

文章编号: 1004-0609(2005)07-1149-06

采用界面速度追踪法数值模拟多维凝固问题^①

吴兆春, 刘英学, 苑安民

(上海应用技术学院 环境与能源工程系, 上海 200235)

摘 要: 根据运动学的观点, 提出了一种通过追踪计算移动界面的速度获得相变区域, 从而进行多维凝固问题计算的方法。同时提出了一种将不同时刻计算所得移动界面坐标作为网格节点, 由此产生随时间逐步形成的新的网格生成方法, 避免了针对具有移动界面问题计算而产生的整体网格变动的问题。借助该新型网格的划分方法, 结合有限元计算, 完成相变区域内温度场的计算。该方法计算过程较为简便, 计算实例表明, 一些特定位置处的界面位移规律与一维理论解是一致的。

关键词: 多维凝固问题; 界面速度追踪; 数值模拟

中图分类号: TK 124; TG 244; TG 249.7

文献标识码: A

Interface velocity-tracking numerical simulation method for multidimensional solidification problems

WU Zhao-chun, LIU Ying-xue, YUAN An-min

(Department of Environmental and Energy Engineering,
Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

Abstract: A new approach to multidimensional one-phase solidification problems is presented. In contrast to other methods, special attention is paid to finding the velocity of moving interface so as to obtain phase-change domain. Meanwhile, a special mesh generation technique is used. In proposed method, special procedures, such as iterative process, transformation of governing equation or interpolation are not required, so the numerical method becomes quite simple and is capable of dealing with solidification problems under complicated boundary conditions. By special designed examples, the numerical results show that motion patterns at some special locations are in agreement with the analytical solution.

Key words: multidimensional solidification problem; interface velocity-tracking; numerical simulation

凝固过程的研究对于铸件、结晶器内金属的凝固厚度、凝固时间等参数的确定具有重要意义。凝固过程与物体的传热过程具有紧密的联系, 一般将其归类为 Stefan 问题。由于这类问题包含随时间变化的区域, 待定的边界也是求解的一部分, 使问题具有很强的非线性, 给计算过程带来极大的困难。目前仅有的几种多维问题的近似计算方法^[1~4] (相关综述可参见文献[5, 6]), 其或需要采用插值过程,

或涉及控制方程的转换, 或需要采用复杂的网格系统, 计算过程过于复杂且不便应用。有的采用了过多的假设和近似, 例如目前凝固技术应用较为普遍的等价比热法、热焓法^[4, 7~16], 其或引入了固相率的概念, 或将移动界面上释放的潜热转化为因单位体积、单位时间固相率的增加而释放的内热源, 且固相率的获得依靠经验或假设。本文作者认为, 将移动界面上释放的潜热转化为均匀内热源与实际物

① 基金项目: 上海市教委科技发展基金资助项目(040B08)

收稿日期: 2005-01-14; 修订日期: 2005-05-09

作者简介: 吴兆春(1958-), 副教授, 博士研究生。

通讯作者: 吴兆春, 副教授; 电话: 021-64945003; E-mail: shwzc@sohu.com

理过程不符,预先给定固相率等价于预先给定移动界面上的传热速率或界面位移速度,而这应是与凝固传热过程一道求解的结果,也是这类问题呈现强非线性原因。此外,该类计算方法并不能直接获得任意时刻移动界面的位置坐标。作者以运动学的观点,提出一种多维单相凝固问题的近似计算方法,即通过追踪移动界面上的速度来计算界面的位移,由此获得所形成的相变区域。同时,将不同时刻计算所得移动界面坐标作为网格节点,由此产生一种随时间逐步形成的网格生成方法。借助该网格的划分,利用有限元方法,完成相变区域内温度场的计算,从而获得下一时刻移动界面上的位移速度及新的相变区域。这样,随着时间的推移,凝固区域不断扩大,网格逐步增加,而老的网格保持原状不变,这样既避免了网格的整体变动,又可获得固定节点(老网格节点)上的物理参数随时间的变化规律。通过一个特别设计的二维凝固过程数值模拟计算,结果表明,一些特定位置处的位移规律与一维理论解是相一致的。

1 凝固过程物理模型及计算方法

设区域内某种静止液体初始处于均匀的凝固(熔解)温度 θ_m , 则二维、单相凝固问题(见图 1)可描述为^[5]

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \nabla(k \nabla \theta), \quad \tau > 0, \quad r \in \Omega_1 \quad (1)$$

初始条件:

$$\tau = 0, \quad \theta = \theta_m, \quad r \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (2)$$

移动界面 $S(r, \tau) = 0$ 上:

$$\theta = \theta_m \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial n} = \rho_1 V_n \quad (4)$$

C_1, C_2, C_3 上可以是第一类、或第二类、或混合边界条件,例如取

$$C_1: \theta = \theta(r, \tau) \quad (5)$$

$$C_2: \frac{\partial \theta}{\partial n} = q(r, \tau) \quad (6)$$

$$C_3: -k \frac{\partial \theta}{\partial n} = h(\theta - \theta_\infty) \quad (7)$$

式中 c, k, ρ, ρ_1, h, q 分别为物体的比热容、导热系数、密度、潜热、对流换热系数和热流密度。 θ 和 θ_∞ 分别为凝固相物体的温度和环境温度; $\Omega_1, \Omega_2, n, r, V_n, S$ 分别为凝固侧、未凝固侧区域、表面外法线方向矢量、坐标矢径、界面法向移动速率和固-液移动界面。 X, Y, τ 分别为坐标和时间变量。

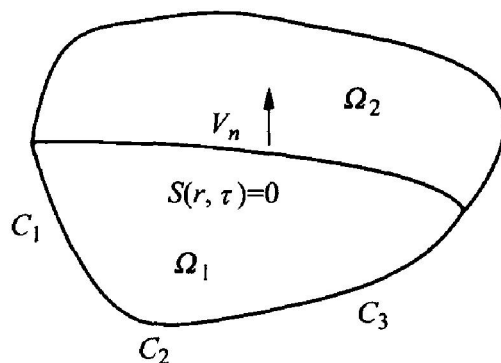


图 1 二维单相凝固问题的示意图

Fig. 1 Sketch of two-dimensional one-phase solidification problem

式(4)即为移动界面处的凝固放热与导热的热平衡方程。由于 V_n 是凝固界面法向移动速率,因此将其以运动学的观点改写为

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial X_b}{\partial \tau} = - \frac{k}{\rho_1} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{q_x}{\rho_1} \\ V_y &= \frac{\partial Y_b}{\partial \tau} = - \frac{k}{\rho_1} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{q_y}{\rho_1} \end{aligned} \quad (8)$$

式中 V_x, V_y 分别为凝固界面 X, Y 方向移动速率; X_b, Y_b 分别为移动界面坐标; q_x, q_y 分别为 X, Y 方向热流密度。

从式(1)~(8),可以注意到,并不存在用于计算固-液移动界面位置的微分方程,仅有的只是移动界面上速度与热流密度的关联式(4)(或式(8))。由此,本文作者将移动界面位置的计算作为一个导出量,而将目标集中于界面的移动速度(也即移动界面上热流密度)的确定。计算过程叙述如下。

1.1 温度场计算

由于形成的凝固界面是曲面,方程组(1)~(7)可采用变分等参有限元计算。其泛函为^[17]

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega_1} \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \\ &\quad \rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^0 \theta \Big| dX dY + I_b \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $I_b = \int_0^l \left(\frac{1}{2} h \theta^2 - h \theta_\infty \theta \right) dl - \int_0^l q \theta dl$; $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^0$ 为限制变分; l 为弧长。

采用四节点等参元离散式(9),其插值公式为: $\theta = N_i(\xi, \eta) \theta_i$ 。式中 e 代表某一有限单元内的函数; $N_i(\xi, \eta)$ 为插值型函数, $N_i = (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)/4$ (其中, ξ_i, η_i 为有限单元节点坐标)。

将泛函 I 对变量 θ_i 求极值,有

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_i} = \sum_e \frac{\partial I^e}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

式中 n 为节点总数。单元泛函 I^e 对变量 θ_i 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e}{\partial \theta_i} = & \iint_{\Omega_i} k \left[\left| \frac{\partial \theta}{\partial X} \right| \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left| \frac{\partial \theta}{\partial X} \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right| \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left| \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right| + \right. \\ & \left. \rho c \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^0 \frac{\partial \theta}{\partial \theta_i} \right] dX dY + \frac{\partial I_b^e}{\partial \theta_i} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^0$ 关于时间的变化率取向后差分, 即 $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^0 = \frac{\theta_\tau - \theta_{\tau-\Delta\tau}}{\Delta\tau}$ 。当边界条件不随时间而变时, 边界单元 I_b^e 对变量 θ_i 的求导为

$$\begin{aligned} \text{边界单元 } C_2: \frac{\partial I_b^e}{\partial \theta_i} &= \{f_2\}_i = - \int_{C_2} q N_i dl \\ \text{边界单元 } C_3: \frac{\partial I_b^e}{\partial \theta_i} &= \{f_3\}_i = \int_{C_3} h(\theta - \theta_\infty) N_i dl \end{aligned}$$

上述各式代入式(11)中可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e}{\partial \theta_i} = & (k_{ij}^e + \frac{1}{\Delta\tau} n_{ij}^e)(\theta)_\tau - \\ & \frac{1}{\Delta\tau} n_{ij}^e (\theta)_{\tau-\Delta\tau} + \{f\}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } k_{ij}^e &= \iint_{\Omega_i} k \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) dX dY; \\ n_{ij}^e &= \iint_{\Omega_i} \rho N_i N_j dX dY, \{f\}_i \text{ 取 } \{f_2\}_i \text{ 或 } \{f_3\}_i. \end{aligned}$$

由式(10)合成后可得

$$\left[[K] + \frac{1}{\Delta\tau} [N] \right] \{\theta\}_\tau = \frac{1}{\Delta\tau} [N] \{\theta\}_{\tau-\Delta\tau} + \{F\}_\tau \quad (12)$$

式中 $[K], [N]$ 为 k_{ij}^e, n_{ij}^e 的合成系数矩阵, $\{F\}$ 为与边界条件(单元)有关的、由 $\{f_2\}_i, \{f_3\}_i$ 合成而得的常向量, $\{\theta\}_\tau$ 为 τ 时刻温度向量。解出温度场后, 按

$$\begin{aligned} V_X = \frac{\partial X_b}{\partial \tau} = -\beta \frac{\partial \theta}{\partial X} = & -\frac{\beta}{|J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \theta, \\ V_Y = \frac{\partial Y_b}{\partial \tau} = -\beta \frac{\partial \theta}{\partial Y} = & -\frac{\beta}{|J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial \xi} \right) \theta \end{aligned} \quad (13)$$

算出移动界面上各节点速度。泛函(9)中计算区域

Ω_a 尚未确定。式中, $\beta = \frac{k}{\rho L}, |J| = \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)} \right|$ 雅可比值。

1.2 积分区域 Ω_a 的确定及网格的生成法

式(9)中积分区域 Ω_a 的确定及网格的生成采用的步骤如下。

1) 凝固过程开始于冷却表面边界。取时间步长 $\Delta\tau$ 足够小, 假设此时尚未发生凝固过程, 对整个区域按一般非稳态导热问题划分网格后计算, 解出温度场后按式(13)计算出冷却表面处各节点的初始移动速度 V_X^0, V_Y^0 , 按下式计算出对应冷却表面节点的第一时间步长内凝固移动界面的节点坐标

$$\begin{aligned} X_{bi}^1 &= X_{bi}^{j-1} + (V_X^{j-1})_{X_{bi}^{j-1}, Y_{bi}^{j-1}} \times \Delta\tau \\ Y_{bi}^1 &= Y_{bi}^{j-1} + (V_Y^{j-1})_{X_{bi}^{j-1}, Y_{bi}^{j-1}} \times \Delta\tau \\ i &= 1, 2, \dots, m_b \end{aligned} \quad (14)$$

式中 j 代表 $\tau = j\Delta\tau$ 时刻, $j = 1, 2, \dots, m_b$ 为冷却表面的节点数; X_{bi}^0, Y_{bi}^0 为冷却表面节点坐标, 计算出冷却表面节点的初始移动速度 V_X^0, V_Y^0 后, 该网格除冷却表面节点坐标 X_{bi}^0, Y_{bi}^0 保留外, 其余节点坐标在后续计算过程中弃置不用, 由此第一步的计算区域 Ω_a 确定。

2) 为完成计算区域 Ω_a 内的有限元计算, 在 Ω_a 内重新“人工”(以后自动完成)划分网格。由于初始时间步长 $\Delta\tau$ 足够小, 形成的计算区域较小, 可简单的将区域均匀二等分, 即取计算所得凝固界面的节点坐标与冷却表面边界节点坐标的平均值作为中间节点的坐标, 又由于此时的网格一般不与原网格重合(原网格已弃置不用), 除非采用插值过程, 中间节点的上一步温度值难以获得, 为简便起见, 忽略上一步计算的温度值(因时间步长 $\Delta\tau$ 足够小), 仍然取初始时刻即 $\tau = 0$ 时刻的温度分布, 即 $\{\theta\}_{\tau-\Delta\tau}$ 为已知, 按式(12)解得区域 Ω_a 内的温度场。

3) 按式(13)计算出区域 Ω_a 内移动界面节点处的移动速度 V_X^1, V_Y^1 , 按式(14)计算出第二时间步长内移动界面节点的坐标, 这些节点坐标与原先的节点坐标一起, 自动完成了整个凝固区域 Ω_a 内的网格划分, 而不再对两移动界面之间的区域进行网格划分, 且上步计算的温度值在原先的节点坐标上已被记录, 新增节点坐标(即移动界面)上的温度为不变的凝固温度, 因此各节点上已具备了上一时间步的温度值, 按式(12)可解得整个凝固区域 Ω_a 内的温度场。重复上述过程, 即可完成整个过程的计算。网格生成的示意图见图2。

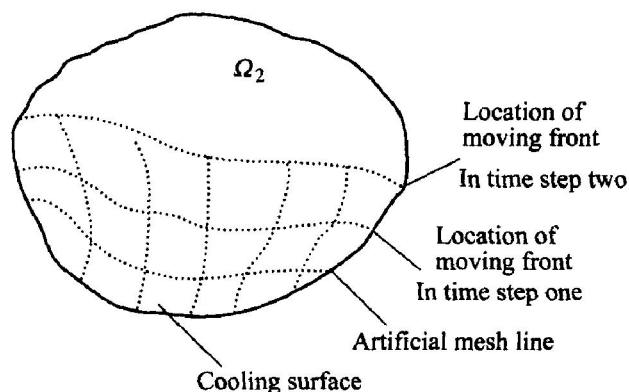


图 2 网格生成示意图

Fig. 2 Mesh generation step by step versus time

2 不同边界条件下的凝固过程计算算例

为了与已有的一维理论解比较, 本文考虑一边长为 L 的正方形区域、其初始时刻为处于凝固(熔解)温度 θ_m 的溶液、仅一个边界表面发生相变过程的特例, 即设其三个表面绝热, 当时间 $\tau > 0$ 时, 一个表面上的温度分布给定且低于 θ_m (参见图 3), 则凝固过程从 $Y=0$ 的边界面开始发生。由于在 $X=0$ 及 $X=1$ 边界表面绝热, 有 $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$, 由此有 $V_x = \frac{\partial X_b}{\partial \tau} = 0$, 故而两表面上的凝固位移仅朝 Y 方向运动, 与一维情形相同, 取常物性。

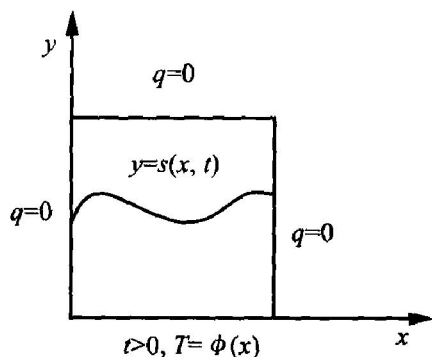


图 3 给定壁面温度的凝固问题

Fig. 3 Solidification problem under constant surface temperature distribution

2.1 给定壁温分布条件下凝固过程的计算
选取下列无量纲量:

$$T = \frac{\theta - \theta_m}{\theta_m}, \quad t = \frac{\alpha \tau}{L^2}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad s = \frac{S}{L}$$

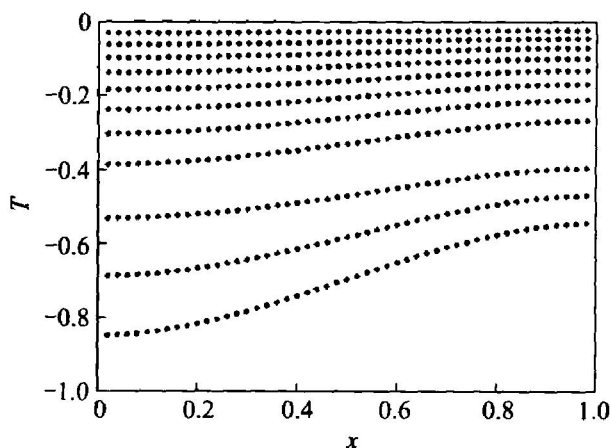
界面移动速度为

$$v_x = \frac{\partial x_b}{\partial t} = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial y_b}{\partial t} = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial y}$$

式中 $\beta_1 = \frac{c\theta_m}{r_1}$ 。在 $y=0$ 表面, 当 $t>0$ (见图 3), 本文温度分布及物性值分别取 $T = \phi(x) = -0.8480 + 0.9119x^2 - 0.6079x^3$, $\beta_1 = 1.689$ 。

凝固过程首先开始于被冷却的 $y=0$ 边界表面, 因此, 计算过程也将从此表面开始。作为计算例子, 本文初始时刻步长取 $\Delta t = 0.0005$ 且保持不变, 近似认为此时尚未发生凝固过程, 对整个正方形区域内按通常的非稳态导热问题进行计算, 沿 x 、 y 方向各 50 均等划分网格, 解出温度场由式 (13) 算出 $y=0$ 界面处的位移速度, 按式 (14) 计算出第一时间步长内移动界面的各点坐标, 亦即第一条网格线。初始时刻时间步长的选取, 既要尽可能减小以上假设给初始位移速度计算带来的近似误差, 也要兼顾凝固区域的计算网格的大小, 避免后续计算出现过于窄小的网格, 此后时间步长可适当调整。

由于不存在多维情形下凝固问题的理论解, 为与仅存的一维半无限大空间定壁温的理论解作一对比, 在较短的过程时间段内, 可近似认为在 $x=0$ 及 $x=1$ 边界面上的凝固位移接近半无限大空间的解, 将计算结果与其作一对比。整个计算结果见表 1 和图 4、图 5。从表 1 可见, 在 $x=0$ 及 $x=1$ 边界面上的移动界面的位移与一维问题的理论解是相一致的。

图 4 $t=0.005$ 时刻凝固区内温度分布Fig. 4 Temperature distribution at $t=0.005$

2.2 混合边界条件下的凝固过程的计算

考虑一正方形区域, 当时间 $\tau > 0$ 时, 表面与环境流体发生对流换热, 取换热系数为常数, 考虑到问题的对称性, 取其四分之一(设边长为 L), 此时,

表 1 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 表面上移动界面的位移数值计算结果与理论解的比较 ($\Delta t = 0.0005$)

Table 1 Comparison of results obtained for positions of front with analytical solution and numerical value($\Delta t= 0.0005$)			y_0^0	y_1^0	y_2^0	y_3^0	y_4^0	y_5^0	y_6^0	y_7^0	y_8^0	y_9^0	y_{10}^0
$x = 0$	Analytical solution		0.0	0.030 3	0.042 8	0.052 4	0.060 5	0.067 7	0.074 1	0.080 1	0.085 6	0.090 8	0.095 7
	Numerical solution		0.0	0.033 2	0.049 7	0.059 9	0.068 2	0.075 5	0.082 2	0.088 3	0.094 0	0.099 3	0.104 4
$x = 1$	Analytical solution		0.0	0.025 8	0.036 5	0.044 7	0.051 6	0.057 7	0.063 2	0.068 2	0.072 9	0.077 4	0.081 5
	Numerical solution		0.0	0.021 3	0.040 6	0.049 4	0.056 5	0.062 9	0.068 6	0.073 9	0.078 7	0.083 3	0.087 6

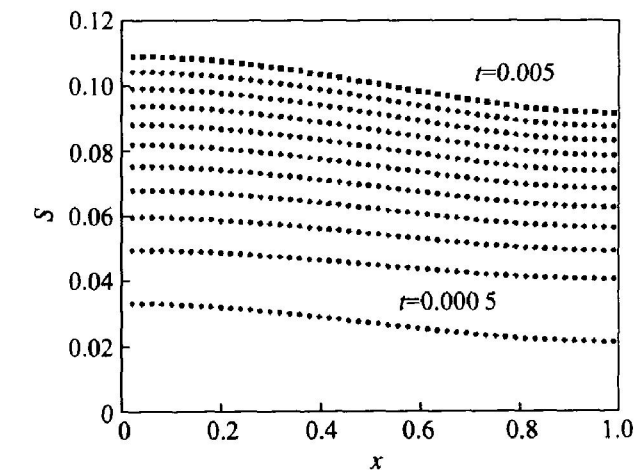


图 5 在不同时刻形成的凝固界面形状曲线

Fig. 5 Front contour of solidification interface at different time

边界上的条件取

$$\begin{aligned} &-k\frac{\partial\theta}{\partial Y}=h(\theta_{\infty}-\theta),\ Y=0,\ 0\leqslant X\leqslant L \\ &\frac{\partial\theta}{\partial Y}=0,\ Y=L,\ 0\leqslant X\leqslant L \\ &-k\frac{\partial\theta}{\partial X}=h(\theta_{\infty}-\theta),\ X=L,\ 0\leqslant Y\leqslant L \\ &\frac{\partial\theta}{\partial X}=0,\ X=0,\ 0\leqslant Y\leqslant L \end{aligned}$$

其它方程同前。取下列无量纲量:

$$T=\frac{\theta-\theta_m}{\theta_m-\theta_{\infty}},\ x=\frac{X}{L},\ y=\frac{Y}{L},\ t=\frac{aT}{L^2},\ s=\frac{S}{L}$$

则界面移动速度为

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x_b}{\partial t} = \beta_2 \frac{\partial T}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial y_b}{\partial t} = \beta_2 \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

式中 $\beta_2 = \frac{(\theta_m - \theta_{\infty})c}{r_1}$

在对流换热表面, 当 $t > 0$, 边界条件转化为

$$\frac{\partial T}{\partial y} = Bio(1 + T),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = Bio(1 + T),\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x = 0 \quad (16)$$

式中 $Bio = \frac{Lh}{k}$ 。

同前, 取足够小的时间步长 Δt , 近似认为此时尚未发生凝固过程, 故换热边界上的壁温近似为 $T = 0$, 根据式(15)、(16), 此时换热边界上的温度梯度已知, 故可直接将换热边界划分节点后算出初始的位移速度。按式(14)计算出第一移动界面位置后, 其它计算步骤同前。作为计算例子, 对流换热系数取 $h = 200\text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, $\beta_2 = 1.6372$, $\theta_{\infty} = 20^\circ\text{C}$, 时间步长取 $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$, 计算结果见图 6、7。由于不存在混合条件下的理论解, 计算结果尚无法加以比较。

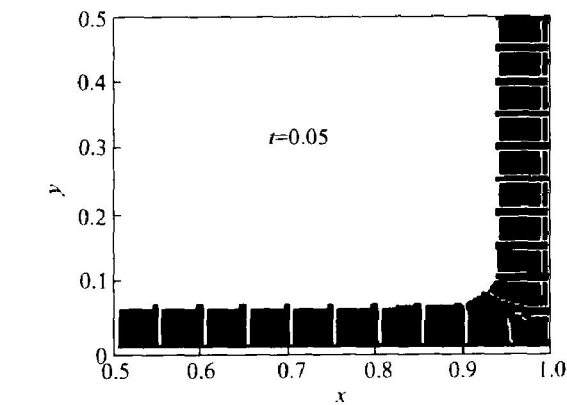


图 6 $t = 0.05$ 时刻局部凝固区域图

Fig. 6 Part of solidification domain configuration at $t = 0.05$

3 结论

采用追踪计算移动界面的速度, 获得相变区域, 网格逐步生成的计算方式, 对二维单相凝固问题进行了数值模拟。采用本文的方法对于给定壁温分布条件下的凝固过程的计算结果表明, 一些特定位置的移动界面的位移规律与一维理论解相一致, 间接地证明了本方法的正确性。该方法避免了温度场的计算与移动界面确定的相互迭代的过程, 不需对控制方程作任何变换, 也不需变动计算网格, 因

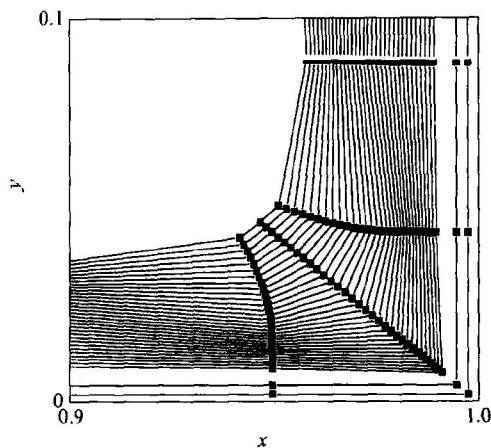


图 7 角部区域放大图

Fig. 7 Amplified profile at corner

而计算过程较为简便。该方法可方便地应用于复杂边界条件下的多维凝固问题的计算。

REFERENCES

- [1] Goodman T R. The heat-balance integral and its application to problems involving change of phase [J]. Trans ASME, 1985, 80(3): 335 - 342.
- [2] Furzeland R M. A comparative study of numerical methods for moving boundary problem [J]. Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, 1980, 26(4): 419 - 429.
- [3] Crank J, Gupta R S. Isotherm migration method in two dimensions [J]. Int J Heat Transfer, 1975, 18: 1101 - 1107.
- [4] Swaminathan C R, Voller V R. A general enthalpy method for modeling solidification processes [J]. Metal Trans B, 1992, 23B: 651 - 664.
- [5] Crank J. Free and Moving Boundary Problems [M]. Oxford: Clarendon Press, 1984. 5 - 23.
- [6] Ockendon J R, Hodgkins W R. Moving Boundary Problems in Heat and Diffusion (second ed) [M]. Oxford: Clarendon Press, 1987. 117 - 138.
- [7] 荆涛. 凝固过程数值模拟 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2002. 78 - 86.
JING Tao. Numerical Simulation of Solidification Process [M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2002. 78 - 86.
- [8] 周尧和. 凝固技术 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1998. 52 - 63.
ZHOU Yao-he. The Technique of Solidification [M]. Beijing: China Machine Press, 1998. 52 - 63.
- [9] 吴兆春. 定时间步长变坐标步长差分求解单相 Stefan 问题 [J]. 计算物理, 2003, 20(6): 521 - 524.
WU Zhao-chun. Finite difference approach to single-phase Stefan problems by using fixed-time step and variable space interval method [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2003, 20(6): 521 - 524.
- [10] Saitoh T. Numerical method for multidimensional freezing problems in arbitrary domains [J]. ASME, J of Heat Transfer, 1978, 100: 294 - 299.
- [11] Crank J, Crowley A B. On an implicit scheme for the isotherm migration method along orthogonal flow lines in two dimensions [J]. Int J Heat Transfer, 1979, 22: 1331 - 1337.
- [12] Rabin Y, Shitzer A. Numerical solution of the multidimensional freezing problem during cryosurgery [J]. J of Biomechanical Engineering, Transactions of the ASME, 1998, 120(1): 32 - 37.
- [13] Jeong J H, Yang D Y. Application of an adaptive grid refinement technique to three-dimensional finite element analysis of the filling stage in the die-casting process [J]. J of Materials Processing Technology, 2001, 111(1): 59 - 63.
- [14] 巴发海, 沈宁福, 虞钢. 连续冷却多阶段快速凝固过程起始形核温度的计算 [J]. 中国有色金属学报, 2002, 12(5): 878 - 881.
BA Fa-hai, SHEN Ning-fu, YU Gang. Calculation method of initial nucleation temperature of phase during rapid solidification by continuous cooling of multistep reaction [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2002, 12(5): 878 - 881.
- [15] 陈福义, 介万奇. 枝晶凝固过程溶质再分配的数值模型和快速算法 [J]. 中国有色金属学报, 2003, 13(1): 147 - 152.
CHEN Fu-yi, JIE Wan-qi. Numerical model and rapid algorithm of solute redistribution in dendritic solidification [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2003, 13(1): 147 - 152.
- [16] 冯坚, 张长瑞, 黄卫东, 等. 金属近快速定向凝固过程的数值模拟 [J]. 中国有色金属学报, 2004, 14(3): 329 - 334.
FENG Jian, ZHANG Chang-rui, HUANG Wei-dong, et al. Numerical simulation on near-rapid directional process of Al bar sample [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2004, 14(3): 329 - 334.
- [17] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用 (第三版) [M]. 北京: 科学出版社, 1986. 37 - 39.
KONG Xiang-qian. Application of Finite Element Method in Heat Transfer (third ed) [M]. Beijing: Science Press, 1986. 37 - 39.

(编辑 陈爱华)