

# 基于三剪屈服准则的 空间轴对称特征线场理论及其应用

胡小荣

(南昌大学 建筑工程学院, 南昌 330031)

**摘要:** 基于三剪屈服准则建立了有重材料的空间轴对称特征线场理论, 其特点是: 在描述空间轴对称三向应力作用下的材料屈服特性时, 三剪屈服准则较 Mohr-Coulomb 屈服准则能反映中间主应力对材料屈服的影响, 并且该准则还可用一个表达式来精确表达工程中常用的 Mohr-Coulomb 屈服准则、Tresca 屈服准则和 Mises 屈服准则, 从而提高准则对材料的适用范围; 在描述材料塑性区内的应力状态时, 摒弃了以往基于 Mohr-Coulomb 屈服准则必须采用的 Haar-Von Karman 完全塑性假设, 通过引入中间主应力参数来表达不同材料可能具有的不同塑性区应力状态, 并且 Haar-Von Karman 完全塑性假设仅为其特例。另外, 利用该特征线场理论研究了竖井井壁压力的计算问题并与传统方法做了比较。结果表明: 该方法能更好地反映井周岩土屈服特性及塑性区应力状态对井壁压力的影响。

**关键词:** 三剪屈服准则; 空间轴对称线场理论; 井壁压力

**中图分类号:** TU4      **文献标识码:** A

## Axisymmetric characteristics line theory based on triple shear unified yield criterion and its applications

HU Xiao-rong

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

**Abstract:** The axisymmetric characteristics line theory for weight materials was established based on the triple shear unified yield criterion. The main features are as follows: in describing the yield properties for materials under axisymmetric three dimensional stress states, the triple shear unified yield criterion used here can reflect the intermediate principal stress effects on the yield characteristics for materials compared with the Mohr-Coulomb yield criterion used before, and can be suitable to more kinds of materials because the common used criteria such as the Mohr-Coulomb failure criterion, the Tresca yield criterion and the Von Mises yield criterion can be expressed accurately with its only one equation. In describing the stress states in plastic zone, the Haar-Von Karman plasticity hypothesis based on the Mohr-Coulomb yield criterion is neglected through introducing the intermediate principal stress parameter to express the different stress states in plastic zones for different materials. This method can also take the Haar-Von Karman plasticity hypothesis as one of its special cases. As an example, pressures acting on the shaft wall were researched using the new axisymmetric characteristics line theory and results were compared with the traditional method. The results show that the proposed method gives a better description to the pressures acting on shafts influenced by yield properties for rock and/or soil round the shafts and the stress states in plastic zones.

**Key words:** triple shear unified yield criterion; unified axisymmetric characteristics line theory; pressure acting on shaft wall

现有的空间轴对称特征线(滑移线)场理论是基于 Mohr-Coulomb 屈服准则和 Haar-Von Karman 完全塑性假设建立起来的<sup>[1]</sup>。由于空间轴对称问题需要同时考虑材料所受的三向应力作用,而 Mohr-Coulomb 屈服准则本身并不能反映中间主应力的影响,故需要引入 Haar-Von Karman 完全塑性假设( $\sigma_2=\sigma_1$  或  $\sigma_2=\sigma_3$ )。Hill<sup>[2]</sup>认为 Haar-Von Karman 完全塑性假设与实际并不相符,俞茂宏<sup>[3]</sup>通过有限元计算也得出了与 Hill 相同的结论并认为材料塑性区内的中间主应力值基本上接近最大及最小主应力值之和的一半,即  $\sigma_2 \approx (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 。另外,大量实验已经表明,有些金属材料(如铸铁)、混凝土、岩土等的屈服与中间主应力有关<sup>[3-10]</sup>。因此,在建立空间轴对称特征线场理论时,解决上述问题的有效途径就是:1) 在描述空间轴对称三向应力作用下的材料屈服特性时,采用一个能同时反映3个主应力作用的材料屈服准则以代替 Mohr-Coulomb 屈服准则;2) 在描述材料塑性区内的应力状态时,摒弃以往基于 Mohr-Coulomb 屈服准则必须采用的 Haar-Von Karman 完全塑性假设。俞茂宏等<sup>[11-12]</sup>采用双剪统一屈服准则并通过引入中间主应力参数来描述材料塑性区内应力状态的方法对该问题作了研究,提出了无重材料的双剪统一空间轴对称特征线场理论,但双剪统一屈服准则存在双重破坏角现象<sup>[13]</sup>。针对屈服准则这一问题,胡小荣等<sup>[14-15]</sup>通过考虑十二面体单元主剪面上3个主剪面应力对共同作用,提出了一个三剪屈服准则。其特点是该准则的表达式只有一个,同样可通过改变准则中的参数  $b$  就能达到用一个准则来精确表达工程中常用的 Mohr-Coulomb 屈服准则(当  $b=0$ 、 $\alpha < 1$  时)、Tresca 屈服准则(当  $b=0$ 、 $\alpha=1$  时)和 Mises 屈服准则(当  $b=1/3$ 、 $\alpha=1$  时)的目的。另外,该准则还能反映材料屈服特征的非线性,与双剪双参数统一屈服准则相比,也不会存在双重破坏角问题。本文作者基于该屈服准则并沿用文献[11-12]中提出的中间主应力参数方法,提出了有重材料的空间轴对称特征线场理论。另外,作为一个研究算例,将该理论应用于竖井井壁压力计算问题,并与传统的基于 Mohr-Coulomb 屈服准则和 Haar-Von Karman 完全塑性假设所得结果作了比较。

## 1 三剪屈服准则

基于剪切破坏机理提出的材料三剪屈服准则为<sup>[14-15]</sup>

$$(\alpha\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) + b(\alpha\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + b(\alpha\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) = (1+b)(\sigma_1 - \sigma_3)\sigma_1 \quad (1)$$

式中  $b$  为十二面体单元上的2个主剪面应力对( $\tau_{12}$ ,  $\sigma_{12}$ )和( $\tau_{23}$ ,  $\sigma_{23}$ )对材料屈服的共同影响系数,  $\sigma_1$  为材料的单轴抗拉屈服极限,  $\alpha$  为材料的单轴抗拉与单轴抗压屈服极限比值( $\alpha \leq 1$ )。胡小荣等<sup>[14-15]</sup>通过分析认为,当  $0 \leq b \leq \frac{\alpha}{2+\alpha}$  时,该屈服准则为外凸型,否则为非外凸型。

式(1)用材料的内聚力  $C_0$  和内摩擦角  $\varphi_0$  表示则为

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + b(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (1+b)(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \sin \varphi_0 = 2(1+b)(\sigma_1 - \sigma_3)C_0 \cos \varphi_0 \quad (2)$$

由式(1)和(2)可知,当  $b=0$  时,三剪屈服准则蜕化为 Mohr-Coulomb 屈服准则。由于三剪屈服准则本身采用一个表达式即可表示现有的一些屈服准则,因而提高了其对材料的适用范围。

## 2 有重材料的空间轴对称特征线场理论

### 2.1 空间轴对称问题的三剪屈服准则表达式

对于空间轴对称问题,由于材料塑性区内仅存在应力分量  $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$ 、 $\sigma_z$  和  $\tau_{rz}$ ,且  $\sigma_2 = \sigma_\theta$ <sup>[1, 11-12]</sup>。为了更好地描述不同材料可能具有的不同塑性区应力状态,可通过如下引入中间主应力参数的方法来实现<sup>[14-15]</sup>:

$$\sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_3 + \frac{m}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (3)$$

式中  $m$  为中间主应力参数。 $0 \leq m \leq 2$ 。

由式(3)可知:当  $m=0$  时,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ; 当  $m=2$  时,  $\sigma_2 = \sigma_1$ 。2种情况均对应 Haar-Von Karman 完全塑性假设。当  $m=1$  时,  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ ,与文献[3]中的有限元计算结论一致。中间主应力参数  $m$  的引入,不仅可方便地表达不同材料可能具有的不同塑性区应力状态,而且还使 Haar-Von Karman 完全塑性假设成为其特例。令

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r) \\ R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2} \end{cases} \quad (4)$$

据式(3)、(4),则:

$$\begin{cases} \sigma_1 = p + R \\ \sigma_2 = p + (m-1)R \\ \sigma_3 = p - R \end{cases} \quad (5)$$

这样,空间轴对称问题的所有应力分量分别为

$$\begin{cases} \sigma_r = p + R \cos 2\delta \\ \sigma_z = p - R \cos 2\delta \\ \sigma_\theta = p + (m-1)R \\ \tau_{rz} = R \sin 2\delta \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\delta$  为最大主应力  $\sigma_1$  与  $r$  轴的夹角(见图 2)。将式(5)代入式(2)可得空间轴对称问题的三剪屈服准则表达式:

$$R = p \sin \varphi_t + C_t \cos \varphi_t \quad (7)$$

式中  $C_t$  和  $\varphi_t$  值分别为

$$\begin{cases} \sin \varphi_t = \frac{2(1+b) \sin \varphi_0}{2(1+b) + bm(m-2)} \\ C_t = \frac{2(1+b)C_0 \cos \varphi_0}{2(1+b) + bm(m-2)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_t} \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)、(8)可知, 当  $m=0$  和  $m=2$  时, 三剪屈服准则退化为 Mohr-Coulomb 屈服准则。

### 2.2 有重材料的空间轴对称特征线场理论

采用图 1 所示圆柱坐标系和材料自重  $\gamma$  方向时, 空间轴对称问题的平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \end{cases} \quad (9)$$

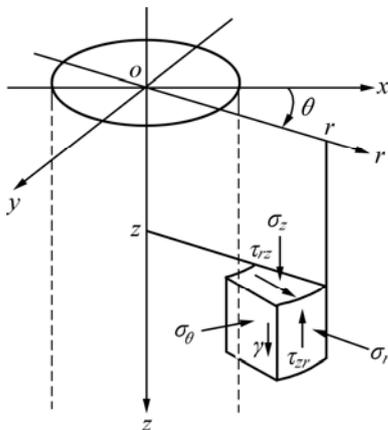


图 1 圆柱坐标系和材料自重  $\gamma$  方向  
Fig.1 Cylindrical coordinate system and direction of  $\gamma$

将式(6)代入式(9)并根据式(7)得空间轴对称特征线场微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} (1 + \sin \varphi_t \cos 2\delta) + \frac{\partial p}{\partial z} \sin \varphi_t \sin 2\delta + \\ 2R \left( \frac{\partial \delta}{\partial z} \cos 2\delta - \frac{\partial \delta}{\partial r} \sin 2\delta \right) = -\frac{R}{r} (m-1 - \cos 2\delta) \\ \frac{\partial p}{\partial r} \sin \varphi_t \sin 2\delta + \frac{\partial p}{\partial z} (1 - \sin \varphi_t \cos 2\delta) + \\ 2R \left( \frac{\partial \delta}{\partial z} \sin 2\delta + \frac{\partial \delta}{\partial r} \cos 2\delta \right) = \gamma - \frac{R}{r} \sin 2\delta \end{cases} \quad (10)$$

式(10)的特征线方程为

$$\begin{cases} \alpha \text{ 族: } \frac{dz}{dr} = \tan(\delta - \mu_t) \\ \beta \text{ 族: } \frac{dz}{dr} = \tan(\delta + \mu_t) \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\mu_t = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2} \quad (12)$$

图 2 所示为过子午面内点的特征线。

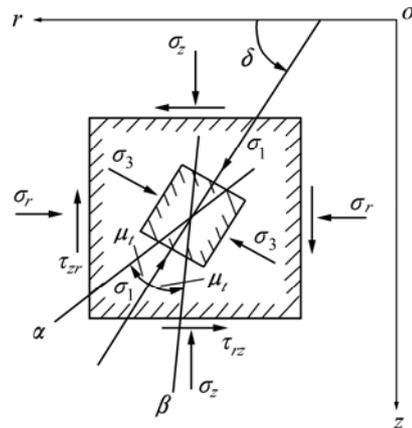


图 2 过子午面内点的特征线  
Fig.2 Characteristic curves of  $\alpha$  and  $\beta$  for point in meridian plane

式(10)的随体坐标  $S_\alpha$ 、 $S_\beta$  形式为

$\alpha$  族:

$$\begin{aligned} \sin 2\mu_t \frac{\partial p}{\partial S_\alpha} - 2R \frac{\partial \delta}{\partial S_\alpha} = \\ \frac{R}{r} (m-1) \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\alpha} + \sin 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\alpha} \right) + \\ \frac{R}{r} \frac{\partial z}{\partial S_\alpha} - \gamma \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\alpha} - \sin 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\alpha} \right) \end{aligned}$$

$\beta$  族:

$$\begin{aligned} & \sin 2\mu_t \frac{\partial p}{\partial S_\beta} + 2R \frac{\partial \delta}{\partial S_\beta} = \\ & -\frac{R}{r}(m-1) \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\beta} - \sin 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\beta} \right) - \\ & \frac{R}{r} \frac{\partial z}{\partial S_\beta} + \gamma \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\beta} + \sin 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\beta} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 在竖井井壁压力计算中的应用

#### 3.1 竖井井壁压力计算方法

在采矿等岩土工程中，竖井井壁围岩处于三向应力状态。井壁压力随井深变化的理论计算主要有2种基本方法<sup>[1, 17]</sup>：1) 基于挡土墙主动土压力计算的方法；2) 基于空间轴对称特征线(滑移线)场理论求解的方法。文献[1]中采用第二种方法并基于Mohr-Coulomb屈服准则和Harr-Von Karman完全塑性假设： $\sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_1$  (对应于  $m=2$ )，给出了一个竖井井壁压力计算式。

为获得解析解，本文中除了摒弃文献[1]中所采用的Mohr-Coulomb屈服准则和Harr-Von Karman完全塑性假设外，仍沿用了其中的其它假定条件，如认为井深较浅并忽略岩土对井壁的摩擦作用。这时，计算井壁压力时可将井壁岩土在  $r-z$  平面内的特征线当作两组平行直线处理，如图3所示。此时有  $\frac{\partial \delta}{\partial S_\alpha} = \frac{\partial \delta}{\partial S_\beta} = 0$ ，

$\delta = \frac{\pi}{2}$ 。由式(13)得：

$\alpha$  族：

$$\begin{aligned} & \sin 2\mu_t \frac{\partial p}{\partial S_\alpha} = \\ & \frac{R}{r}(m-1) \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\alpha} + \sin 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\alpha} \right) + \\ & \frac{R}{r} \frac{\partial z}{\partial S_\alpha} - \gamma \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\alpha} - \sin 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\alpha} \right) \\ & \beta \text{ 族:} \\ & \sin 2\mu_t \frac{\partial p}{\partial S_\beta} = \\ & -\frac{R}{r}(m-1) \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\beta} - \sin 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\beta} \right) - \\ & \frac{R}{r} \frac{\partial z}{\partial S_\beta} + \gamma \left( \cos 2\mu_t \frac{\partial r}{\partial S_\beta} + \sin 2\mu_t \frac{\partial z}{\partial S_\beta} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

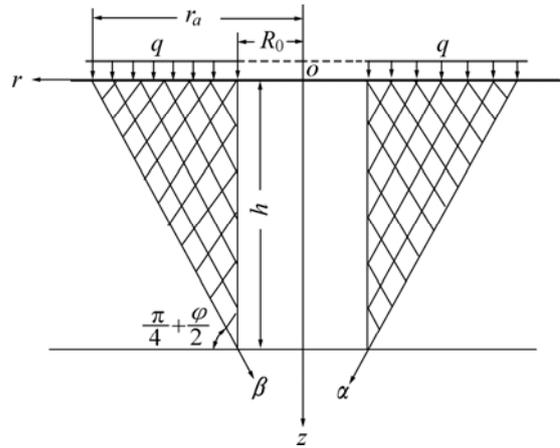


图3 竖井井壁压力计算图

Fig.3 Scheme of pressure acting on shaft wall

根据图3中  $z$  轴左半侧的计算图式，取式(14)下半式，求解  $p$  的微分方程为

$$\begin{aligned} & \sin 2\mu_t \frac{dp}{dr} = \\ & -\left[ \frac{R}{r}(m-1) \cos 2\mu_t + \frac{R}{r} - \gamma \sin 2\mu_t \right] \frac{dz}{dr} + \\ & \frac{R}{r}(m-1) \sin 2\mu_t + \gamma \cos 2\mu_t \end{aligned} \quad (15)$$

将  $\delta = \frac{\pi}{2}$  代入式(11)并根据式(7)、(12)，将式(15)

化简为

$$\begin{aligned} & \frac{dp}{dr} = \frac{m(p + C_t \cot \varphi_t)}{r} \tan \varphi_t \cdot \\ & \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_t}{2} \right) - \frac{\gamma}{\cos \varphi_t} \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$\begin{cases} \sigma = p + C_t \cot \varphi_t \\ \eta = m \cdot \tan \varphi_t \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_t}{2} \right) \end{cases} \quad (17)$$

则式(16)为

$$\frac{d\sigma}{dr} - \eta \frac{\sigma}{r} = -\frac{\gamma}{\cos \varphi_t} \quad (18)$$

解该微分方程并结合式(17)、(7)和(6)求出各应力分量，其中径向应力分量  $\sigma_r$  为

$$\sigma_r = A(1 - \sin \varphi_t) r^\eta + \gamma r \frac{1 - \sin \varphi_t}{(\eta - 1) \cos \varphi_t} - C_t \cot \varphi_t \quad (19)$$

式中  $A$  为积分常数, 其值由边界条件  $r = r_a$ ,  $\sigma_z = q$  ( $q$  为地面荷载) 求出, 其值为

$$A = \frac{q + C_t \cot \varphi_t}{r_a^\eta (1 + \sin \varphi_t)} - \frac{\gamma}{r_a^{\eta-1}} \cdot \frac{1}{(\eta - 1) \cos \varphi_t} \quad (20)$$

由式(19)、(20)得:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \gamma r \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right)}{\eta - 1} \left[ 1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\eta-1} \right] + \\ & q \left(\frac{r}{r_a}\right)^\eta \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right) + \\ & C_t \left[ \left(\frac{r}{r_a}\right)^\eta \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right) - 1 \right] \cot \varphi_t \end{aligned} \quad (21)$$

令  $r = R_0$  ( $R_0$  为井筒半径) 得井壁压力计算式为

$$\begin{aligned} P_n = & \gamma R_0 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right)}{\eta - 1} \left[ 1 - \left(\frac{R_0}{r_a}\right)^{\eta-1} \right] + \\ & q \left(\frac{R_0}{r_a}\right)^\eta \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right) + \\ & C_t \left[ \left(\frac{R_0}{r_a}\right)^\eta \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right) - 1 \right] \cot \varphi_t \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $r_a$  与井深  $h$  关系为

$$r_a = R_0 + h \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_t}{2}\right) \quad (23)$$

如果令  $m=2$ , 由式(7)、(8)、(17)、(21)可得出与文[1]中完全相同的井壁压力计算式。

### 3.2 计算实例

计算实例采用如下岩土力学参数:  $C_0=10$  kPa,  $\varphi_0=20^\circ$ ,  $\gamma=26$  kN/m<sup>3</sup>,  $q=5$  kN/m<sup>2</sup>, 井筒半径为  $R_0=2$  m。表 1 和图 4 列出了  $m=0$ 、 $m=1$  和  $m=2$  3 种典型情况下所得的井壁压力  $p_n$  随井深  $h$  变化的计算结果。

由表 1 和图 4 可知: 1) 井壁压力随井深的变化是非线性的; 2) 塑性区内的应力状态对计算结果有较大影响; 3) 采用传统的基于 Mohr-Coulomb 屈服准则和 Haar-Von Karman 完全塑性假设可能会引起较大的计算误差, 例如, 采用  $\sigma_2=\sigma_3$  ( $m=0$ ) 假设就有可能过高估计井壁压力, 而采用  $\sigma_2=\sigma_1$  ( $m=2$ ) 假设则又有可能过低估计井壁压力, 从而影响井筒支护设计的合理性。

表 1 井壁压力  $p_n$  的计算结果

Table 1 Results of pressure  $p_n$  acting on shaft wall (kPa)

h/m	m=0	m=1					m=2
		b=0	b=0.049	b=0.098	b=0.147	b=0.196	
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1.1	0	0	0	0	0	0
2	13.8	6.5	5.7	5.0	4.3	3.6	0.8
3	26.6	14.6	13.5	12.6	11.6	10.7	5.81
4	39.2	22.2	20.8	19.6	18.4	17.3	10.2
5	52.0	29.3	27.7	26.2	24.8	23.5	14.16
6	64.7	36.0	34.2	32.4	30.8	29.3	17.69
7	77.5	42.4	40.3	38.3	36.5	34.8	20.89
8	90.2	48.5	46.2	44.0	41.9	40.0	23.81
9	102.9	54.4	51.8	49.3	47.1	45.0	26.5
10	115.6	60.0	57.2	54.5	52.0	49.7	29.0
11	128.4	65.5	62.4	59.5	56.8	54.3	31.31
12	141.3	70.7	67.4	64.3	61.4	58.7	33.48
13	153.8	75.8	72.2	68.9	65.8	62.9	35.51
14	166.5	80.8	76.9	73.4	70.1	67.0	37.43
15	179.3	85.5	81.5	77.8	74.2	71.0	39.23

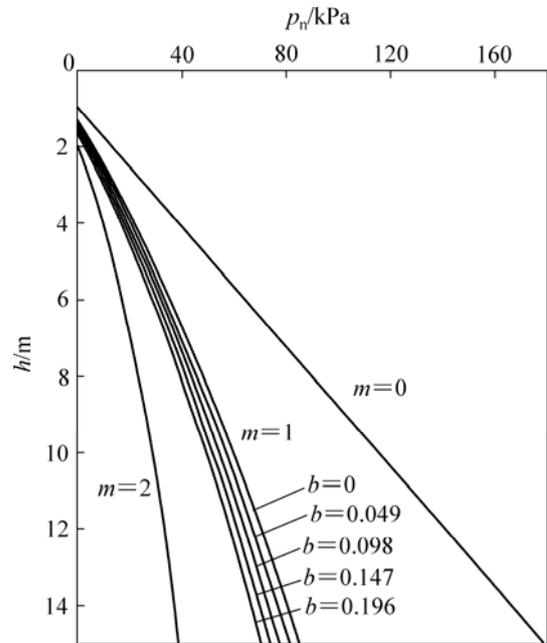


图 4 井壁压力的计算结果

Fig.4 Results of pressures acting on shaft wall

## 4 结论

1) 在描述空间轴对称三向应力作用下的材料屈

服特性时, 采用了能反映材料屈服特性中间主应力效应的三剪屈服准则, 由于该准则表达的是一个屈服准则系列, 因而可适用于不同的材料。

2) 在描述材料塑性区内的应力状态时, 摒弃了以往基于 Mohr-Coulomb 屈服准则必须采用的 Haar-Von Karman 完全塑性假设, 通过引入中间主应力参数不仅可方便地表达不同材料可能具有的不同塑性区应力状态, 而且还使 Harr-Von Karman 完全塑性假设成为其特例。

3) 所建立的空间轴对称特征线场理论以及作为研究实例得到的竖井井壁压力计算式适用性更广, 并且以往基于 Mohr-Coulomb 屈服准则和 Haar-Von Karman 完全塑性假设所建立的空间轴对称特征线场理论及其以此为基础得到的竖井井壁压力计算式均为本文结果的特例。

4) 塑性区内的应力状态对井壁压力的计算结果有较大影响, 传统的基于 Mohr-Coulomb 屈服准则和 Haar-Von Karman 完全塑性假设的计算方法可能会引起较大误差, 从而影响井筒支护设计的合理性。

## REFERENCES

- [1] 赵彭年. 松散介质力学[M]. 北京: 地震出版社, 1995.  
ZHAO Peng-nian. Mechanics of loose medium[M]. Beijing: Earthquake Press, 1995.
- [2] Hill R. The mathematical theory of plasticity [M]. Oxford: Oxford University Press, 1950.
- [3] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.  
YU Mao-hong. Twin shear theory and its applications[M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [4] Mogi K. Effect of intermediate principal stress on rock failure[J]. J Geophys Res, 1967, 72: 5117-5131.
- [5] Mogi K. Failure and flow of rocks under high triaxial compression[J]. J Geophys Res, 1971, 76: 1255-1269.
- [6] Michelis P. Polyaxial yielding of granular rock[J]. J Eng Mech ASCE, 1985, 111(18): 1049-1066.
- [7] YU Mao-hong. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century[J]. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(3): 169-218.
- [8] 张金涛, 林天健. 三轴实验中岩石的应力状态和破坏性质[J]. 力学学报, 1979, 2: 99-105.  
ZHANG Jin-tao, Lin Tian-jian. Stress conditions and variations of rupture characteristics of a rock as shown by tri-axial test [J]. Acta Mechica Sinica, 1979, 2: 99-105.
- [9] 许东俊, 耿乃光. 岩石强度随中间主应力的变化规律[J]. 固体力学学报, 1985, 6(1): 72-80.  
XU Dong-jun, GENG Nai-guang. The variation law of rock strength with increase of intermediate principal stress[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1985, 6(1): 72-80.
- [10] 李小春, 许东俊. 双剪应力强度理论的试验验证—拉西瓦花岗岩强度特性的真三轴实验研究[R]. 岩土报告(90)52号, 武汉: 中科院武汉岩土所, 1990.  
LI Xiao-chun, XU Dong-jun. Experimental verification of the twin shear theory-true triaxial test research of strength of Lawaxi Granite[R]. Rock and Soil (90) 52, Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Science, 1990.
- [11] 俞茂宏, 李建春, 张永强. 空间轴对称塑性问题的统一特征线理论[J]. 中国科学(E辑), 2001, 31(4): 323-331.  
YU Mao-hong, LI Jian-chun, ZHANG Yong-qiang. Unified characteristics line theory of spacial axisymmetric plastic problem[J]. Science in China (series E), 2001, 31(4): 323-331.
- [12] YU Mao-hong, LI Jiang-chun, ZHANG Yong-qiang. Unified characteristics line theory of spacial axisymmetric plastic problem[J]. Science in China (series E), 2001, 44(2): 207-215.
- [13] 胡小荣, 魏雪英, 俞茂宏. 三轴压缩下岩石强度与破坏面角度的双剪理论分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(7): 1093-1098.  
HU Xiao-rong, WEI Xue-ying, YU Mao-hong. Characteristics of rock strength and failure under triaxial compression analyzed by twin shear theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(7): 1093-1098.
- [14] 胡小荣, 俞茂宏. 岩土类介质强度准则新探[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(18): 3037-3043.  
HU Xiao-rong, YU Mao-hong. New research on failure criterion for geomaterial[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(18): 3037-3043.
- [15] 胡小荣, 林太清. 三剪屈服准则及其在极限内压计算中的应用[J]. 中国有色金属学报, 2007, 17(2): 207-215.  
HU Xiao-rong, LIN Tai-qing. Triple-shear yield criterion and its application to limit pressures for thin and thick wall cylinders and thick wall spherical shells[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2007, 17(2): 207-215.
- [16] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
LI Guang-xin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [17] 高磊. 矿山岩石力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.  
GAO Lei. Rock mechanics for mine[M]. Beijing: Mechanical Engineering Press, 1987.

(编辑 李向群)