

[文章编号] 1004- 0609(2001)01- 0162- 05

最小方差预测法预测岩土工程变形^①

王国辉, 马 莉, 杨腾峰, 侯永会, 李卫国

(石家庄铁道学院 交通工程系, 石家庄 050043)

[摘 要] 根据最小方差预测理论, 提出了用最小方差预测法预测岩土工程变形, 对其建模机理和准则进行了论述, 并对预测模型的优化方法进行了研究和探讨。在实际应用中, 将最小方差预测法与其它预测方法进行了比较。结果表明, 该方法建模简便, 计算简单, 模型更新优化快, 能取得较高的预测精度。

[关键词] 最小方差预测; 变形预测; 模型优化

[中图分类号] TB 22

[文献标识码] A

岩土工程变形是造成工程事故的重大隐患, 轻则产生裂缝, 重则使工程遭受破坏^[1], 造成财产损失和人员伤亡。因此, 工程变形预测一直是灾害治理的一个重要问题。变形预测的方法多种多样, 常用的有回归分析^[2]、灰色预测^[3~6]等方法。但这些方法计算较繁, 不便工程现场实际应用。本文作者根据现场实测的沉降变形资料, 运用最小方差预测理论^[7]对岩土工程的变形预测进行了研究和探讨, 提出了用最小方差预测法预测岩土工程变形。下面就该方法的预测准则、建模机理和模型优化进行了论述。

1 最小方差预测变形的原理

1.1 最小方差变形预测的准则

假设某变形点第 $k+1$ 期变形量的观测值为 $m(k+1)$, 其相应的预测值为 $\hat{m}(k+1)$, 预测误差为 $\bar{m}(k+1)$, 则有

$$\bar{m}(k+1) = m(k+1) - \hat{m}(k+1) \quad (1)$$

最小方差预测的准则是预测误差平方的数学期望等于最小^[7], 即

$$E[\bar{m}^2(k+1)] = \min \quad (2)$$

1.2 最小方差预测的建模机理

最小方差预测, 属于统计外推型的预测, 是考虑系统受干扰的情况下, 按照预测误差的方差最小的准则, 根据已有的数据求算未来预测值的方法。

设某变形点的第 k 期和 $k+1$ 期变形量的观测值分别为 $m(k)$ 和 $m(k+1)$, 其测量误差分别是

$e(k)$ 和 $e(k+1)$ 。考虑系统可用如下差分方程表示 (因其观测值是一组离散值):

$$m(k+1) = -am(k) + e(k+1) + ce(k) \quad (3)$$

式中 a, c 均为常数。引入时间后移算子 q^{-1} , 使得

$$q^{-1}m(k+1) = m(k),$$

$$q^{-1}e(k+1) = e(k)$$

则式(3)可整理为

$$m(k+1) = \frac{e(k+1)(1+cq^{-1})}{1+aq^{-1}} \quad (4)$$

将式(4)两边都乘以 q^{-1} , 则有

$$m(k) = \frac{e(k)(1+cq^{-1})}{1+aq^{-1}} \quad (5)$$

将式(5)代入式(3)得

$$m(k+1) = e(k+1) + \frac{e(k)(c-a)}{1+aq^{-1}} \quad (6)$$

由式(5)得

$$e(k) = \frac{m(k)(1+aq^{-1})}{1+cq^{-1}} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6), 得

$$m(k+1) = e(k+1) + \frac{m(k)(c-a)}{1+cq^{-1}} \quad (8)$$

将式(6)代入式(1), 并考虑式(2), 则有

$$E[\bar{m}^2(k+1)] = E[e(k+1) + \frac{m(k)(c-a)}{1+cq^{-1}} - \hat{m}(k+1)]^2 \quad (9)$$

式中 $e(k+1)$ 与 $m(k)$ 和 $\hat{m}(k+1)$ 均无关, 其协方差为零^[8], 则

$$E[\bar{m}^2(k+1)] = E[e^2(k+1)] +$$

① [收稿日期] 2000- 02- 16; [修订日期] 2000- 06- 29

[作者简介] 王国辉(1954-), 男, 副教授。

$$E[\frac{m(k)(c-a)}{1+cq^{-1}} - \hat{m}(k+1)]^2$$

由于 $e(k+1)$ 作为观测误差是不可知的, 故可以看出

$$E[\bar{m}^2(k+1)] \geq E[e(k+1)]^2$$

要使 $E[\bar{m}^2(k+1)]$ 最小, 也就是取其下界, 有

$$E[\bar{m}^2(k+1)] = E[e(k+1)]^2,$$

则要求式(7)中等号右边的后两项消失, 即

$$m(k) \frac{c-a}{1+cq^{-1}} - \hat{m}(k+1) = 0$$

因此, 最佳预测值为

$$\hat{m}(k+1) = \frac{m(k)(c-a)}{1+cq^{-1}} \quad (10)$$

该模型根据第 k 期及其以前的监测资料, 只能预测第 $k+1$ 期变形情况, 称之为一步预测模型。

一步预测模型只能预测未来一期的变形情况, 最小方差二步预测, 能预测未来第二期(即 $k+2$ 期)变形情况。

根据式(8), 第 $k+2$ 期的变形观测值可表示为 $m(k+2)$, 且

$$m(k+2) = e(k+2) + (c-a)e(k+1) - \frac{e(k)a(c-a)}{1+aq^{-1}}$$

同理推得

$$\hat{m}(k+2) = \frac{m(k)a(a-c)}{1+cq^{-1}} \quad (11)$$

上式为最小方差二步预测模型。同理还可以推广到任意步。

考查式(3), 将其整理为

$$\begin{aligned} e(k+1) - m(k+1) &= am(k) - ce(k) - \\ &\quad cm(k) + cm(k) \\ &= (a-c)m(k) - \\ &\quad c(e(k) - m(k)) \end{aligned}$$

当时间变量 $k=0$ 时有

$$e(1) - m(1) = (a-c)m(0) - c(e(0) - m(0)) \quad (12)$$

式中 $m(0)$ 为第 0 期观测数据, $e(0)$ 为 $m(0)$ 的观测误差。

当 $k=1$ 时,

$$e(2) - m(2) = (a-c)m(1) - c(e(1) - m(1))$$

将式(12)之值代入上式, 并整理得:

$$\begin{aligned} e(2) - m(2) &= (a-c)m(1) + \\ &\quad (-c)(a-c)m(0) + \\ &\quad (-c)^2(e(0) - m(0)) \end{aligned} \quad (13)$$

当 $k=2$ 时,

$$e(3) - m(3) = (a-c)m(2) - c(e(2) - m(2))$$

将式(13)之值代入上式, 整理得

$$\begin{aligned} e(3) - m(3) &= (-c)^0(a-c)m(2) + (-c) \cdot \\ &\quad (a-c)m(1) + (-c)^2(a-c) \cdot \\ &\quad m(0) + (-c)^3(e(0) - m(0)) \end{aligned}$$

同理, 当 $k=t$ 时, 则有

$$\begin{aligned} e(t+1) - m(t+1) &= (a-c) \sum_{i=0}^t (-c)^{t-i} \cdot \\ &\quad m(i) + (-c)^{t+1} \cdot \\ &\quad (e(0) - m(0)) \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $i=0, 1, 2, \dots, t$ 。

整理式(14), 得

$$\begin{aligned} m(t+1) &= e(t+1) + \\ &\quad (c-a) \sum_{i=0}^t (-c)^{t-i} m(i) + \\ &\quad (-c)^{t+1}(m(0) - e(0)) \end{aligned} \quad (15)$$

根据最小方差预测的准则, 有

$$\begin{aligned} E[\bar{m}^2(t+1)] &= E[e(t+1) + \\ &\quad (c-a) \sum_{i=0}^t (-c)^{t-i} m(i) + \\ &\quad (-c)^{t+1}(m(0) - e(0)) - \\ &\quad \hat{m}(t+1)]^2 \\ &= \min \end{aligned}$$

可以看出, 只有 $\bar{m}(t+1) = e(t+1)$ 时, 预测误差的方差才能最小, 则有

$$\begin{aligned} \hat{m}(t+1) &= (c-a) \sum_{i=0}^t (-c)^{t-i} m(i) + \\ &\quad (-c)^{t+1}(m(0) - e(0)) \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)为最小方差递推预测模型。由式(8)可得

$$\hat{m}(t+1) + c\hat{m}(t) = (c-a)m(t) \quad (17)$$

由式(11)可得

$$\hat{m}(t+2) + c\hat{m}(t+1) = a(a-c)m(t) \quad (18)$$

将式(16)变形, 写成

$$\begin{aligned} \hat{m}(t+1) &= (c-a)m(t) + \\ &\quad (c)[(c-a) \sum_{i=0}^{t-1} (-c)^{t-1-i} m(i) + \\ &\quad (-c)^t(m(0) - e(0))] \end{aligned}$$

再将式(16)回退一步, 即考虑 $k=t-1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \hat{m}(t) &= (c-a) \sum_{i=0}^{t-1} (-c)^{t-1-i} m(i) + \\ &\quad (-c)^t(m(0) - e(0)), \end{aligned}$$

结合 $\hat{m}(t)$ 考虑 $\hat{m}(t+1)$, 则有

$$\hat{m}(t+1) = (c-a)m(t) - c\hat{m}(t) \quad (19)$$

比较式(17), (18)和(19), 可以看出, 递推预测模型属于一步预测; 三式都以 k 为时间变量, 都以 a 和 c 为常数, 可按一定方法解出。

考查观测序列

$$m = \{m(1), m(2), \dots, m(t)\}$$

取 $m(i)$ 为基本量, 其值可为观测序列的均值、中位数或任一观测值, 观测序列各元素与基本量的差值构成机动量序列的元素 ($w(t) = m(t) - m(i)$), 则有 $w = \{w(1), w(2), \dots, w(t)\}$ 。

根据机动量序列各元素的概率分布, 解出 a, c 系数, 进而得到实用的预测模型。

2 预测精度的分析与预测模型的优化

预测模型的优劣表现为预测精度的高低, 它直接影响到对岩土工程未来的变形做出正确判断和决策。因此, 需要对预测值的精度进行分析, 不断优化预测模型, 使之保持较高的预测精度。

2.1 预测精度的分析

预测精度的高低, 主要表现在预测值与观测值的接近程度。分析预测精度的方法有多种, 本文采用关联度分析^[9, 10]的方法。

关联度分析是分析预测值与观测值关联程度量化的方法, 其数学理论的实质就是将无限收敛用近似收敛取代, 将无限空间的问题用有限序列的问题取代。其基本思想是根据预测曲线与系统的行为曲线(实测曲线)的吻合程度来判断二者的关联程度, 若二者形状相似, 且很接近, 则说明二者关联度大, 预测精度高, 预测值可靠; 否则说明预测精度低, 预测值不可靠。两曲线的吻合程度还可用实测序列与预测序列关联度的大小来说明。

设 m 为实测序列, $\hat{m}$ 为预测序列, 两序列经初值化(各序列元素都除以相应序列的第一项)分别得到 x_0 和 x 两个序列, 然后求级差(两初值化后序列中相应元素的差的绝对值, 即

$$\Delta(k) = |x_0(k) - x(k)|$$

得级差序列 Δ 。再求实测曲线和预测曲线在第 k 点的关联系数 $\xi(k)$, 有

$\xi(k) = (\text{级差序列中的最小值} + \rho \times \text{级差序列中的最大值}) / (\Delta(k) + \rho \times \text{级差中的最大值})$,

式中 ρ 为分辨系数, 常取 $\rho = 0.5$ 。

最后求预测曲线与实测曲线的关联度 γ ,

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi(k) \quad (20)$$

式中 γ 值在 0~1.0 之间变化, 若 $\gamma > 0.5$, 则说明关联度大, 预测精度较好。

2.2 预测模型的优化

随着时间的推移, 预测模型会发生老化, 预测值可能会较大幅度地偏离实测值, 预测精度大大降低。预测模型老化的主要原因是实测序列中部分元素所含信息陈旧, 致使预测精度降低。要使预测模型保持较高的预测精度, 需及时对模型更新优化, 其措施是改变 $m(0)$ 的取值或去掉所含信息陈旧的元素, 组成新的实测序列, 使预测模型得到优化。

3 应用实例

某基坑深 12 m, 开挖前用钢筋混凝土桩作支护, 以保证相邻建筑物的安全。在基础施工期间对护坡桩进行了沉降观测, 随着基础的升高每天用二等水准测量观测一次。一个半月后基础施工完毕。观测结束。在观测期间对 24 个桩进行了沉降观测, 用最小方差预测方法进行了沉降变形预测。

在上述的预测模型中, 递推预测模型实际上属于一步预测模型, 其预测结果与一步预测模型预测结果一致; 二步预测模型因预测跨距较大, 预测精度稍差, 故本例采用递推预测模型进行预测。由于各变形点的机动量概率的取值为近似的标准正态分布, 解求出 $a = -1, c = 1$, 则各点的递推预测模型为

$$\hat{m}(k+1) = 2 \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} m(i) + (-1)^{k+1} m(0)$$

在预测过程中不断对预测模型更新优化, 现将实测数据与预测数据(部分)列于表 1。

精度分析采用关联度分析, 预测结果令人满意(见表 2)。模型更新优化前后的预测曲线与实测曲线的比较(以 T_{01} 点为例)如图 1 所示。

再用 $GM(1, 1)$ ^[3] 模型进行预测, 将其预测结果与最小方差预测结果进行比较(鉴于篇幅所限, 仅将 T_{03} 点的结果列于表 3)。由表 3 可以看出, 二者的预测精度基本相同, 但在实际建模过程中, 灰色预测 $GM(1, 1)$ 模型建立要比最小方差预测模型建立复杂得多。

4 结语

通过以上的研究分析, 得出以下几点看法:

1) 用最小方差预测法预测岩土工程变形, 计算简单, 模型更新优化快捷, 可操作性强, 预测精度可靠。

2) 最小方差预测法是以观测资料为根据, 以

表 1 各期沉降观测值和预测值

Table 1 Surveying and forecasting values of settlement

Point	Value type	Period/ d											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_{01}	Measuring value/ mm	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.05	0.07	0.09	0.11	0.07	0.09	0.05
	Forecasting value/ mm	0.08	0.07	0.09	0.07	0.06	0.08	0.08	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
T_{02}	Measuring value/ mm	0.08	0.08	0.10	0.10	0.08	0.08	0.12	0.08	0.08	0.12	0.08	0.10
	Forecasting value/ mm	0.08	0.09	0.10	0.09	0.08	0.10	0.10	0.08	0.10	0.10	0.09	0.09
T_{03}	Measuring value/ mm	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.07	0.05	0.09	0.08	0.08	0.10
	Forecasting value/ mm	0.06	0.06	0.06	0.05	0.07	0.07	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09	0.09
T_{04}	Measuring value/ mm	0.07	0.07	0.09	0.05	0.09	0.09	0.07	0.09	0.09	0.09	0.09	0.11
	Forecasting value/ mm	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.10	0.09

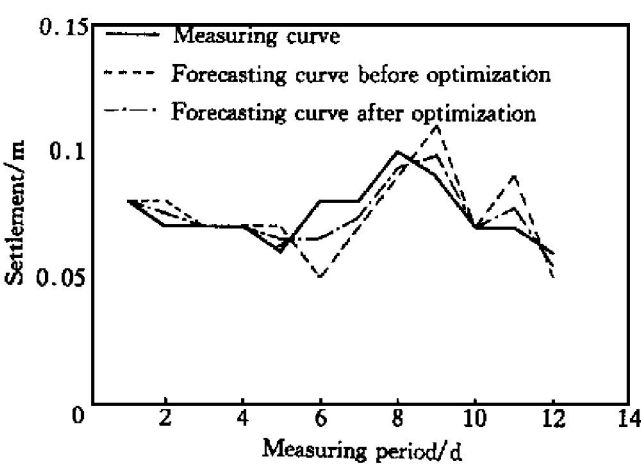


图 1 模型优化前后的预测曲线

Fig. 1 Forecasting curves before and after model being optimized

表 2 各测点的关联度

Table 2 Relation of different points

Point	T_{01}	T_{02}	T_{03}	T_{04}
Relation	0.545	0.636	0.700	0.648
Point	T_{05}	T_{06}	T_{012}	T_{014}
Relation	0.511	0.778	0.664	0.583

差分模型为基础,以预测误差平方的数学期望等于最小为准则建立起来的预测模型,差分模型和预测模型可因不同预测对象而改变,但预测准则不变。

3) 在预测过程中应注意对预测模型更新优化,以保持较高的预测精度。

4) 将预测值与实际情况相结合,就可判断出施工或使用中的工程能否出现危及工程质量或生命安全的变形,能及早采取有效的补救措施,做到防患于未然,减少经济损失。

表 3 最小方差预测与灰色预测结果的比较

Table 3 Comparison between results of least square error forecasting and grey forecasting

Point	Value type	Period/ d				
		1	2	3	4	5
T_{03}	Measuring value/ mm	0.06	0.06	0.06	0.05	0.07
	Forecasting value by least square error/ mm	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07
	Forecasting value by $GM(1, 1)$ / mm	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
Point	Value type	Period/ d				
		6	7	8	9	10
T_{03}	Measuring value/ mm	0.07	0.06	0.07	0.07	0.08
	Forecasting value by least square error/ mm	0.07	0.07	0.05	0.09	0.08
	Forecasting value by $GM(1, 1)$ / mm	0.07	0.06	0.07	0.08	0.07

[REFERENCES]

[1] LI Xing-ya(李兴亚) and XIONG Qian(熊乾). 天津塘沽广联商城深基坑支护工程事故分析及处理 [J]. Railway Construction Technology (铁道建筑技术), 1999(6): 30– 32.

[2] CHEN Yong-qi(陈永奇). Treating Datum of Surveying Distortion(变形观测数据处理) [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1988. 1– 13.

[3] DENG Jurlong(邓聚龙). Grey Forecasting and Decision (灰色预测与决策) [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1988. 87– 94.

[4] PAN Guorong(潘国荣) and WANG Suirhui(王穗辉). 建筑物动态变形的模型辨识与预测 [J]. Acta Deodaetica et Cartographica Sinica(测绘学报), 1999, 28: 340– 344.

- [5] LIU Hua-heng(刘怀恒). Forecasting and Surveying of Geotechnical Engineering(岩石工程预测与监控) [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1990. 1– 105.
- [6] MA Li(马莉) and WANG Guo-hui(王国辉). 灰色系统理论在滑坡预测中的应用 [J]. Industrial Construction(工业建筑), 1995(7): 14– 17.
- [7] ZHANG You-wei(张有为). Mathematical Methods of Forecasting(预测的数学方法) [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1991. 130– 134.
- [8] YU Zong-chou(於宗俦) and LU Cheng-lin(鲁成林). Basic of Surveying Adjustment(测量平差基础) [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1984. 19– 26.
- [9] YUE Jian-ping(岳建平) and ISCARL Woxiul(艾斯卡尔·吾秀尔). 安全监测数据关联分析方法研究 [J]. Bulletin of Surveying and Mapping(测绘通报), 1999(4): 11– 13.
- [10] YIN Jun(尹军), ZHANG Yan(张琰), DING Jiong-wang(丁窘轲), et al. 多因子关联度分析模型及其同步预测的新方法 [J]. Bulletin of Surveying and Mapping(测绘通报), 1999(6): 12– 14.

Forecasting geotechnical engineering distortion with least square error forecasting method

WANG Guo-hui, MA Li, YANG Teng-feng, HOU Yong-hui, LI Wei-guo
(Department of Traffic Engineering, Shijiazhuang Railway Institute,
Shijiazhuang 050043, P. R. China)

[Abstract] A method for forecasting geotechnical engineering distortion by applying the least square error forecasting theory was presented, and the model optimization was studied. In real application, modelling is more simple and easier, and model optimizing is faster than other forecasting methods. The method can get better forecasting precision.

[Key words] least square error forecasting; forecasting distortion; model optimized

(编辑 何学锋)