ij}$ 成立。事实上，

$$\bar{\sigma}=\sigma_s+A\bar{e}^n$$

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}e_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij}=\int_0^{\bar{\sigma}}\bar{e}\mathrm{d}\bar{\sigma}=\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}\left[(\bar{\sigma}-\sigma_s)^{\frac{n+1}{n}}-\sigma_s^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}\left[\frac{n+1}{n}(\bar{\sigma}-\sigma_s)^{\frac{1}{n}}\right]\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}=\left(\frac{\bar{\sigma}-\sigma_s}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}$$

注意到 $\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij}S_{ij})}$ 和 $\bar{e}=\left(\frac{\bar{\sigma}-\sigma_s}{A}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{3}{2}\frac{S_{ij}}{\sigma}$$

且

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{\bar{\sigma}}S_{ij}=e_{ij}$$

3　塑性硬化材料载荷亚耦联系统的变分原理

设变形体 Q_1 和 Q_2 构成一个塑性硬化材料载

荷亚耦联系统，它们的状态分别为 σ_{1ij}，e_{1ij}，u_{1i}，σ_{2ij}，e_{2ij}，u_{2i}，并且塑性硬化材料变形体 Q_1 的状态是已知的。

3.1 塑性硬化材料载荷亚耦联系统的势能原理

式(10)对 Q_2 的位移 u_{2i} 变分[12]

$$\delta\Big[\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(e_{2ij}-e_{1ij})\mathrm{d}V-\iint_{s_u}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j(\bar{u}_{2i}-\bar{u}_{1i})\mathrm{d}s\Big]=\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})\delta e_{2ij}\mathrm{d}V \tag{22}$$

与式(22)对应的泛函为

$$\pi=\iiint_V(E(e)-\sigma_{1ij}e_{2ij})\mathrm{d}V \tag{23}$$

对式(23)变分

$$\begin{aligned}\delta\pi&=\iiint_V\Big(\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\Big)\delta e_{2ij}\mathrm{d}V\\&=\iiint_V\Big(\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\Big)\delta u_{2ij}\mathrm{d}V\\&=\iint_{s_p+s_u}\Big(\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\Big)nj\,\delta u_{2i}\mathrm{d}s-\iiint_V\Big[\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij,j}\Big]\delta u_{2i}\mathrm{d}V\\&=\iint_{s_p+s_u}\Big(\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\Big)nj\,\delta u_{2i}\mathrm{d}s-\iiint_V\Big[\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij,j}\Big]\delta u_{2i}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{24}$$

式(24)取驻值，由变分法预备定理得

$$\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij,j}}=0\qquad(x_i\in V)$$

$$\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}n_j=\sigma_{1ij}n_j=\bar{p}_{2}i\qquad(x_i\in s_p)$$

由约束条件得

$$\frac{\partial E(e)}{\partial e_{2ij}}=\sigma_{2ij} \tag{25}$$

3.2 塑性硬化材料载荷亚耦联系统的余能原理

将式(10)对变形体 Q_2 的应力 σ_{2ij} 变分[13]

$$\begin{aligned}\delta=&\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(e_{2ij}-e_{1ij})\mathrm{d}V-\iint_{s_u}\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j(\bar{u}_{2i}-\bar{u}_{1i})\mathrm{d}s]\\=&\iiint_V(e_{2ij}-e_{1ij})\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V-\iint_{s_u}(\bar{u}_{2i}-\bar{u}_{1i})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{26}$$

与式(26)对应的泛函为

$$\pi=\iiint_V[B(\sigma_{2ij})-e_{1ij}\sigma_{2ij}]\mathrm{d}V-\iint_{s_u}(\bar{u}_{2i}-\bar{u}_{1i})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s \tag{27}$$

式(27)两边对 Q_2 的应力 σ_{2ij} 变分

$$\delta\pi=\iiint_V\Big(\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}-e_{1ij}\Big)\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V-\iint_{s_u}(\bar{u}_{2i}-\bar{u}_{1i})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s \tag{28}$$

由于变形体 Q_2 的应力场 σ_{2ij} 是静力学容许的，因而有

$$\iiint_V u_{1i}\delta\sigma_{2ij,j}\mathrm{d}V=\iint_{s_u}u_{1i}n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{1i,j}+u_{1j,i})\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s \tag{29}$$

$$\iiint_V u_{2i}\delta\sigma_{2ij,j}\mathrm{d}V=\iint_{s_u}u_{2i}n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{1j,i})\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s \tag{30}$$

综合式(28)，(29)和(30)得

$$\begin{aligned}\delta\pi=&\iiint_V\Big\{\Big[\Big(\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\Big]-\Big[e_{1ij}-\frac{1}{2}(u_{1i,j}+u_{1j,i})\Big]\Big\}\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}V+\\&\iint_{s_u}(u_{2i}-\bar{u})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s-\iint_{s_u}(u_{1i}-\bar{u}_{1i})n_j\delta\sigma_{2ij}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{31}$$

式(31)取驻值，考虑到变形体 Q_1 的状态是已知的，根据变分法预备定理得

$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij,j}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}-u_{2j,i})=0\qquad(x_i\in V)$$

$$u_{2i}=u_{1i}\qquad x_i\in x_u$$

由几何方程和约束条件有

$$e_{2ij}=\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})$$

$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial\sigma_{2ij,j}}=e_{2j,i}$$

4 应用

镦粗变形是塑性加工中最基本的变形工序，分析镦粗变形具有重要代表意义。图 1 中是一铝园柱和一钢圆柱，它们的原始几何尺寸相同，在上端面受相同的均布载荷 p 的作用，$p>p_{s1}$，$p>p_{s2}$，且加载路径相同。铝的硬化规律为 $\bar{\sigma}=\sigma_{s1}+A_1\bar{e}^{n_1}$，钢的硬化规律为 $\bar{\sigma}=\sigma_{s2}+A_1\bar{e}^{n_2}$。由前述可知，铝

柱和钢柱构成一塑性硬化材料载荷亚耦联系统。设铝柱的状态是已知的, 求钢柱的变形。

在载荷 p 的作用下, 铝柱上端面的位移为 w_0, 在圆柱坐标下其位移场为

$$w_1=-\frac{w_0}{h}z,\quad u_1=\frac{w_0}{2h}e,\quad v_1=0$$

根据几何方程和本构方程求得应力场为

$$\sigma_{z1}=\sigma_{s1}+A_1\left(\frac{w_0}{h}\right)^{n_1} \tag{32}$$

设钢柱的轴向位移为

$$w_2-B_z \tag{33}$$

式中　B 为待定常数。

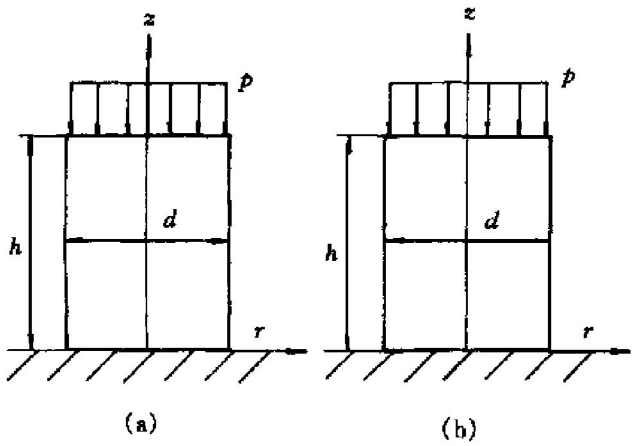

图 1　铝与钢柱镦粗模拟亚耦联系统

Fig. 1　Simulating sub-coupling system of aluminum column and steel column

由几何方程和体积不可压缩条件求得钢柱的应变场为

$$e_{z2}=-B,\ e_{r2}=\frac{B}{2},\quad e_{z2}=\frac{B}{2},\quad r_{r\theta 2}=r_{\theta z2}=r_{zr2}=0 \tag{34}$$

根据塑性硬化材料载荷亚耦联系统的势能原理

$$\pi=\iiint_V (E(e_{2ij})-\sigma_{1ij}e_{2ij})\,\mathrm{d}V \tag{35}$$

式中　$E(e_{2ij})=\left(\sigma_{s2}+\frac{A_2}{n_2+1}\bar{e}^{n_2}\right)\bar{e}$

将式(32)和式(34)代入式(35), 变分取驻值得

$$B=\left[\frac{\sigma_{s1}-\sigma_{s2}}{A_2}+\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{w_0}{h}\right)n_i\right]^{\frac{1}{n_2}} \tag{36}$$

将式(36)代入式(33)即可得到钢圆柱镦粗的位移场。式(31)表明, 若两柱材料相同, 即有 $\sigma_{s1}=\sigma_{s2}$, $A_1=A_2$, $n_1=n_2$, 则

$$B=\frac{w_0}{h}$$

即两圆柱的位移场相同。这与理论和实际是一致的。

5　结论

1) 根据塑性变形模拟的需要, 给出了塑性硬化材料亚耦联系统的定义。

2) 建立了塑性硬化材料亚耦联系统的变分原理, 将不同材料的变形联系在一起, 为塑性变形的模拟提供了一种新途径。

[REFERENCES]

[1] DONG Shi-shen(董仕深). 相似理论及其在金属塑性加工中的应用 [J]. Heavy Machinery(重型机械), 1987, 6: 27-30.

[2] FU Bao-lian(付宝连). 光测弹性理论中耦联系统的变分原理 [J]. Applied Mathematics and Mechanics(应用数学和力学), 1994: 48.

[3] LU Shou-uni(鹿守理). 热加工件温度变化的物理模拟 [J]. Iron Rolling(轧钢), 1988, 6: 41-44.

[4] REN Yun-lai(任运来). 塑性耦联系统的变分原理 [J]. Journal of Plasticity Engineering(塑性工程学报), 1997, 4(1): 14-20.

[5] REN Yun-lai(任运来). 弹性亚耦联系统的变分原理(Ⅰ) [J]. The Journal of the Northeast Heavy Machinery Institute(东北重型机械学院学报), 1997(1): 62-66.

[6] QIAN Wei-chang(钱伟长). General Variational Principle(广义变分原理) [M]. Beiing: Knowledge Press, 1985.

[7] ZHOU Fei(周　飞), PENG Ying-hong(彭颖红), YUAN Yue-yu(阮雪榆). 铝型材挤压过程有限元数值模拟 [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报), 1998, 8(4): 637-642.

[8] ZHANG Xin-quan(张新泉). 铝型材挤压导流模设计的开发与数值分析 [D]. Beijing: Tsinghua University, 1988.

[9] HAO Nan-hai(郝南海), XUE Zhi-min(薛志敏), LÜ Yan(吕　炎). 上机闸筋部成型过程的数值模拟 [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报), 1999, 9(3): 531-534.

[10] YAN Hong(阎　洪), BAO Zhong-yu(包忠羽), LIU He-sheng(柳和生), et al. 角铝型材挤压过程的数值模拟 [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报), 2001, 11(2): 202-205.

[11] PENG Ying-hong(彭颖红), ZHOU Fei(周　飞), YUAN Xue-yu(阮雪榆), et al. 金属塑性流动过程的计算机仿真技术 [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报), 1995, 5(Suppl 2):

637- 642.

[12] FU Bao-lian(付宝连), NIE Shao-min(聂绍民). 应用耦联变分原理于应变硬化材料塑性变形的物理模拟计算 [J]. Journal of Plasticity Engineering(塑性工程学报), 1999, 126(4): 89- 93.

[13] ZHAN Yan-ran(詹艳然), ZHANG Zhong-yuan(张仲元), WANG Zhong-ren(王仲仁). 对圆柱体镦粗过程中塑性变形发生和发展的探讨 [J]. Journal of Plasticity Engineering(塑性工程学报), 1999, 6(2): 81- 85.

Variational principle on sub-coupling system of plastic hardening material

PAN Jing-sheng, REN Yun-lai

(College of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, P. R. China)

[Abstract] To decrease the cost and difficulty of simulating in plastic deformation, in view of the most common plastic hardening materials, the model and the prototype in the simulating test of plastic deformation, the displacement sub-coupling system of the plastic hardening material as well as load sub-coupling system, were all defined. The principle of potential energy and surplus energy of this displacement as well as the load sub-coupling system were found, then the deformation relation between the materials which have different stress-strain relation was set, overcoming the theoretical limit that the simulating test can only be applied to two kinds of materials with the same stress-strain relation. By means of the principle of potential energy of load sub-coupling system, the compressing forming relation between the aluminum column and steel column are analyzed.

[Key words] plastic hardening material; sub-coupling system; variational principle; plastic forming

(编辑 龙怀中)