

文章编号: 1004-0609(2004)12-2029-06

具有抛物线型强度包络线的 双剪双参数统一强度准则改进式及其应用^①

胡小荣

(福州大学 土木建筑工程学院, 福州 350002)

摘 要: 通过应力莫尔圆分析发现, 现有的双剪双参数统一强度准则在形式上可看成是对具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度准则的改进, 适用于对具有线性强度包络线的岩石作力学分析。对具有抛物线型强度包络线的岩石, 通过对现有的双剪双参数统一强度准则作相应的非线性化处理, 导出了具有该类型强度包络线的双剪双参数统一强度准则改进式, 改进式可用于对承受高压的硬岩和软岩作强度分析。另外, 还应用改进式对静水压力条件下圆形巷道围岩作了弹塑性分析。

关键词: 双剪双参数统一强度准则; 抛物线型强度包络线; 巷道围岩; 弹塑性分析

中图分类号: TU 4

文献标识码: A

Improvement of two-parameter twin shear unified failure criterion with parabolic failure envelope and its application in elasto-plastic analysis on wall rock around tunnel

HU Xiao-rong

(School of Civil Engineering and Architecture, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: The Mohr circle comparisons show that the two-parameter twin shear unified failure criterion used now has the linear type of the failure envelope as the same as the Mohr-Coulomb strength theory, and it is applicable to the rock with the linear type of the failure envelope. For rock with the parabolic form of the failure envelope, the nonlinear improved expression of the two-parameter twin shear unified failure criterion was given out, and this improved failure criterion could be used to analyze the hard rock bearing high pressure and the soft rock which failure envelopes usually take the form of parabolic. In spite of the above work, the elasto-plastic analysis with this new improved failure criterion is applied to the wall rock around the tunnel with circular cross-section under the static hydraulic pressures.

Key words: two-parameter twin shear unified failure criterion; parabolic failure envelope; wall rock around tunnel; elasto-plastic analysis

大量的岩石三轴实验已经证明, 岩石的强度和破坏不仅与最大和最小主应力有关, 还与中间主应力密切相关, 即存在所谓的中间主应力效应^[1-6]。与单剪类强度准则如 Mohr-Coulomb 强度准则、Hoek-Brown 强度准则等相比, 俞茂宏等^[7-11]提出

的双剪双参数统一强度准则可以线性地描述这种实验现象, 并在巷道围岩和压力隧洞的弹塑性分析中得到了一定的应用^[12-14]。本文作者的研究分析表明, 现有的双剪双参数统一强度准则在形式上可看成是具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度

① 基金项目: 福建省教育厅科技三项基金资助项目(K04009)

收稿日期: 2004-05-19; 修订日期: 2004-09-21

作者简介: 胡小荣(1964-), 男, 教授, 博士。

通讯作者: 胡小荣, 教授; 电话: 0591-28306442; E-mail: jxhxr@fzu.edu.cn

理论的改进。虽然线性强度包络线具有表达式简单、便于应用的优点,但对于岩石工程中承受高压的硬岩和软岩而言,其强度包络线通常为抛物线型,如果仍采用具有线性强度包络线的破坏准则,可能会引起较大的计算误差^[15]。为了拓宽双剪双参数统一强度准则的适用范围,本文作者首先对 Mohr-Coulomb 强度准则和现有的双剪双参数统一强度准则作了比较,发现两者的差别只是 σ - τ 平面上破坏应力莫尔圆的作法有所不同,而采用的强度包络线则是完全相同的,且均为直线型。因此,若要将双剪双参数统一强度准则用于分析具有非线性强度包络线的岩石,就需根据包络线的形式将现有的双剪双参数统一强度准则作相应的非线性化处理,从而得出与该类型强度包络线相适应的双剪双参数统一强度准则改进式。本文作者针对抛物线型强度包络线对双剪双参数统一强度准则作了改进,并将改进式用于对静水压力条件下圆形巷道围岩的弹塑性分析。

1 现有双剪双参数统一强度准则分析

现有的双剪双参数统一强度准则表达式为^[10, 11]

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\alpha\sigma_1 + \sigma_3}{1 + \alpha} \text{ 时,} \\ \alpha\sigma_1 - \frac{b\sigma_2 + \sigma_3}{1 + b} = \sigma_t \quad (1)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\alpha\sigma_1 + \sigma_3}{1 + \alpha} \text{ 时,} \\ \frac{\alpha}{1 + b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_t \quad (2)$$

式中 α 为材料单轴抗拉抗压强度比; σ_t 为材料的单轴抗拉强度; b 为取值 $[0, 1]$ 的参数。对于岩石材料而言,上式用内聚力 C_0 和内摩擦角 φ 表示则为

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \text{ 时,} \\ \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \frac{b\sigma_2 + \sigma_3}{1 + b}(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi \quad (3)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \text{ 时,} \\ \frac{\sigma_1 + b\sigma_2}{1 + b}(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi \quad (4)$$

对于式(3)和(4),若令

$$\sigma'_1 = \frac{\sigma_1 + b\sigma_2}{1 + b}, \\ \sigma'_3 = \frac{b\sigma_2 + \sigma_3}{1 + b} \quad (5)$$

则

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \text{ 时,} \\ \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma'_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi \quad (6)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \text{ 时,} \\ \sigma'_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi \quad (7)$$

由于式(6)和(7)都有类似于以下 Mohr-Coulomb 强度准则的表达式:

$$\sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi \quad (8)$$

因此,如果将式(8)中的 σ_1 、 σ_3 分别换成式(6)和(7)中的 σ'_1 、 σ'_3 则可看出,现有的双剪双参数统一强度准则在形式上可看成是对具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度理论的改进,采用的强度包络线仍为直线型,只是破坏应力莫尔圆的作法有所不同(图 1)。

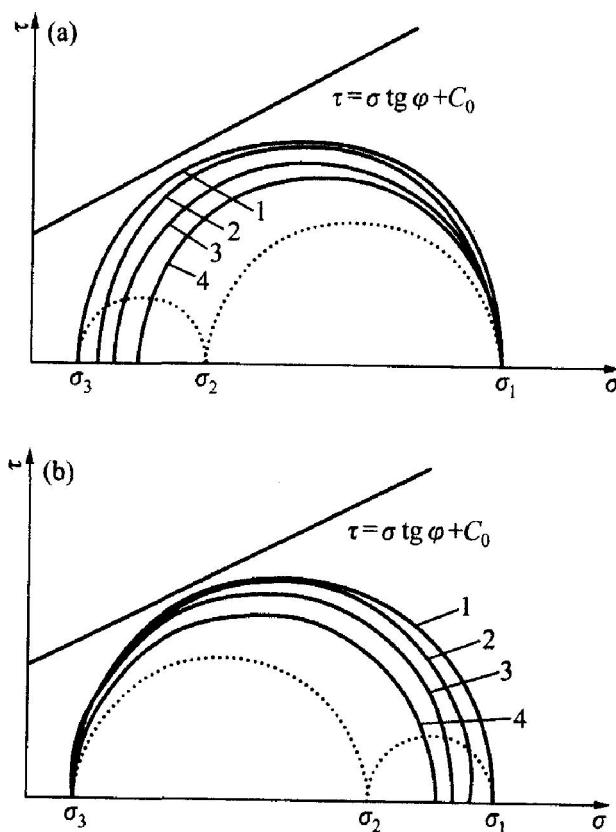


图 1 现有双剪双参数统一强度准则所采用的强度包络线和破坏应力莫尔圆

Fig. 1 Failure envelope and Mohr circles of two-parameter twin shear unified criterion used now

- (a) $-\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi$;
 (b) $-\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi$
 (Circle 1— $b=0$; Circle 2— $b=1/3$;
 Circle 3— $b=2/3$; Circle 4— $b=1$)

2 具有抛物线型强度包络线的双剪统一强度准则改进式

抛物线型岩石强度包络线如图 2 所示。

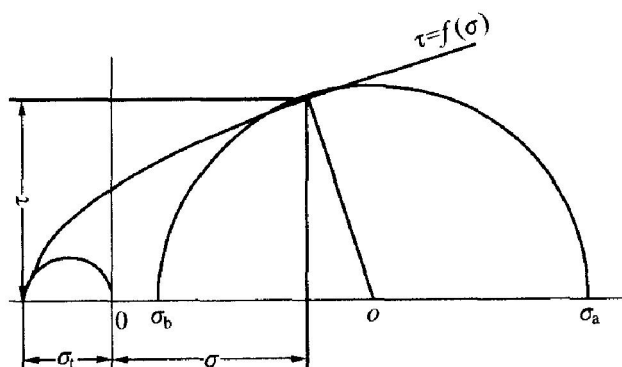


图 2 抛物线型岩石强度包络线

Fig. 2 Parabolic failure envelope of rock

其一般方程式为^[15]

$$|\tau|^2 = \lambda(\sigma + \sigma_1) \quad (9)$$

式中 λ 为待定正常数, 由实验求出, 若采用单轴压缩实验确定时, 其值为

$$\lambda \approx \frac{\sigma_c^2}{2(\sigma_c + 2\sigma_1)} \quad (10)$$

式中 σ_c 为材料单轴抗压强度。式(9)的主应力表达式为^[15]

$$\left| \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \right|^2 = \lambda \left| \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} \right| + B \quad (11)$$

式中 σ_a 、 σ_b 分别为破坏应力莫尔圆与 σ 轴的交点, 且 $\sigma_a > \sigma_b$; $B = \lambda\sigma_1 - \frac{\lambda^2}{4}$ 。对于具有抛物线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 准则改进式而言, 有 $\sigma_1 = \sigma_a$, $\sigma_3 = \sigma_b$ 。同理, 若将式(11)中的 σ_a 、 σ_b 分别用式(5)中 σ'_1 、 σ'_3 替换并利用双剪双参数统一强度准则中原有的限制条件, 可得出具有抛物线型强度包络线的双剪双参数统一强度准则改进式为

当 $\sigma_2 \leq \frac{\alpha\sigma_1 + \sigma_3}{1 + \alpha}$ 时,

$$\left| \frac{(1+b)\sigma_1 - b\sigma_2 - \sigma_3}{2(1+b)} \right|^2 = \lambda \left| \frac{(1+b)\sigma_1 + b\sigma_2 + \sigma_3}{2(1+b)} \right| + B \quad (12)$$

当 $\sigma_2 \geq \frac{\alpha\sigma_1 + \sigma_3}{1 + \alpha}$ 时,

$$\left| \frac{\sigma_1 + b\sigma_2 - (1+b)\sigma_3}{2(1+b)} \right|^2 = \lambda \left| \frac{\sigma_1 + b\sigma_2 + (1+b)\sigma_3}{2(1+b)} \right| + B \quad (13)$$

3 双剪双参数统一强度准则改进式在巷道围岩弹塑性分析中的应用

为获得解析解, 本文只研究静水压力条件下圆形巷道围岩的弹塑性力学分析问题。

3.1 应力状态分析

静水压力条件下圆形断面巷道围岩的弹塑性力学分析可以看成是平面应变问题, 若采用 Mohr-Coulomb 强度理论, 就只能考虑到巷道断面上径向应力 σ_r 和切向应力 σ_θ 的作用, 而采用双剪双参数统一强度理论, 则可以同时考虑到上述 2 个应力及巷道围岩轴向应力 σ_z 的作用。由于 σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 三者相互正交, 可以认为是 3 个主应力。假定塑性区围岩体应变 $\varepsilon_v = 0$, 则塑性区内的径向应力 $\sigma_r^{(p)}$ 、切向应力 $\sigma_\theta^{(p)}$ 和轴向应力 $\sigma_z^{(p)}$ 存在以下关系^[12, 13]:

$$\sigma_z^{(p)} = \frac{1}{2}(\sigma_r^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}) \quad (14)$$

由于在巷道周边围岩中, 切向应力 $\sigma_\theta^{(p)}$ 最大, 径向应力 $\sigma_r^{(p)}$ 最小, 对于岩石而言, 通常有 $\alpha < 1$ 。因此, 由上式可知, 在塑性区内 3 个主应力的大小为 $\sigma_1 = \sigma_\theta^{(p)}$, $\sigma_2 = \sigma_z^{(p)}$, $\sigma_3 = \sigma_r^{(p)}$, 且满足 $\sigma_2 \geq \frac{\alpha\sigma_1 + \sigma_3}{1 + \alpha}$ 的条件, 故在进行塑性区应力计算时, 应采用强度准则改进式(13)。将式(14)代入式(13)得

$$\left| \frac{(2+b)(\sigma_\theta^{(p)} - \sigma_r^{(p)})}{4(1+b)} \right|^2 = \lambda \left| \frac{(2+b)\sigma_\theta^{(p)} + (2+3b)\sigma_r^{(p)}}{4(1+b)} \right| + B \quad (15)$$

$$\text{令 } \frac{(2+b)\sigma_\theta^{(p)} + (2+3b)\sigma_r^{(p)}}{4(1+b)} = s, \text{ 则有}$$

$$\frac{(2+b)(\sigma_\theta^{(p)} - \sigma_r^{(p)})}{4(1+b)} = (\lambda + B)^{1/2}$$

解之得

$$\sigma_r^{(p)} = s - (\lambda + B)^{1/2} \quad (16)$$

$$\sigma_\theta^{(p)} = s + \frac{2+3b}{2+b}(\lambda + B)^{1/2} \quad (17)$$

3.2 塑性区应力

不考虑体积力时, 平面应变问题的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r^{(p)}}{\partial r} + \frac{\sigma_r^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{r} = 0 \quad (18)$$

将式(16)和(17)代入式(18), 得

$$\left[1 - \frac{\lambda}{2}(\lambda + B)^{-1/2} \right] \frac{ds}{dr} -$$

$$\frac{4(1+b)(\lambda+B)^{1/2}}{(2+b)r} = 0$$

解之得

$$r = (\lambda + B)^{-\frac{2+b}{8(1+b)}} \cdot \exp \left[\frac{2+b}{2(1+b)\lambda} (\lambda + B)^{1/2} - \frac{2+b}{4(1+b)} C \right] \quad (19)$$

将边界条件: $r = r_0$, $\sigma_r^{(p)} = p_i$ (r_0 为巷道半径, p_i 为巷道支护力)代入式(16)可得

$$s_0 = p_i + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\lambda(p_i + \sigma_i)} \quad (20)$$

代入式(19)求出待定常数 C , 最后得

$$r = r_0 \left[\frac{\lambda_0 + B}{\lambda + B} \right]^{\frac{2+b}{8(1+b)}} \cdot \exp \left[\frac{2+b}{2(1+b)\lambda} [(\lambda + B)^{1/2} - (\lambda_0 + B)^{1/2}] \right] \quad (21)$$

式(21)结合式(14)、(16)、(17)即可求出塑性区内应力分布,其方法是先给定一个 s , 再分别由 4 式求出相应的 r 、 $\sigma_\theta^{(p)}$ 、 $\sigma_r^{(p)}$ 、 $\sigma_z^{(p)}$ 。

3.3 塑性区半径及巷道周边围岩径向位移

静水压力条件下,塑性区边界 $r = R_0$ 处的径向应力 $\sigma_r^{(p)}_{R_0}$ 和切向应力 $\sigma_\theta^{(p)}_{R_0}$ 与原岩应力 P 存在以下关系^[16]:

$$\sigma_r^{(p)}_{R_0} + \sigma_\theta^{(p)}_{R_0} = 2P \quad (22)$$

结合式(16)、(17)得

$$s_{R_0} = P + \left[\frac{b}{2+b} \right]^2 \frac{\lambda}{2} + \frac{b}{2+b} \sqrt{\lambda(P + \sigma_i) - \frac{(b+1)\lambda^2}{(2+b)^2}} \quad (23)$$

将式(23)代入式(21)得塑性区半径 R_0 为

$$R_0 = r_0 \left[\frac{\lambda_0 + B}{\lambda_{R_0} + B} \right]^{\frac{2+b}{8(1+b)}} \cdot \exp \left[\frac{2+b}{2(1+b)\lambda} [(\lambda_{R_0} + B)^{1/2} - (\lambda_0 + B)^{1/2}] \right] \quad (24)$$

将式(20)代入式(24)可得塑性区半径 R_0 与支护力 p_i 的关系,将式(23)代入式(16)、(17)可得弹塑性区边界处的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)}_{R_0} &= s_{R_0} - (\lambda_{R_0} + B)^{1/2}, \\ \sigma_\theta^{(p)}_{R_0} &= s_{R_0} + \frac{2+3b}{2+b} (\lambda_{R_0} + B)^{1/2} \end{aligned} \quad (25)$$

弹塑性区边界处围岩的径向位移为

$$u_{R_0} = \frac{(P - \sigma_r^{(p)}_{R_0}) R_0}{2G} \quad (26)$$

式中 G 为剪切模量。若塑性区围岩体应变 $\varepsilon_v = 0$, 则巷道周边围岩径向位移为

$$u = \frac{(P - \sigma_r^{(p)}_{R_0}) R_0^2}{2Gr_0} \quad (27)$$

3.4 弹性区应力及围岩径向位移

对于 $r \geq R_0$ 处的弹性区围岩,其应力及径向位移的计算方法和公式不变^[16]:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(e)} &= P \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right) + \sigma_r^{(p)} \frac{R_0^2}{r^2} \\ \sigma_r^{(e)} &= P \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) - \sigma_r^{(p)} \frac{R_0^2}{r^2} \\ u_r^{(e)} &= \frac{(P - \sigma_r^{(p)}) R_0^2}{2Gr} \end{aligned} \quad (28)$$

3.5 结果分析

图 3 所示为根据如下参数: $\sigma_c = 102$ MPa, $\sigma_t = 43$ MPa, $P = 300$ MPa, $r_0 = 2$ m 所得的计算结果。由图可以看出,围岩径向应力随着 b 增大而增大;切向应力在塑性区随着 b 增大而增大,在弹性区随着 b 增大而减小;塑性区半径和巷道周边围岩径向位移随着 b 增大而减小;弹塑性区边界处的围岩径向应力及切向应力均随着 b 增大而增大。

4 结论

1) 现有的双剪双参数统一强度准则可以看成是对具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度准则的改进,且改进只体现在应力莫尔圆的作法上。

2) 对于强度包络线为非线性的情况,可根据具体的强度包络线形式,通过对双剪双参数统一强度准则作相应的非线性化处理得出其改进式。

3) 针对抛物线型强度包络线对现有的双剪双参数统一强度准则作了改进,并应用强度准则改进式对静水压力条件下的圆形巷道围岩进行了弹塑性分析,表明巷道围岩的轴向应力和强度准则中的参数 b 对巷道围岩塑性区半径、应力分布及径向位移等均有影响。

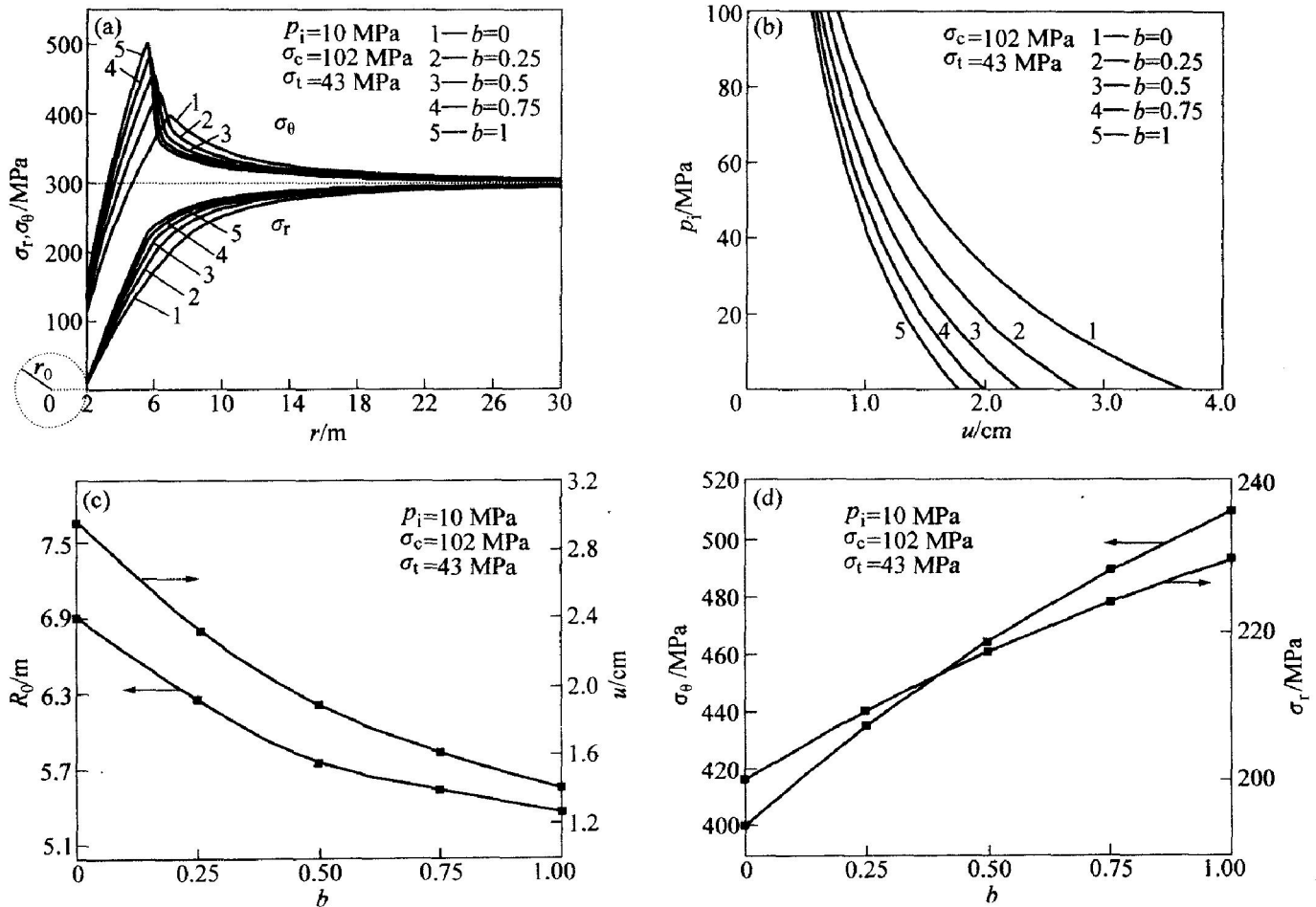


图 3 巷道围岩弹塑性分析结果

Fig. 3 Elastoplastic results for wall rock

(a) —Influences of b on distribution of stresses acting on wall rock;(b) —Influences of b on p_i-u curve;(c) —Influences of b on radius R_0 of plastic zone and displacement u of wall rock around tunnel(d) —Influences of b on stresses acting on interface between elastic and plastic zones

REFERENCES

- [1] Mogi K. Effect of intermediate principal stress on rock failure[J]. J Geophys Res, 1967, 72: 5117 - 5131.
- [2] Mogi K. Failure and flow of rocks under high triaxial compression[J]. J Geophys Res, 1971, 76: 1255 - 1269.
- [3] Michelis P. Polyaxial yielding of granular rock[J]. J Eng Mech ASCE, 1985, 111(18): 1049 - 1066.
- [4] 张金涛, 林天健. 三轴实验中岩石的应力状态和破坏性质[J]. 力学学报, 1979(2): 99 - 105.
ZHANG Jin-tao, LIN Tian-jian. Stress conditions and variations of rupture characteristics of a rock as shown by triaxial test[J]. Acta Mechica Sinica, 1979(2): 99 - 105.
- [5] 许东俊, 耿乃光. 岩石强度随中间主应力的变化规律[J]. 固体力学学报, 1985, 6(1): 72 - 80.
XU Dong-jun, GENG Nai-guang. The variation law of

rock strength with increase of intermediate principal stress [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1985, 6(1): 72 - 80.

- [6] 李小春, 许东俊. 双剪应力强度理论的试验验证-拉西瓦花岗岩强度特性的真三轴实验研究[R]. 岩土报告(90)52号, 武汉: 中科院武汉岩土所, 1990.
LI Xiao-chun, XU Dong-jun. Experimental Verification of the Twin Shear Theory-True Triaxial Test Research of Strength of Lawaxi Granite[R]. Research Report (Rock and Soil) (90) 52, Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Science, 1990.
- [7] 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪强度理论及其推广[J]. 中国科学(A辑), 1985, 28(12): 1113 - 1120.
YU Mao-hong, HE Li-nan, SONG Ling-yu. Twin shear theory and its generalization[J]. Scientia Sinica (Series A), 1985, 28(12): 1113 - 1120.
- [8] 俞茂宏, 刘凤羽. 一个新的普遍形式的强度理论[J]. 土木工程学报, 1990, 23(1): 34 - 40.

- YU Mao-hong, LIU Feng-yu. A new general strength theory[J]. China Civil Engineering Journal, 1990, 23(1): 34 - 40.
- [9] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1 - 10.
- YU Mao-hong. Unified strength and its application for rock and soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2): 1 - 10.
- [10] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- YU Mao-hong. Twin Shear Theory and Its Application [M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [11] YU Mao-hong. Unified Strength Theory and Its Applications[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [12] 胡小荣, 俞茂宏. 统一强度理论及其在巷道围岩弹塑性分析中的应用研究[J]. 中国有色金属学报, 2002, 12(5): 1021 - 1026.
- HU Xiao-rong, YU Mao-hong. Unified strength theory and its application in elastoplastic analysis to tunnel[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2002, 12(5): 1021 - 1026.
- [13] 徐栓强, 俞茂宏, 胡小荣. 基于双剪统一强度理论的地下圆形洞室稳定性的研究[J]. 煤炭学报, 2003, 28(5): 522 - 526.
- XU Shuang-qiang, YU Mao-hong, HU Xiao-rong. The stability analysis of circular tunnel based on twin shear unified strength theory[J]. Journal of China Society, 2003, 28(5): 522 - 526.
- [14] 宋 俐, 张永强, 俞茂宏. 压力隧洞弹塑性分析的统一解[J]. 工程力学, 1998, 15(4): 57 - 61.
- SONG li, ZHANG Yong-qiang, YU Mao-hong. Plastoelastic unified analysis of pressure tunnel[J]. Engineering Mechanics, 1998, 15(4): 57 - 61.
- [15] 赵彭年. 松散介质力学[M]. 北京: 地震出版社, 1995.
- ZHAO Peng-nian. Mechanics of Loose Medium[M]. Beijing: Earthquake Press, 1995.
- [16] 于学馥, 郑颖人, 刘怀恒, 等. 地下工程围岩稳定分析[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1983.
- YU Xue-fu, ZHENG Ying-ren, LIU Hua-heng, et al. Stability Analysis on Rock-Wall in Underground Engineering[M]. Beijing: China Coal Industry Press, 1983.
- (编辑 李向群)