DOI: 10.11817/j.ysxb.1004.0609.2021-39194

基于有限元法的频率域可控源三维正演并行计算

柳建新[1,2]，刘鹏茂[1,2]，刘　颖[3]，童孝忠[1,2]

(1. 中南大学 地球科学与信息物理学院，长沙 410083；
2. 有色资源与地质灾害探查湖南省重点实验室，长沙 410083；
3. 中国海洋大学 海洋地球科学学院，青岛 266100)

摘　要：本文实现了基于有限元法的频率域可控源三维正演并行算法。首先从麦克斯韦方程出发，推导出电场双旋度方程及其边值问题，采用广义变分原理建立泛函并推导出有限元方程，并利用改进的对称逐步超松弛迭代方法(SSOR-PCG)来求解大型线性方程组。针对频率域电磁法三维有限元数值模拟计算速度慢、各频点计算相互独立的特点，选用 MPI 并行技术，实现了基于频点的对等并行算法。然后利用本文算法对均匀半空间模型进行模拟计算，并将计算结果与解析解对比，验证了算法的准确性和有效性。最后对模型实例进行模拟，模拟结果均能在不同程度上反映出异常体，计算效率基本上能够跟计算核心数成正比，从而说明了本文算法能够对频率域可控源电磁三维正演进行有效地模拟。

关键词：三维；频率域可控源电磁法；有限元法；MPI；并行计算

文章编号：1004-0609(2021)-12-3779-10　　**中图分类号**：P631　　**文献标志码**：A

引文格式：柳建新, 刘鹏茂, 刘　颖, 等. 基于有限元法的频率域可控源三维正演并行计算[J]. 中国有色金属学报, 2021, 31(12): 3779−3788. DOI: 10.11817/j.ysxb.1004.0609.2021-39194

LIU Jian-xin, LIU Peng-mao, LIU Ying, et al. Three-dimensional FD-CSEM forward modeling parallel computing based on finite-element method[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2021, 31(12): 3779−3788. DOI: 10.11817/ j.ysxb.1004.0609.2021-39194

频率域可控源电磁法(Frequency Domain Controlled-Source Electromagnetic，FD-CSEM)是由 STRANGWAY 教授在 1971 年提出[1]，该方法是通过观测人工源激发的电磁场以得到介质电性分布情况的一种地球物理方法，具有勘探深度大，分辨率高，抗干扰强等优点，目前已被广泛应用于陆地和海洋等领域[2−4]。对频率域可控源电磁数据三维模拟能更真实的还原出介质的电性特征，目前频率域可控源电磁法数据的解释常用的正演方法有：有限单元法，积分方程法和有限差分法[5−8]，其中以有限单元法应用最为广泛。KONG 等[9]将有限元法应用于海洋可控源 2.5 维层状各向异性介质中，并取得了比较好的计算效果；DA SILVA 等[10]实现了频率域可控源电磁三维有限元模拟；底青云等[11]利用傅里叶变换把三维源二维地质体转变为波数域的 2.5 维有限元数值模拟；汤井田等[12]把无限元取代施加在外边界的人工边界条件，实现有限元−无限元结合数值模拟；徐志锋等[5]通过有限元对可控源电磁三维频率域进行模拟，模拟结果给出了稳定、可靠的电磁场分布。频率域可控源电磁三维正演所需要的计算时间很长，降低了正演的运算效率，然而求解过程中各频点计算是相互独立，使得三维正演计算问题具备一定的并行性。MPI 是目前最重要的并行编程工具，具有高性能、大规模性和可移植性等特点。本文通过 MPI 的并行方法将粗粒度的分配计算任务到各个计算节点，对大型稀疏对

基金项目：国家自然科学基金资助项目(41674080，42074165)
收稿日期：2018-01-16；**修订日期**：2020-05-08
通信作者：童孝忠，副研究员，博士；电话：18874896727；E-mail：csumaysnow@csu.edu.cn

称系数线性方程组的求解进行并行化计算，编制程序实现了基于频点的对等并行算法。通过理论模型测试，模拟结果能在不同程度上反映出异常体并能提高运算效率，验证所实现的并行算法对三维频率域可控源电磁模拟计算的准确性和有效性。

1 正演理论

1.1 变分方程

随着时间变化的电磁场 Maxwell 方程组[13]：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{D}$ 为电位移，单位 C/m^2；ρ_{f} 为电荷密度，单位 C/m^3；$\boldsymbol{E}$ 为电场强度，单位 V/m；$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度，单位 Wb/m^2；$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度，单位 A/m；$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ 为电流密度，单位 A/m^2。

对于线性介质：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{7}$$

式中：ε 为介电常数，单位 F/m；μ 为导磁率，单位 H/m；σ 为电导率，单位 S/m。

假设时谐因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，式(2)两边取旋度，并把式(6)代入，即可得到：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{H} \tag{8}$$

代入式(3)、式(5)、式(7)，得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu(\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E})=k^2\boldsymbol{E}+\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \tag{9}$$

式中：k 为波数；$k^2=\mu\varepsilon\omega^2+\mathrm{i}\omega\mu\sigma$。

由式(9)，采用广义变分原理建立其泛函：

$$F[\boldsymbol{E}]=\frac{1}{2}\int_V[(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-k^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{E}]\mathrm{d}V \tag{10}$$

1.2 散度条件

通过加入散度条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，经散度校正后，式(10)可表示为：

$$F[\boldsymbol{E}]=\frac{1}{2}\int_V[(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-k^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}-\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{E}]\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{E})^2\mathrm{d}V \tag{11}$$

则变分问题为：

$$\delta F[\boldsymbol{E}]=0 \tag{12}$$

2 有限元分析

2.1 单元分析

采用图 1 所示的网格剖分示意图进行网格剖分，在目标区域网格均匀剖分，外延区渐变稀疏网格剖分，以节省计算时间。

采用六面体单元对整个区域 Ω 剖分，8 个节点的编号和坐标见图 2(a)所示的母单元，图 2(b)所示为子单元，两者的对应关系为

$$x=x_0+\frac{a}{2}\xi,\quad y=y_0+\frac{b}{2}\eta,\quad z=z_0+\frac{c}{2}\zeta$$

式中：x_0、y_0、z_0 为子单元的中心；a、b、c 为子单元的三个边长。其微分关系表示为：

$$\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\mathrm{d}\xi,\quad \mathrm{d}y=\frac{b}{2}\mathrm{d}\eta,\quad \mathrm{d}z=\frac{c}{2}\mathrm{d}\zeta,$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{abc}{8}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

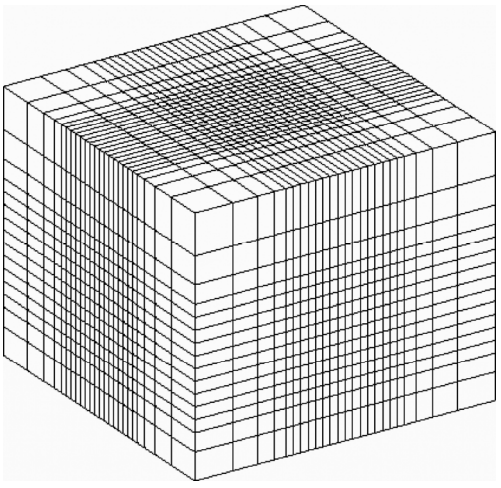


图 1 网格剖分示意图

Fig. 1 Schematic diagram of mesh dissecting

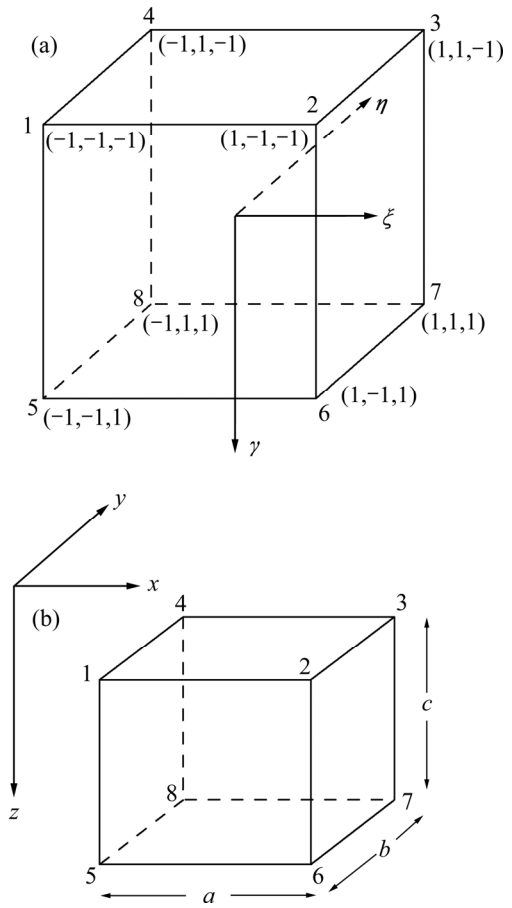


图 2 六面体剖分单元

Fig. 2 Hexahedral dissecting unit: (a) Parent element; (b) Subelement

构造形函数[14]：

$$\begin{cases} N_1^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_3^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_4^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_5^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_6^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_7^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_8^{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{cases} \tag{13}$$

统一表示：

$$N_i^{\mathrm{e}}=\frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \tag{14}$$

式中：ξ_i、η_i、ζ_i 是节点 i 在母单元中的坐标。

通过形函数，可以用单元各顶点的函数值来表示单元中的场分量：

$$\boldsymbol{E}_x^{\mathrm{e}}=\sum_1^8 N_j^{\mathrm{e}}E_{xj}^{\mathrm{e}}\ ,\quad \boldsymbol{E}_y^{e}=\sum_1^8 N_j^{\mathrm{e}}E_{yj}^{\mathrm{e}}\ ,\quad \boldsymbol{E}_z^{e}=\sum_1^8 N_j^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_{zj}^{\mathrm{e}} \tag{15}$$

即

$$\boldsymbol{E}_x=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_x\ ,\ \boldsymbol{E}_y=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_y\ ,\ \boldsymbol{E}_z=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_z \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}=(N_1,\cdots,N_8)$；$\boldsymbol{E}_x^{\mathrm{T}}=(E_{x1},\cdots,E_{x8})$；$\boldsymbol{E}_y^{\mathrm{T}}=(E_{y1},\cdots,E_{y8})$；$\boldsymbol{E}_z^{T}=(E_{z1},\cdots,E_{z8})$。

电场 $\boldsymbol{E}$ 是矢量，写成分量形式：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{E}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{E}_z\boldsymbol{e}_z$，则有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{E}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{E}_z\boldsymbol{e}_z) \tag{17}$$

$$\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\delta\boldsymbol{E}_x\boldsymbol{e}_x+\delta\boldsymbol{E}_y\boldsymbol{e}_y+\delta\boldsymbol{E}_z\boldsymbol{e}_z) \tag{18}$$

对式(12)离散，可以得：

$$\delta F[\boldsymbol{E}]=\frac{1}{2}\sum_{\Omega}\Big(\int_{V_{\mathrm{e}}}[(\nabla\times\delta\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-k^2\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}-\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}_s\cdot\delta\boldsymbol{E}]\mathrm{d}V+\int_{V_{\mathrm{e}}}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{E})\mathrm{d}V\Big)=0 \tag{19}$$

在子单元 e 内：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e}_z) \tag{20}$$

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{E}=\delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{e}_z) \tag{21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{22}$$

$$\nabla\cdot\delta\boldsymbol{E}=\delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{23}$$

式中：

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}_x^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E}_y^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E}_z^{\mathrm{T}})$；$\delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}=(\delta\boldsymbol{E}_x^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{E}_y^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{E}_z^{\mathrm{T}})$；

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\left[0,-(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial z})^{\mathrm{T}},(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial y})^{\mathrm{T}}\right]$；$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\left[(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial z})^{\mathrm{T}},0,-(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x})^{\mathrm{T}}\right]$；

$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=\left[-(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial y})^{\mathrm{T}},(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x})^{\mathrm{T}},0\right]$；

$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}=\left[(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x})^{\mathrm{T}},(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial y})^{\mathrm{T}},(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial z})^{\mathrm{T}}\right]$；

$(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial x})^{\mathrm{T}}=(\dfrac{\partial N_1}{\partial x},\cdots,\dfrac{\partial N_8}{\partial x})$；$(\dfrac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial y})^{\mathrm{T}}=(\dfrac{\partial N_1}{\partial y},\cdots,\dfrac{\partial N_8}{\partial y})$；

$(\dfrac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z})^{\mathrm{T}}=(\dfrac{\partial N_1}{\partial z},\cdots,\dfrac{\partial N_8}{\partial z})$；$\dfrac{\partial N_i}{\partial x}=\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\dfrac{2}{a}$；

$\dfrac{\partial N_i}{\partial y}=\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\dfrac{2}{b}$；$\dfrac{\partial N_i}{\partial z}=\dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\dfrac{2}{c}$，$i=1,\cdots,8$。

将式(20)、(21)代入式(19)的第一项积分，

$$\int_{V_\mathrm{e}}[(\nabla\times\delta\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})]\mathrm{d}V=\delta\boldsymbol{E}_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_\mathrm{e} \tag{24}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}=\int_{V_\mathrm{e}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}V_\mathrm{e}$

或

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{11} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{12} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{13}\\ \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{21} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{22} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{23}\\ \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{31} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{32} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{33}\end{bmatrix},$$

式中：

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{11}=\int_\mathrm{e}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{22}=\int_\mathrm{e}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{33}=\int_\mathrm{e}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}x+\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{21}=-\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;\quad \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{12}=(\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{21})^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{31}=-\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;\quad \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{13}=(\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{31})^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{32}=-\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;\quad \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{23}=(\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{32})^{\mathrm{T}}。$$

将式(17)、(18)代入式(19)的第二项积分，

$$\int_{V_\mathrm{e}}k^2\delta\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\delta\boldsymbol{E}_\mathrm{e}^{T}\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_\mathrm{e} \tag{25}$$

式中：

$$\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{11} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{22} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{33}\end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{11}=\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{22}=\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{33}=k^2\int_\mathrm{e}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

将式(18)代入式(19)的第三项积分，

$$\int_{V_\mathrm{e}}\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}_\mathrm{s}\cdot\delta\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\delta\boldsymbol{E}_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}_\mathrm{s}=\delta\boldsymbol{E}_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{26}$$

式中：$\boldsymbol{P}$为右端向量，即源项。

将式(22)、(23)代入式(19)的第四项积分，

$$\int_{V_\mathrm{e}}[(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{E})]\mathrm{d}V=\delta\boldsymbol{E}_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_\mathrm{e} \tag{27}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}=\int_{V_\mathrm{e}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V_\mathrm{e}$

即：

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{11} & \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{12} & \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{13}\\ \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{21} & \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{22} & \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{23}\\ \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{31} & \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{32} & \boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{33}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{11}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{12}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{13}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{21}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{22}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{23}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{31}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{32}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{33}=\int_\mathrm{e}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

最后，总体刚度矩阵可表示为：

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{e}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{11} & \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{12} & \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{13}\\ \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{21} & \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{22} & \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{23}\\ \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{31} & \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{32} & \boldsymbol{K}_\mathrm{e}^{33}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{11}-\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{11}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{11} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{12}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{12} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{13}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{13}\\ \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{21}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{21} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{22}-\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{22}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{22} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{23}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{23}\\ \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{31}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{31} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{32}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{32} & \boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}^{33}-\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{33}+\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}^{33}\end{bmatrix}$$

因此，式(19)可以化为：

$$\delta F[\boldsymbol{E}]=\delta \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})=0 \tag{28}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P} \tag{29}$$

2.2 单元矩阵的计算

借助 mathematica 和 maple 符号计算工具可求得：

$$\boldsymbol{M}_1=\int_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{bc}{36a}\begin{bmatrix}4&-4&-2&2&2&-2&-1&1\\-4&4&2&-2&-2&2&1&-1\\-2&2&4&-4&-1&1&2&-2\\2&-2&-4&4&1&-1&-2&2\\2&-2&-1&1&4&-4&-2&2\\-2&2&1&-1&-4&4&2&-2\\-1&1&2&-2&-2&2&4&-4\\1&-1&-2&2&2&-2&-4&4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2=\int_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{ac}{36b}\begin{bmatrix}4&2&-2&-4&2&1&-1&-2\\2&4&-4&-2&1&2&-2&-1\\-2&-4&4&2&-1&-2&2&1\\-4&-2&2&4&-2&-1&1&2\\2&1&-1&-2&4&2&-2&-4\\1&2&-2&-1&2&4&-4&-2\\-1&-2&2&1&-2&-4&4&2\\-2&-1&1&2&-4&-2&2&4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_3=\int_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{ab}{36c}\begin{bmatrix}4&2&1&2&-4&-2&-1&-2\\2&4&2&1&-2&-4&-2&-1\\1&2&4&2&-1&-2&-4&-2\\2&1&2&4&-2&-1&-2&-4\\-4&-2&-1&-2&4&2&1&2\\-2&-4&-2&-1&2&4&2&1\\-1&-2&-4&-2&1&2&4&2\\-2&-1&-2&-4&2&1&2&4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{11}=\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{22}=\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{33}=k^2\int_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\int_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{abc}{216}\begin{bmatrix}8&4&2&4&4&2&1&2\\4&8&4&2&2&4&2&1\\2&4&8&4&1&2&4&2\\4&2&4&8&2&1&2&4\\4&2&1&2&8&4&2&4\\2&4&2&1&4&8&4&2\\1&2&4&2&2&4&8&4\\2&1&2&4&4&2&4&8\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{11}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{22}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{33}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_3-\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}^{11}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{21}=\int_{\mathrm{e}}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{c}{12}\begin{bmatrix}0&-2&0&2&0&-1&0&1\\2&0&-2&0&1&0&-1&0\\0&2&0&-2&0&1&0&-1\\-2&0&2&0&-1&0&1&0\\0&-1&0&1&0&-2&0&2\\1&0&-1&0&2&0&-2&0\\0&1&0&-1&0&2&0&-2\\-1&0&1&0&-2&0&2&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{31}=\int_{\mathrm{e}}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{b}{12}\begin{bmatrix}0&-2&-1&0&2&0&0&1\\2&0&0&1&0&-2&-1&0\\1&0&0&2&0&-1&-2&0\\0&-1&-2&0&1&0&0&2\\-2&0&0&-1&0&2&1&0\\0&2&1&0&-2&0&0&-1\\0&1&2&0&-1&0&0&-2\\-1&0&0&-2&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{32}=\int_{\mathrm{e}}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{a}{12}\begin{bmatrix}0&0&-1&-2&2&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&2&0&0\\1&2&0&0&0&0&-2&-1\\2&1&0&0&0&0&-1&-2\\-2&-1&0&0&0&0&1&2\\-1&-2&0&0&0&0&2&1\\0&0&2&1&-1&-2&0&0\\0&0&1&2&-2&-1&0&0\end{bmatrix}$$

2.3 源的加载

本文采用伪 delta 函数模拟三维场源，其表达式如下[10]：

$$\delta(x_i-x_0)=\frac{1}{2\tau}\cdot$$
$$\begin{cases}0,\ (x-x_0)\leqslant -2\tau\\ [(x-x_0+2\tau)/\tau]^2/2,\ -2\tau<(x-x_0)\leqslant -\tau\\ \{-[(x-x_0+2\tau)/\tau]^2/2+2(x-x_0+2\tau)/\tau-1\},\\ \quad -\tau<(x-x_0)\leqslant \tau\\ \{[(x-x_0+2\tau)/\tau]^2/2-4(x-x_0+2\tau)/\tau+8\},\\ \quad \tau<(x-x_0)\leqslant 2\tau\\ 0,\ 2\tau\leqslant(x-x_0)\end{cases}$$

三维情况下，电偶极子源可表示为：

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)。$$

2.4 边界条件

采用第一类边界，即将均匀半空间条件下的电偶极子源在边界上的场值作为第一类边界条件加载到边界节点上[15−16]。

空中：

$$\begin{cases}E_{x0}=\dfrac{IL}{2\pi\sigma_1}\dfrac{1}{R^3}\left[\dfrac{3}{R^2}(x^2+z^2)+\mathrm{i}k_1z-2\right]\\ E_{y0}=\dfrac{IL}{2\pi\sigma_1}\left(\dfrac{3xy}{R^5}\right)\\ E_{z0}=(1-\mathrm{i})\dfrac{IL}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\sigma_1}}\dfrac{x}{R^3}\end{cases}$$

地下：

$$\begin{cases}E_{x1}=\dfrac{IL}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1z}\dfrac{1}{r^3}\left[\dfrac{3x^2}{r^2}-2\right]\\ E_{y1}=\dfrac{IL}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1z}\left(\dfrac{3xy}{r^5}\right)\\ E_{z1}=0\end{cases}$$

2.5 线性方程组的求解

设线性方程组 $Ax=b$，用对称逐步超松弛迭代(SSOR 法)的分裂矩阵为预处理矩阵 $\boldsymbol{M}$。

$$\boldsymbol{M}=(2-\omega)^{-1}(\boldsymbol{D}/\omega+\boldsymbol{L})(\boldsymbol{D}/\omega)^{-1}(\boldsymbol{D}/\omega+\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}$$

式中：$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对角阵；$\boldsymbol{L}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的严格下三角矩阵；$0<\omega<2$ 为松弛因子。

SSOR-PCG 法的迭代格式为：

$$\left.\begin{aligned}&\text{置初值 } \boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{g}^0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{h}^0=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{g}^0,\\ &\quad \boldsymbol{d}^0=-\boldsymbol{h}^0,\ k=0\\ &\mathrm{R:}\quad \delta=(\boldsymbol{g}^k,\boldsymbol{h}^k),\ \text{如果}\delta\leqslant\varepsilon,\ \text{则停止，否则}\\ &\quad \boldsymbol{\tau}_k=(\boldsymbol{g}^k,\ \boldsymbol{h}^k)/(\boldsymbol{d}^{\mathrm{k}},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{d}^k)\\ &\quad \boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\tau}_k\boldsymbol{d}^k,\ \boldsymbol{g}^{k+1}=\boldsymbol{g}^k+\boldsymbol{\tau}_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}^k\\ &\quad \boldsymbol{h}^{k+1}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{g}^{k+1},\ \boldsymbol{\beta}_k=(\boldsymbol{g}^{k+1},\ \boldsymbol{h}^{k+1})/(\boldsymbol{g}^k,\ \boldsymbol{h}^k)\\ &\quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{k}+1}=-\boldsymbol{h}^{k+1}+\boldsymbol{\beta}_k d^{\mathrm{k}},\ k=k+1\\ &\quad \text{转到 R}\end{aligned}\right\}$$

改进的 SSOR-PC：令 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}/\omega+\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{V}=(2-\omega)\boldsymbol{D}/\omega$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$，则：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{d},$$
$$\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{d}),$$
$$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{A}\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{d},2\boldsymbol{z}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{d}),(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}\boldsymbol{y})$$

上述迭代公式改为：

$$\left.\begin{aligned}&\text{置初值 } \boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{g}^0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}^0=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{g}^0,\ \boldsymbol{z}^0=-\boldsymbol{V}\boldsymbol{y},\\ &\quad \boldsymbol{d}^0=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}^0,\ k=0\\ &\mathrm{R:}\quad \delta=(\boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}^k),\ \text{如果}\delta\leqslant\varepsilon,\ \text{则停止，否则}\\ &\quad \boldsymbol{\tau}_k=(\boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}^k)/(\boldsymbol{d}^{\mathrm{k}},\ 2\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{V}\boldsymbol{d}^k)\\ &\quad \boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{\tau}_k\boldsymbol{d}^k,\\ &\quad \boldsymbol{y}^{k+1}=\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{\tau}_k(\boldsymbol{d}^k+\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{V}\boldsymbol{d}^k))\\ &\quad \boldsymbol{\beta}_k=(\boldsymbol{y}^{k+1},\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}^{k+1})/(\boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}^k)\\ &\quad \boldsymbol{z}^{k+1}=-\boldsymbol{V}\boldsymbol{y}^{k+1}+\boldsymbol{\beta}_k\boldsymbol{z}^k,\ \boldsymbol{d}^{k+1}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}^{k+1}\\ &\quad k=k+1\quad \text{转到 R}\end{aligned}\right\}$$

3 并行策略与模型实例分析

3.1 并行策略

采用粗粒度并行策略方式，对不同频率间实现完全对等并行[15]。并行策略如图 3 所示，从图可知，主进程读入模型文件分发各从进程，各从进程在计算过程中没有主次之分，任务负载相当均衡。

3.2 模型实例正演分析

3.2.1 均匀半空间及精度验证

为了验证本文算法的正确性和有效性，利用均匀半空间解析解与某个频率一条测线上和一系列频点的卡尼亚视电阻率进行对比，计算结果显示 f=700 Hz 的一系列测点上的卡尼亚视电阻率及相位对比情况：卡尼亚视电阻率相对误差最小值为 0.16%，最大值为 1.68%，平均为 0.64%；相位相对

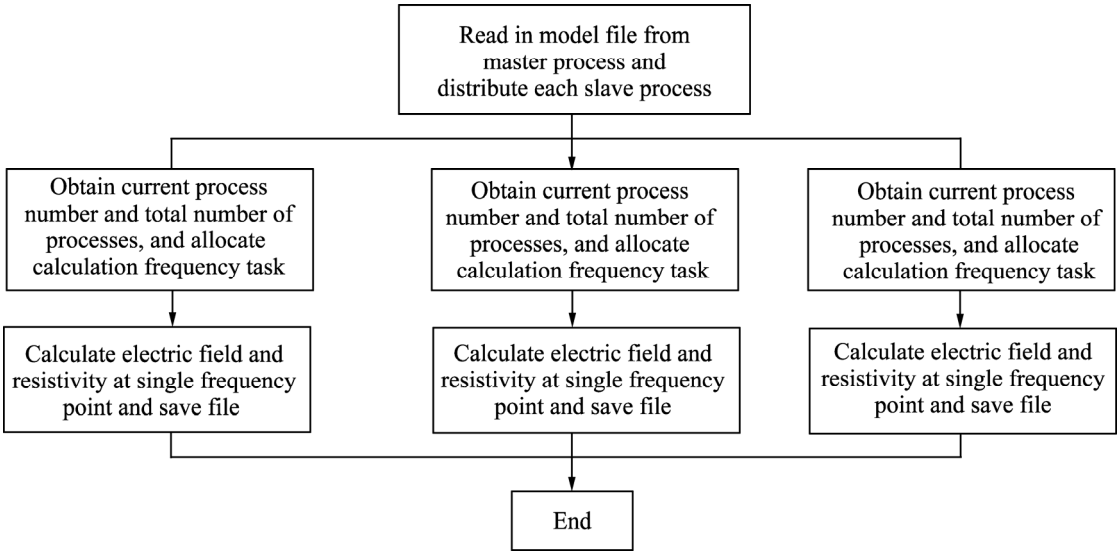


图 3　并行策略流程图

Fig. 3　Flow-process diagram of parallel strategy

误差最小值为 0.02%，最大值为 1.29%，平均为 0.59%。因此，可以满足正演计算的要求。通过测线的一系列频点上理论值与三维模拟对比情况，图 4 为模拟结果与理论曲线图，相对误差大致在 5%以内。

3.2.2　模型实例

图 5 为模型实例示意图，在区域存在一个异常体，电阻率为 10 Ω·m，背景电阻率为 100 Ω·m，异常体范围在 x 方向上从−260 m 到 260 m，源沿 x 方向布置，长为 400 m，电偶极源放置在 A(−200，0，0)和 B(200，0，0)处，垂直收发距为 5000 m，测点从−740 m 到 740 m。

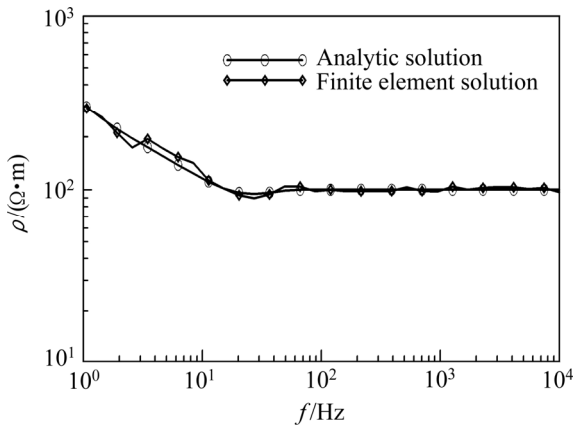


图 4　卡尼亚视电阻率的解析解与数值解对比

Fig. 4　Flow-process diagram of parallel strategy

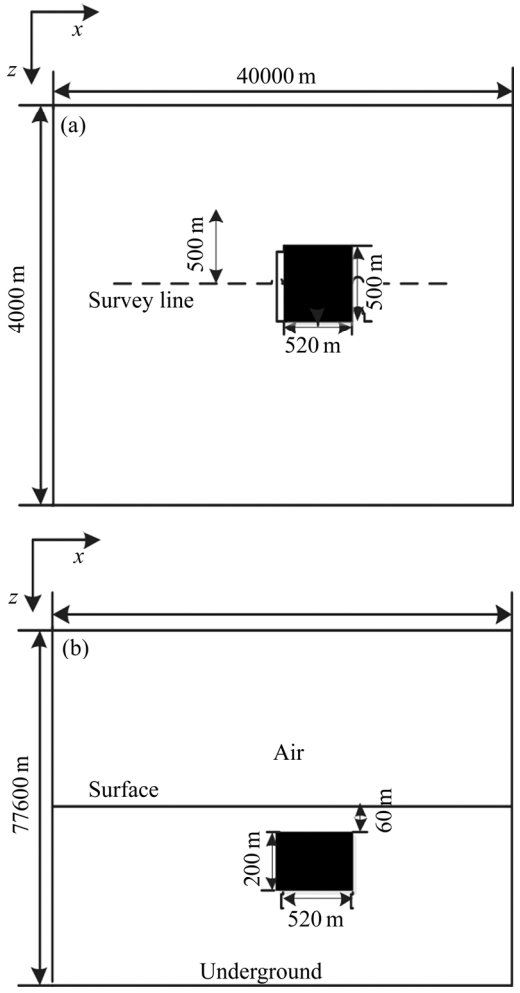


图 5　模型示意图

Fig. 5　Schematic diagram of model: (a) Plane figure; (b) Sectional drawing

图 6 为视电阻率拟断面图，从图中可以看出，异常的响应相对比较明显，计算结果表明了视电阻率响应宽度和异常体宽度基本相同。

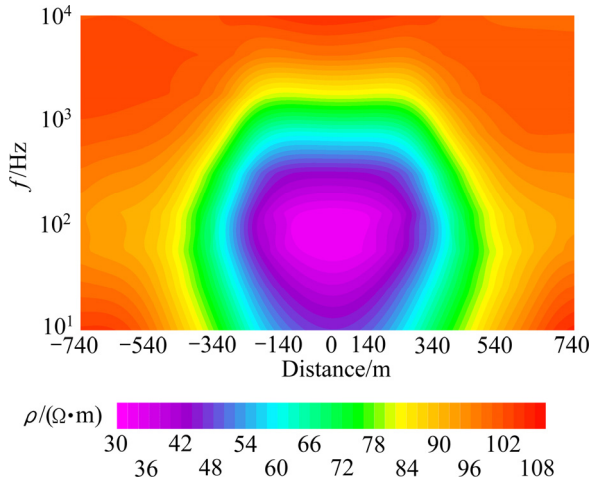


图 6 视电阻率拟断面图

Fig. 6 Apparent resistivity section map

图 7 为模型视电阻率切片图，共 9 个断面，每一个切片表示为一个断面，横向坐标标注了其收发距分别为：4800~5200 m 范围，测线线矩为 50 m，5000 m 测线为异常体中心，采用统一色标，从视电阻率切片图中可以看出，在 5000 m 测线上视电阻率异常强度达到了最强，往左右两边异常体强度呈现逐渐减弱趋势。

3.3 并行效率分析

按照 3.1 的并行策略，针对不同频点之间实行并行计算，从表 1 并行效率分析表可知，计算效率将近提升了 1 倍，这跟预期效果相当，因为三维有限元计算时间相对较长，而在单机上其通信时间花费并不是很多，且采用对等的负载均衡情况下的时间对比，其计算效率基本上能够跟计算核心数成正比的关系。

4 结论

1) 通过均匀半空间模型有限元数值解与解析解对比，结果显示有限元数值解与解析解基本吻合，在一定程度验证了本文频率域可控源电磁法三维有限元正演算法的准确性和有效性。

2) 对于大型稀疏线性方程组，采用 CSR 压缩存储方式只存储上半角非零元素，并利用 SSOR-PCG 方法来求解大型稀疏线性方程组，节省了内存并提高了运算速度。

3) 针对频率域可控源三维有限元数值模拟计算速度慢的问题，选用 MPI 技术，开发出基于 MPI 的频点之间并行计算的并行程序，由模型实例的正演计算及成图可知，计算效率成线性增长。

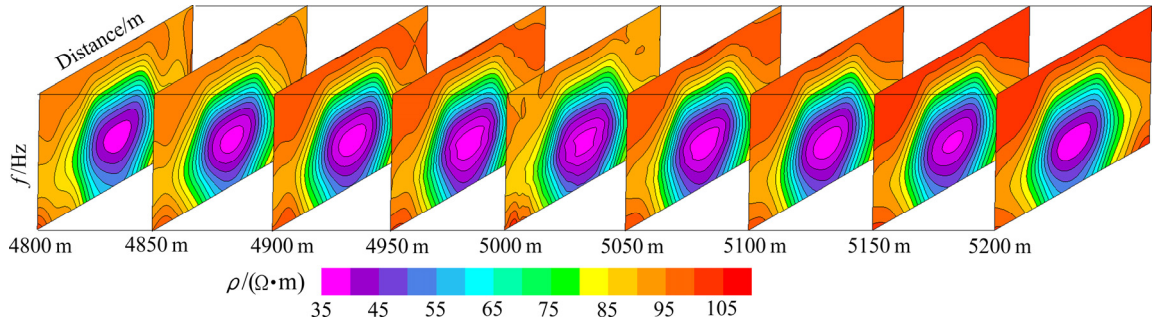


图 7 视电阻率切片图

Fig. 7 Apparent resistivity slicing map

表 1 并行效率分析表

Table 1 Parallel efficiency analysis table

Node	Freedom	Nonzero number	Cores number	Calculate time/s
86×53×42	191436×3	22714290	1	8109
86×53×42	191436×3	22714290	2	4083

REFERENCES

[1] 何继善编译. 可控源音频大地电磁法[M]. 长沙: 中南大学出版社, 1990: 32−69.
HE Ji-shan, trans. Audio-frequency of controlled source electromagnetic method[M]. Changsha: Central South University Press, 1990: 32−69.

[2] 汤井田, 何继善. 可控源音频大地电磁法及其应用[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2005: 6−46.
TANG Jing-tian, HE Ji-shan. Audio-frequency of controlled source electromagnetic method and its application in earth[M]. Changsha: Central South University Press, 2005: 6−46.

[3] 米萨克 N.纳比吉安. 勘查地球物理电磁法(第一卷:理论)[M]. 赵经祥, 王艳君, 译. 北京: 地质出版社, 1992: 320−339.
NABIGHIAN M. Electromagnetic methods in applied geophysics (theory)[M]. ZHAO Jing-xiang, WANG Yan-jun, trans. Beijing: The Geological Publishing House, 1992: 320−339.

[4] 翁爱华, 李大俊, 李亚彬, 等. 数据类型对三维地面可控源电磁勘探效果的影响[J]. 地球物理学报, 2015, 58(2): 697−708.
WENG Ai-Hua, LI Da-Jun, LI Ya-Bin, et al. Selection of parameter types in controlled source electromagnetic method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2015, 58(2): 697−708.

[5] 徐志锋, 吴小平. 可控源电磁三维频率域有限元模拟[J]. 地球物理学报, 2010, 53(8): 1931−1939.
XU Zhi-Feng, TUN Xiao-Beng. Controlled source electromagnetic 3-D modeling in frequency domain by finite element method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2010, 53(8): 1931−1939.

[6] 柳建新, 蒋鹏飞, 童孝忠, 等. 不完全 LU 分解预处理的 BICGSTAB 算法在大地电磁二维正演模拟中的应用[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2009, 40(2): 484−491.
LIU Jian-xin, JIANG Peng-fei, TONG Xiao-zhong, et al. Application of BICGSTAB algorithm with incomplete LU decomposition preconditioning to two-dimensional magnetotelluric forward modeling[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2009, 40(2): 484−491.

[7] 底青云, 王　若. 可控源音频大地电磁数据正反演及方法应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 74−84.
DI Qing-yun, WANG Ruo. Forward modeling and inversion of CSAMT data and its application in earth[M]. Beijing: Science Press, 2008: 74−84.

[8] 韩　波, 胡祥云, 黄一凡, 等. 基于并行化直接解法的频率域可控源电磁三维正演[J]. 地球物理学报, 2015, 58(8): 2812−2826.
HAN Bo, HU Xiang-yun, HUANG Yi-fan, et al. 3-D frequency-domain CSEM modeling using a parallel direct solver[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2015, 58(8): 2812−2826.

[9] KONG F N, JOHNSTAD S E, ROSTEN T, et al. A 2.5D finite-element modeling difference method for marine CSEM modeling in stratified anisotropic media[J]. Geophysics, 2008, 73(1): F9−F19.

[10] da SILVA N V, MORGAN J V, MACGREGOR L, et al. A finite element multifrontal method for 3D CSEM modeling in the frequency domain[J]. Geophysics, 2012, 77(2): E101−E115.

[11] 底青云, UNSWORTH M, 王妙月. 复杂介质有限元法 2.5 维可控源音频大地电磁法数值模拟[J]. 地球物理学报, 2004, 47(4): 723−730.
DI Qing-yun, UNSWORTH M, WANG Miao-yue. 2.5 D CSAMT modeling with the finite element method over 2D complex earth media[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2004, 47(4): 723−730.

[12] 汤井田, 张林成, 公劲喆, 等. 三维频率域可控源电磁法有限元−无限元结合数值模拟[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014, 45(4): 1251−1260.
TANG Jing-tian, ZHANG Lin-cheng, GONG Jin-ji, et al. 3D frequency domain controlled source electromagnetic numerical modeling with coupled finite- infinite element method[J]. Journal of Central South University (Natural Science Edition), 2014, 45(4): 1251−1260.

[13] TONG Xiao-zhong, LIU Jian-xin, et al. Three-dimensional forward modeling for magnetotelluric sounding by finite element method[J]. J Cent South University Technol, 2009, 16(1): 136−142.

[14] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994: 21−39.
XU Shi-zhe. Finite element method in geophysics[M]. Beijing: Science Press, 1994: 21−39.

[15] 都志辉. 性能计算并行编程技术—MPI 并行程序设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 78−89.
DU Zhi-hui. High-powered computing parallel programming technique — MPI parallel program design[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001: 78−89.

[16] 戴世坤, 王顺国, 张钱江, 等. 频率域可控源电磁法 2.5D 正反演[J]. 中国有色金属学报, 2013, 23(9): 2513−2523.
DAI Shi-kun, WANG Shun-guo, ZHANG Qian-jiang, et al. 2.5D forward and inversion of CSEM in frequency domain[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2013, 23(9): 2513−2523.

Three-dimensional FD-CSEM forward modeling parallel computing based on finite-element method

LIU Jian-xin[1, 2], LIU Peng-mao[1, 2], LIU Ying[3], TONG Xiao-zhong[1, 2]

(1. School of Geosciences and Info-physics, Central South University, Changsha 410083, China;
2. Hunan Key Laboratory of Non-ferrous Resources and Geological Hazard Detection, Changsha 410083, China;
3. Ministry of Education and College of Marine Geosciences Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this paper, a parallel algorithm of the three-dimensional(3D) modeling of frequency domain controlled-source electromagnetic(FCSEM) with FEM was implemented. First, from the Maxwell equations, its boundary value problem was derived, and then transformed into variational form from which finite-element linear equations were derived. The SSOR-PCG iterative method was used to solve large-scale linear equations. Aiming at the low speed of 3D finite element numerical simulation of electromagnetic field in frequency domain and the independent calculation of each frequency, MPI parallel technology was adopted to realize the parallel algorithm based on frequency point. Then the algorithm was used to simulate the uniform half space model, and compared the calculated results with the analytical solutions to verify the accuracy and validity of the algorithm. Finally, the example model was simulated with three-dimensional electromagnetic responses. The results indicate that the method can be applied for solving three-dimensional electromagnetic responses. The algorithm has been demonstrated, which can be effective to modeling the geo-electrical structures.

Key words: three-dimensional; FCSEM; finite element; MPI; parallel computing

Foundation item: Projects(41674080, 42074165) supported by the National Natural Science Foundation of China
Received date: 2018-01-16; **Accepted date:** 2020-05-08
Corresponding author: TONG Xiao-zhong; Tel: +86-18874896727; E-mail: csumaysnow@csu.edu.cn

(编辑 王 超)