



膏体输送水平悬臂管道不同流速下的 三维非线性振动分析

李 荣^{1,2}, 李翠平^{1,2}, 颜丙恒^{1,2}

(1. 北京科技大学 土木与资源工程学院, 北京 100083;

2. 北京科技大学 金属矿山高效开采与安全教育部重点实验室, 北京 100083)

摘 要: 充填管路末端水平管段的振动会极大地影响充填效果和充填效率, 针对这一问题, 为探究管道振动状态随管内膏体平均流速变化的规律, 结合现场实际, 构建管道振动分析模型, 建立了水平输送管段的三维非线性振动控制方程组。采用伽辽金法和 Runge-Kutta 法进行数值求解, 得到了输送管道自由端的动力学响应, 并通过时间历程图、分岔图、相平面图和运动轨迹图进行呈现。结果表明: 管内膏体无量纲流速 u_f 在增大的过程中存在一个临界流速 u_{cr} , 且两个方向上的临界流速不同, η_1 方向上 $u_{cr}=10.55$, η_2 方向上 $u_{cr}=0.001$ 。当 $u_f < u_{cr}$ 时, 管道最终会稳定下来; 当 $u_f > u_{cr}$, 管道自由端会发生颤振失稳, 其运动形式表现为周期振动和概周期振动, 且随着 u_f 的增大, 管道的振动幅度也会不断增大。

关键词: 膏体输送; 管道三维振动; 非线性; 平均流速

文章编号: 1004-0609(2020)-10-2492-11

中图分类号: TD853; TB533

文献标志码: A

随着国家对矿业开采安全性和环保性的重视, 膏体充填技术被广泛应用在矿山建设中, 其在保证矿山安全、环保、高效生产等方面都显示出巨大的优势, 成为当下矿业开采采用的主要绿色开采技术^[1-2]。管道输送作为膏体充填工艺的重要环节, 一定程度上决定着膏体充填的最终效果^[2]。膏体输送的过程可分为竖直输送段、水平输送段、充填采场段三个部分, 在竖直输送段及与其相接的水平输送段中, 管道被刚性固定, 这种固定方式使整个管道系统的刚性非常大, 振动被抑制。相比于前述两个管段, 入充填采场管段为保证其灵活性, 对管道固定较为宽松, 管道的振动较为强烈, 导致膏体送出管道时极不均匀, 影响了充填作业的高效性, 对充填效果产生了负面作用, 是一个典型的输流管道系统。关于输流管道系统的动力学行为自 20 世纪 80 年代以来一直是国内外学者研究的热点问题, 其在核电站、航空航天、海洋采矿工程等领域具有重要研究意义^[3-8]。在输流管的动力学行为研究中, 早在 1966 年, GREGORY 等^[4-5]就对悬臂输流管的失稳方式进行了研究, 得出悬臂管的失稳方式为颤振失稳这一重要结论, 而且在颤振发生前还可能会出现发散失稳。之后, 这一领域的研究成果不断涌

出, 1974 年 PAÏDOUSSIS 等^[6]建立了比较完整的二维线性振动控制方程, 但线性模型并不能完整的描述输流管道的动力学行为, 研究人员开始关注输流管道的非线性动力学行为, 如概周期振动、倍周期振动、混沌等。PAÏDOUSSIS 等^[7]采用伽辽金法对平面内竖直输流管道在非线性的约束下的动力学行为, 结果表明, 当伽辽金截断阶数 N 从 2 变化到 4 时, 数值解和实验结果的符合程度从良好变成优秀。徐鉴等^[8]将数值解和精确解进行了对比, 总结了模态截断数和无量纲流体质量 β_f 对系统临界流速的影响程度, 结果表明, 当 $N=2$ 且 $\beta_f=0.2$ 时就可以得到相对精确的数值解。王乙坤等^[9]也对平面内非线性约束下管道的混沌行为进行了研究。以上研究都集中于二维平面以内。WADHAM-GAGNON 等^[10]总结了前人的研究成果, 推导了竖直悬臂管道在重力、中间弹簧支撑、末端附加质量作用下的完整的控制方程, 并对其动力学行为进行了理论分析; 在此基础上, GHAYESH 等^[11]添加了一个单点外力进行了进一步的动力学分析, 并详细地对比了数值求解过程中不同初始条件下的结果, 表明不同的初始条件下管道的动力学行为会发生变化。

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2017YFC0602903)

收稿日期: 2019-09-02; 修订日期: 2019-12-25

通信作者: 李翠平, 教授, 博士; 电话: 010-62334756; E-mail: cpli@ustb.edu.cn

在输流管道系统中,管内流体是影响管道振动的一个重要因素。膏体是多尺度散体材料与水复合而成的无泌水、牙膏状结构流体,属于非牛顿流体的一种类型^[12]。膏体料浆在管道输送中的运动规律是国内外学者研究的重点问题,可以采用2参数的Bingham流体模型模拟管道横截面上膏体的速度分布规律。管内流动可分为柱塞流动区与剪切流动区两个区域,柱塞流动区域流速相等,而剪切流动区域流速沿管径方向逐渐降低^[13-14]。吴爱祥等^[12]在此基础上考虑避免滑移的影响,增加了滑移流动区域,结果表明,当滑移流动区很小时,速度分布规律与文献^[13-14]得到的规律相一致。

本文针对膏体自流输送条件下的入采场水平输送管路末端水平管道,进行数学建模、数值求解,在求解结果的基础上对管道自由末端进行动力学分析,着重研究管内膏体平均流速对管道振动规律影响,探究输送膏体管道在不同平均流速下的振动状态,为矿山膏体输送振动控制提供理论基础。

1 数学建模

1.1 问题描述

无约束膏体输送水平悬臂管道的布置情况如图1所示。设此段输送管道长为 L ,管道材质为硬质PVC,管道的内径为 D_{in} ,外径为 D_{out} ,管道的抗弯刚度为 EI ,密度为 ρ_p ,单位长度管道质量为 m ; P_0 为静态状态下管道中的一点; P 为管道运动后对应的 P_0 点。考虑到现场管道的长径比较大,管道在输送中表现出的非线性动力学行为更贴近于Euler-Bernoulli梁模型,且现场水平管道入口处与前段管道采用两个半钢圈牢固,末端自由,在此种边界条件下,在分析中将膏体输送水平管道看作Euler-Bernoulli悬臂梁模型处理,同时不考虑中间约束的影响,认为管道在轴线上不可压缩。

膏体是一种结构流体^[12,14],其密度为 ρ_f ,单位长度流体质量为 M 。另外,考虑自流输送的情形,不考虑此段管内膏体速度波动,不考虑管内多相流、壁面滑移等复杂情况的影响。基于管道输送物料平衡原理,输送管道入口处和出口处膏体的运动速度是相同的,压力对膏体的作用与流体和管壁的摩擦作用抵消,因此,在此段水平输送膏体的管道振动分析中,不考虑水平管道内膏体速度的复杂状态,假设膏体具有恒定流速 U 。除此之外,还有如下假设:①管道变形很小,但管道位移不受限制;②忽略管道的旋转惯性和剪切变形;③膏体不可压缩。

管道的运动状态可以分为无变形的初始状态和变形中的振动状态,为方便分析,在每一状态上建立坐标系,即固定坐标系I(Eulerian坐标系 (x, y, z))、跟随管道运动的坐标系II(Lagrangian坐标系 (X, Y, Z))和沿管道中心线自然坐标系 s ,如图1所示,管道位移在坐标系II中可以表示为 (u, v, w) 。这样,管道的不可压缩条件可表示为如下形式:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

或者

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

从不可压缩条件可以看到,3个方向的管道位移存在变换关系,利用式(1)和(2)中的变换关系,令管道的轴向位移隐式存在于控制方程中,则管道的三维振动可以只分析 y, z 方向上的振动情况,在之后的分析中,令

$$x' = \sqrt{1 - y'^2 - z'^2} \tag{3}$$

或

$$u' = \sqrt{1 - v'^2 - w'^2} - 1 \tag{4}$$

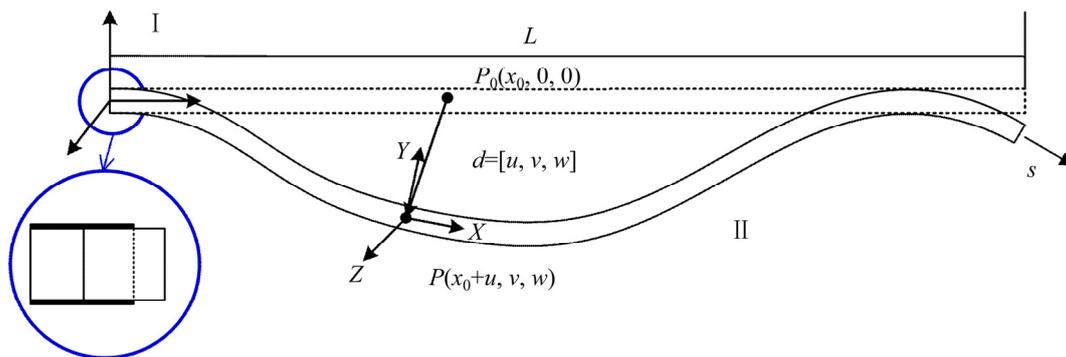


图1 管道布置图

Fig. 1 Layout of horizontal pipe conveying paste

1.2 控制方程

相比于两端铰支输流管道，悬臂输流管道系统是一个开放系统，整个系统存在能量的交换，所以不能直接应用 HALMITON 原理^[15-16]。KHEIRI 等^[16]对这一问题进行了详细的回顾和分析，给出了适用于开放系统的改进的 HALMITON 定理。在此基础之上，WADHAM-GAGNON 等^[10]采用适用于开放系统的 Hamilton 原理导出了具有中间弹簧和末端重力的垂直输流管道三维非线性振动的控制方程，本文在其控制方程基础上，考虑了无中间弹簧水平输流管道，将重力做功路径调整方向，消去中间弹簧和末端重力的影响，得到了描述膏体管道水平输送 3-D 振动的控制方程。

y 方向上:

$$\begin{aligned} &\eta_1'''' + \ddot{\eta}_1 + 2u_f \sqrt{\beta_f} \dot{\eta}_1' + u_f^2 \eta_1'' + \\ &2u_f \sqrt{\beta_f} \left[\eta_1'^2 \dot{\eta}_1' + \eta_1' \eta_2' \dot{\eta}_2' - \eta_1'' \int_{\chi}^1 (\eta_1' \dot{\eta}_1' + \eta_2' \dot{\eta}_2') d\chi \right] + \\ &u_f^2 \left[\eta_1'^2 \eta_1'' + \eta_1' \eta_2' \eta_2'' - \eta_1'' \int_{\chi}^1 (\eta_1' \dot{\eta}_1'' + \eta_2' \dot{\eta}_2'') d\chi \right] + \\ &(\eta_1'^2 \eta_1'''' + 4\eta_1' \eta_1'' \eta_1'''' + \eta_1''^3 + \eta_1' \eta_2' \eta_2'''' + 3\eta_1' \eta_2'' \eta_2'''' + \\ &\eta_1'' \eta_2' \eta_2'''' + \eta_1'' \eta_2''^2) + \eta_1' \int_0^{\chi} (\dot{\eta}_1^2 + \eta_1' \dot{\eta}_1' + \dot{\eta}_2^2 + \eta_2' \dot{\eta}_2') d\chi - \\ &\eta_1'' \int_{\chi}^1 \int_0^{\chi} (\dot{\eta}_1^2 + \eta_1' \dot{\eta}_1' + \dot{\eta}_2^2 + \eta_2' \dot{\eta}_2') d\chi d\chi + \gamma + O(\varepsilon^4) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

z 方向上:

$$\begin{aligned} &\eta_2'''' + \ddot{\eta}_2 + 2u_f \sqrt{\beta_f} \dot{\eta}_2' + u_f^2 \eta_2'' + \\ &2u_f \sqrt{\beta_f} \left[\eta_2'^2 \dot{\eta}_2' + \eta_2' \eta_1' \dot{\eta}_1' - \eta_2'' \int_{\chi}^1 (\eta_2' \dot{\eta}_2' + \eta_1' \dot{\eta}_1') d\chi \right] + \\ &u_f^2 \left[\eta_2'^2 \eta_2'' + \eta_2' \eta_1' \eta_1'' - \eta_2'' \int_{\chi}^1 (\eta_2' \dot{\eta}_2'' + \eta_1' \dot{\eta}_1'') d\chi \right] + \\ &(\eta_2'^2 \eta_2'''' + 4\eta_2' \eta_2'' \eta_2'''' + \eta_2''^3 + \eta_2' \eta_1' \eta_1'''' + 3\eta_2' \eta_1'' \eta_1'''' + \\ &\eta_2'' \eta_1' \eta_1'''' + \eta_2'' \eta_1''^2) + \eta_2' \int_0^{\chi} (\dot{\eta}_2^2 + \eta_2' \dot{\eta}_2' + \dot{\eta}_1^2 + \eta_1' \dot{\eta}_1') d\chi - \end{aligned}$$

$$\eta_2'' \int_{\chi}^1 \int_0^{\chi} (\dot{\eta}_2^2 + \eta_2' \dot{\eta}_2' + \dot{\eta}_1^2 + \eta_1' \dot{\eta}_1') d\chi d\chi + O(\varepsilon^4) = 0 \tag{6}$$

式(5)和(6)中的无量纲量如下:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= v/V, \eta_2 = w/L, \chi = s/L, \chi_s = L_s/L, \\ \tau &= t[EI/(m+M)L^4]^{1/2}, u_f = UL(m_f/EI)^{1/2}, \\ \beta_p &= m/(m+M), \beta_f = M/(m+M), \\ \gamma &= g(m+M)L^3/EI \end{aligned}$$

式中: $\eta_1(\chi, \tau)$ 和 $\eta_2(\chi, \tau)$ 分别为 y、z 方向上的无量纲位移; γ 为无量纲重力加速度; 点 和 撇 分别代表对无量纲时间 τ 和无量纲曲线坐标 χ 的导数; β_f 和 β_p 分别代表膏体和管道的单位长度无量纲质量; u_f 表示无量纲膏体流速; $O(\varepsilon^4)$ 为四阶精度项。

1.3 流速 U 的修正

控制方程式(5)和(6)中 u_f 由管道中流体流速 U 变换而来，在方程的推导过程中，认为流速沿管道界面均匀分布，但对膏体来说，它作为一种非牛顿流体，存在黏性，在管道输送中，速度沿截面不均匀。吴爱祥等^[12]将管道内膏体流区划分为柱塞流动区、剪切流动区和滑移流动区 3 个区域，其中，柱塞流动区和剪切流动区被称为主流区，如图 2 所示。

由图 2 可以看到，在柱塞流动区内，流速不变，在剪切流动区内流速随管道半径方向减小，在滑移区内流速快速减小，速度梯度极大。描述管道振动的控制方程中， U 值应该为平均流速，考虑到膏体速度在管道横截面上不均匀分布，忽略壁面滑移区，则平均流速的计算如下:

$$U = \frac{r_0^2 + D_{in}^2}{2D_{in}^2} U_c \tag{7}$$

式中: U_c 为柱塞区膏体流速; r_0 为柱塞区宽度; D_{in} 为管道内径。

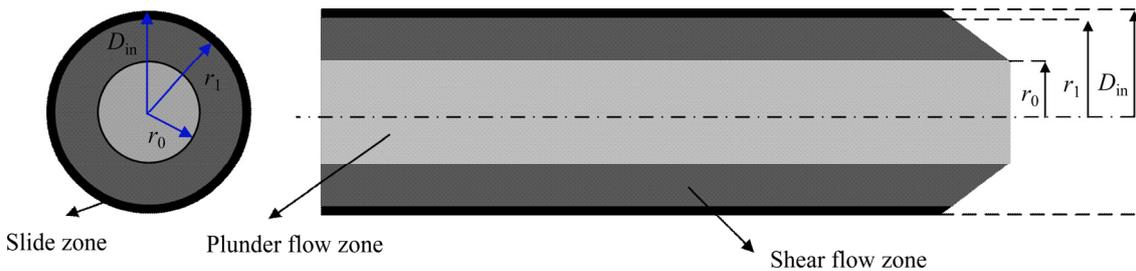


图 2 管内膏体横截面流速分布图

Fig. 2 Distribution of velocity of paste flow around pipe cross-section

2 方程求解

2.1 方程离散

膏体输送管道是一个连续系统,具有无限自由度,对控制方程进行伽辽金离散,将其转换为有限自由度系统进行数值求解。在求解中,选择 $N=2$ 即截断模态为2阶,理论上, N 越大,求解所得的解越精确;但在实际的求解过程中, N 增大时,求解程序的计算量快速增长;相对地,取 $N=2$ 时求解该方程可以得到一个相对精确的结果^[8]。计算过程中,无量纲位移可以表示为有限项无量纲悬臂梁形函数和广义响应函数乘积之和,如:

$$\begin{aligned} \eta_1(\chi, \tau) &= \sum_{r=1}^N b_r(\chi) p_r(\tau) \\ \eta_2(\chi, \tau) &= \sum_{r=1}^N c_r(\chi) q_r(\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $b_r(\chi)$ 、 $c_r(\chi)$ 为悬臂梁的无量纲形函数; $p_r(\tau)$ 、 $q_r(\tau)$ 为无量纲响应函数; N 为截断阶数,文中选 $N=2$ 。其中, $b_r(\chi)$ 和 $c_r(\chi)$ 需满足悬臂梁的边界条件,且两者描述的都是横向位移,所以两者是相同的,则:

$$\begin{aligned} b_r(\chi) &= c_r(\chi) = \cosh(\chi\lambda_r) - \cos(\chi\lambda_r) - \\ &\frac{\sinh(\lambda_r) - \sin(\lambda_r)}{\cos(\lambda_r) + \cosh(\lambda_r)} * (\sinh(\chi\lambda_r) - \sin(\chi\lambda_r)) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: λ_r 为特征根,满足 $\cosh \lambda_r \cos \lambda_r = -1$, 则 $\lambda_1 = 1.8751$, $\lambda_2 = 4.69409$ 。

将 $\eta_1(\chi, \tau)$ 、 $\eta_2(\chi, \tau)$ 带入无量纲化方程中对其进行离散,利用特征函数的正交性,分别左乘 $b_r(\chi)$ 和 $c_r(\chi)$, 然后在 $[0, 1]$ 上积分,这样 y 方向的方程如下:

$$\begin{aligned} m_{ij} \ddot{p}_j + c_{ij} \dot{p}_j + k_{ij} p_j + B_{ijkl} p_j p_k p_l + D_{ijkl} p_j p_k \dot{p}_l + \\ E_{ijkl} p_j \dot{p}_k \dot{p}_l + F_{ijkl} p_j p_k \ddot{p}_l + H_{ijkl} p_j q_k q_l + L_{ijkl} p_j q_k \dot{q}_l + \\ M_{ijkl} p_j \dot{q}_k \dot{q}_l + N_{ijkl} p_j q_k \ddot{q}_l + G_i = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

z 方向的方程为

$$\begin{aligned} m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j + B_{ijkl} q_j q_k q_l + D_{ijkl} q_j q_k \dot{q}_l + \\ E_{ijkl} q_j \dot{q}_k \dot{q}_l + F_{ijkl} q_j q_k \ddot{q}_l + H_{ijkl} q_j p_k p_l + L_{ijkl} q_j p_k \dot{p}_l + \\ M_{ijkl} q_j \dot{p}_k \dot{p}_l + N_{ijkl} q_j p_k \ddot{p}_l = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式(10)和(11)中各项系数是一致的,其中 G_i 是重

力项,只在 y 方向存在,计算方式如下:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_0^1 b_i b_j d\chi, \quad c_{ij} = 2u_f \sqrt{\beta} \int_0^1 b_i b_j' d\chi, \\ k_{ij} &= \int_0^1 b_i b_j'''' d\chi + u_f^2 \int_0^1 b_i b_j'' d\chi, \\ B_{ijkl} &= u_f^2 \int_0^1 b_i (b_j' b_k' b_l'' - b_j'' \int_\chi^1 b_k' b_l' d\chi) d\chi + \\ &\int_0^1 b_i (b_j' b_k' b_l'''' + 4b_j' b_k'' b_l'''' + b_j'' b_k'' b_l'''') d\chi, \\ D_{ijkl} &= 2u_f \sqrt{\beta} \int_0^1 b_i (b_j' b_k' b_l' - b_j'' \int_\chi^1 b_k' b_l' d\chi) d\chi, \\ E_{ijkl} &= F_{ijkl} = \int_0^1 b_i (b_j' \int_0^\chi b_k' b_l' d\xi - b_j'' \int_\chi^1 \int_0^\chi b_k' b_l' d\xi d\chi) d\chi, \\ H_{ijkl} &= u_f^2 \int_0^1 b_i (b_j' c_k' c_l'' - b_j'' \int_\chi^1 c_k' c_l' d\chi) d\chi + \\ &\int_0^1 b_i (b_j' c_k' c_l'''' + 3b_j' c_k'' c_l'''' + b_j'' c_k' c_l'''' + b_j'' c_k'' c_l'''') d\chi, \\ L_{ijkl} &= 2u_f \sqrt{\beta} \int_0^1 b_i (b_j' c_k' c_l' - b_j'' \int_\chi^1 c_k' c_l' d\chi) d\chi, \\ G_i &= \gamma \int_0^1 b_i d\chi, \\ M_{ijkl} &= N_{ijkl} = \int_0^1 b_i (b_j' \int_0^\chi c_k' c_l' d\xi - b_j'' \int_\chi^1 \int_0^\chi c_k' c_l' d\xi d\chi) d\chi \end{aligned}$$

2.2 求解前的分析

在数值计算中,选取的无量纲量的值为 $\gamma=0.1$ 、 $\beta_f=0.2$ 。本文采用4阶 Runge-Kutta 法对离散后得到的常微分方程组进行求解,得到 η_1 方向和 η_2 方向上的广义位移 $p_r(\tau)$ 和 $q_r(\tau)$, 管道在距离首端 χ_s 处的位移值 $\eta_1(\chi_s, \tau) = b_1(\chi_s) p_1(\tau) + b_2(\chi_s) p_2(\tau)$, $\eta_2(\chi_s, \tau) = c_1(\chi_s) q_1(\tau) + c_2(\chi_s) q_2(\tau)$ 。在常微分方程组求解中,为了得到最终的数值结果,初始条件必须给定,否则无法进行求解,而且在三维管道振动分析中,若只给定一个方向上的初始值,求解得到的结果仅在这一方向上运动,呈现二维平面振动特性。初始条件借鉴 GHAYESH 等^[11]对初始条件的处理方式,令 $p_1[0]$ 为 $\lambda_1^{-4} b_1^{-1}(1)$ 的任意倍数,考虑到现场的实际情况, η_2 方向的初始位移取值取 $p_1[0]$ 的百分之一,则 $p_1[0] = -0.04$, $p_2[0] = 0$, $p_1'[0] = 0$, $p_2'[0] = 0$, $q_1[0] = 0.0004$, $q_2[0] = 0$, $q_1'[0] = 0$, $q_2'[0] = 0$ 。

首先对 η_1 方向上重力的影响做分析,重力方向为 y 的负方向且不变,分别求解有无重力情况下管道振动情况并进行对比。从图3可以看出,时间历程图的变化规律相似,整个系统发展相似,但平衡位置由0偏移到了 $\eta_1 = -0.025$ 左右, PAÏDOUSSIS^[17]也指出,

$\gamma=0$ 和 $\gamma \neq 0$ 下管道的基本动力学行为是相似的。为了更清晰地描述管道的振动状态在速度变化下的规律,消除由无量纲重力太大而导致的管道屈曲影响数值解的稳定性,分析中先不考虑重力的影响,主要探究无量纲速度变化对管道动力学行为的影响。

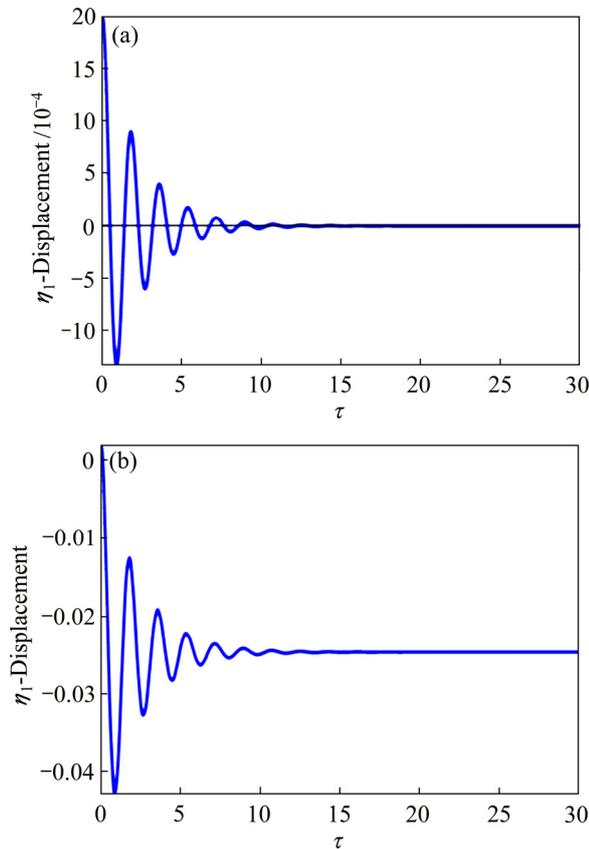


图3 有无重力情况下 $u_f=0.5$ 时的时间历程图

Fig. 3 Time trace diagrams with $u_f=0.5$ in presence or absence of gravity: (a) $\gamma=0$; (b) $\gamma=1$

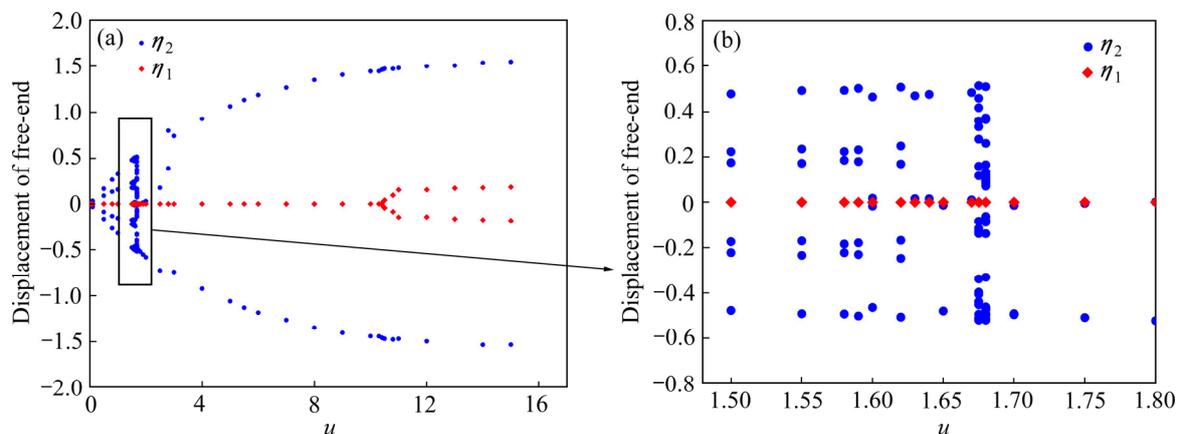


图4 以管内无量纲流速 u_f 为控制参数的管道自由端位移分岔图

Fig. 4 Bifurcation diagrams of free-end displacement using dimensional velocity in pipe as control parameter

3 求解结果与分析

无量纲控制方程采取截断阶数 $N=2$ 进行伽辽金离散后,偏微分方程被化为4个描述输送膏体管道系统常微分方程,不考虑重力的影响,对其进行数值求解,求解的结果采用时间历程图、相平面图、运动轨迹图和分岔图来呈现。其中,时间历程图能完美地表现膏体输送管道在某一点的振动幅值随时间的变化情况,但其无法清晰描述管道振动速度和管道位移的相关关系;相平面图以位移为横坐标、速度为纵坐标,表达管道自由末端位移和速度随时间的变化,箭头的指向系统整体发展趋势的方向;运动轨迹图以两个方向上的位移分别作为坐标轴,显示了管道自由端的运动轨迹;分岔图可以从整体上给出管道自由末端的位移随控制参数无量纲流速 u_f 的变化规律,但不能清晰的描述某一特定点的振动状态。文中的图像如未特别说明,皆表示的是管道自由端处的振动响应图像。

文中主要研究无量纲速度 $0 \sim 16$ 以内、无量纲时间 $0 \sim 200$ 之内的管道自由末端位移响应情况,管道整体的运动情况在分岔图中给出。分岔图中管道自由端振动的位移在管道振动相对稳定时取得,忽略初始段不稳定的振动,当管道末端的速度为0时,即 $\dot{\eta}_1(1, \tau) = 0$ 和 $\dot{\eta}_2(1, \tau) = 0$ 时,记录此时的管道末端的位移值,其可由下式计算得出: $\eta_1(1, \tau) = b_1(1)p_1(\tau) + b_2(1)p_2(\tau)$, $\eta_2(1, \tau) = c_1(1)q_1(\tau) + c_2(1)q_2(\tau)$,并以点的形式绘制在以速度为横坐标、末端位移为纵坐标的图中得到分岔图如图4所示。图4反映了管道自由端在 η_1 、 η_2 方向管道自由端位移响应随管内膏体无量纲平均流速 u_f 的变化规律。

悬臂管输流管系统是一非保守系统, 其失稳是由Hopf分岔引起的颤振失稳。由图4可以看到, 膏体输送管系统在 u_f 增大的过程中存在一个临界速度 u_{cr} , 当 $u < u_{cr}$ 时, 管道末端振幅随时间衰减, u_f 越大, 衰减速度越快, 位移最终为0, 整个系统最后趋于稳定; 当管内流速超过临界流速后, 管道末端振幅先减小, 然后开始增大到一个特定值, 开始周期振动, 这代表着发生了颤振失稳, 这一点称为Hopf分岔点。从图4中可以看到, η_1 方向上的 $u_{cr} \approx 10.55$ 。相比于 η_1 方向, η_2 方向上管道发生分岔现象很早, 可以看到在 $u_f \approx 0.005$ 左右、 $\tau = 6500$ 左右时, 管道就开始出现的多波峰概周期振动, 如图5所示。另外, 相比于 η_1 方向上的振动变化, 从图4右边小框图可以看到, u_f 在0.005~1.8区间内位移点十分密集, 此时管道在 η_2 方向上展现出更加复杂的动力学行为。

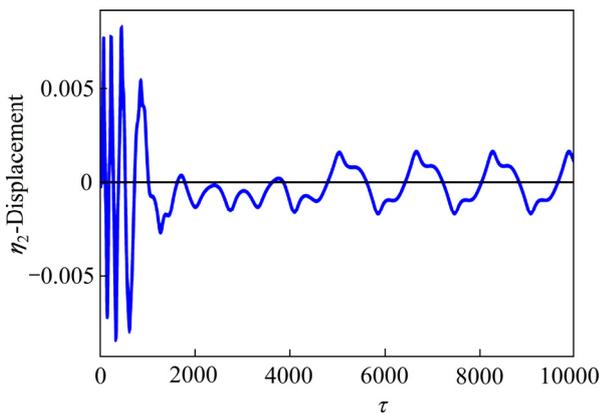


图5 $u_f=0.005$ 时 η_2 方向管道末端振动状态图
Fig.5 Vibration diagrams of free-end at various for $u_f=0.005$ in η_2 direction

η_1 方向上($x-y$ 平面)需要特别分析的速度范围为10~13区间内, η_2 方向上($x-z$ 平面)为1.5~3.0区间内, 两个方向上分析的重点并不在一个速度区域内, 为了更清晰地描述管道的动力学行为, 需对管道的三维振动状态分别从两个方向上的进行分析。

3.1 η_1 方向上($x-y$ 平面)振动分析

在速度达到分岔点之前, 即 $u_f < u_{cr}$ 时, 在 $u_f=0.001\sim 10$ 区间内, 对比图3(a)和6(a)发现, $u_f=0.5$ 、 $\tau \approx 14$ 时, 管道在 η_1 方向上的位移为0, 但在 $u_f=4$ 、 $\tau \approx 2.5$ 左右时管道位移已经为0。这一阶段中, 流速的增大引起的膏体输送管道系统阻尼的增大超过此时系统刚度减小的影响, 整体上, 管道在 η_1 方向振动衰减越来越快。在图6(b)中可以看到, 当 $u_f=9$ 时, $\tau \approx 0\sim 2$

范围内, 管道稳定之前又会出现一段不规则振动, 称为振动I。这段振动在 u_f 继续增大时仍然存在, 形态基本相似, 且这段波动的最大振幅增大, 但并没有对此方向上之后的发展有影响。振动I的发生在 $u_f=4$ 时就开始显现, 从其相图6(c)中可以看到, $\eta_1 \approx 0.005$ 时, 管道的速度会发生一个突变, 对应图6(a)中 $\tau \approx 0.3$ 时的一个阶梯上升, 这说明了振动I的发生。

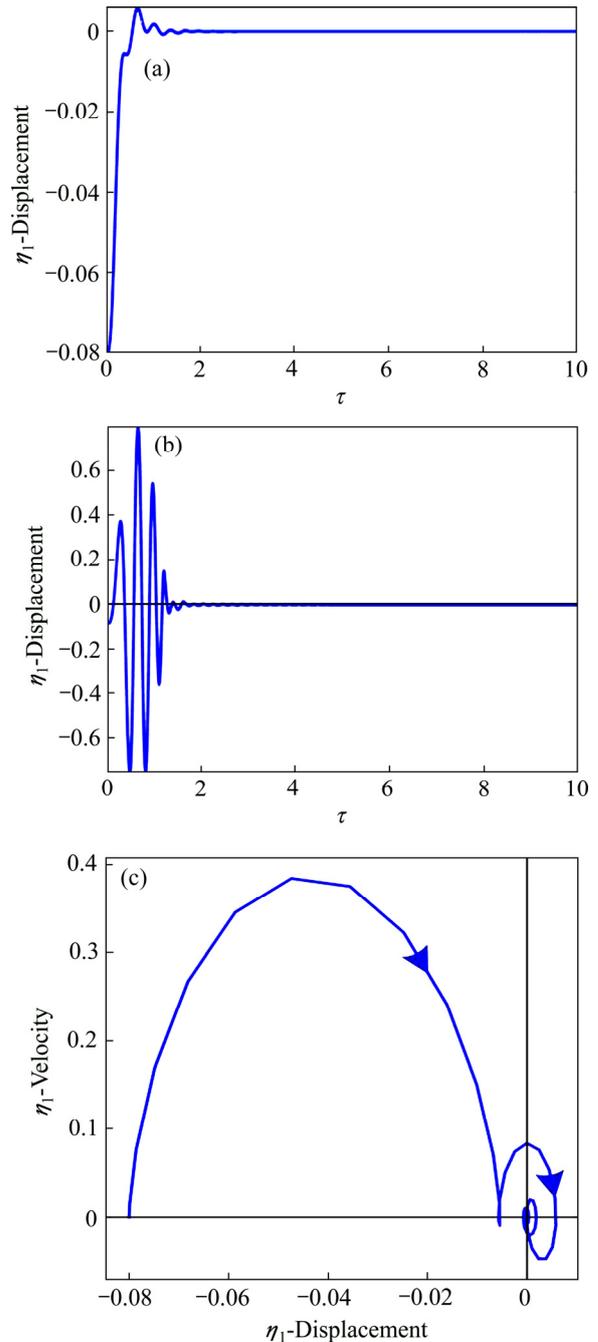


图6 不同流速下 η_1 方向管道末端振动状态图
Fig.6 Vibration diagrams of free-end at various flow velocity in η_1 direction: (a)–(b) Time history at $u_f=4$ and $u_f=9$; (c) Phase portrait at $u_f=4$

管内流速 $u_f=10$ 时, 管道在振动 I 之后不会像图 6(b)那样快速稳定, 而是呈现开始不断衰减的振动形式(见图 7(a)), 系统最终会稳定下来, 且随着速度的增大, 系统回到稳定所需的时间也越来越多。当 $u_f=10.55$ 左右时, 由图 7(b)中可以看出, 经历振动 I 后, 在 $\tau \approx 1.2$ 左右管道开始小幅周期振动。从图 7(c)和 7(d)可以清晰地看到, 振动 I 后管道末端存在振幅先增大然后趋于稳定, 且最终呈现极限环周期振动。随着流速的增大, $u_f=13$ 时, $\tau=90\sim 100$ 内, 其相图 7(f)相比图 7(e)环面增大, 说明此时发生了振幅时变的概

周期振动。当 u_f 在 13~16 范围内, 结合图 4 发现, 振动的振幅随速度增大而增大, 但并没有观察到混沌现象。

3.2 η_2 方向上($x-z$ 平面)振动分析

η_2 方向上管道的振动状态相对比较复杂, 临界速度很小; 超过临界速度后, $u_f=0.005$ 时, 管道在发生多波峰周期振动之前会先发生一段与振动 I 相似的不规律运动, 称为振动 II, 如图 5 中 $\tau=0\sim 4000$ 内的振动。

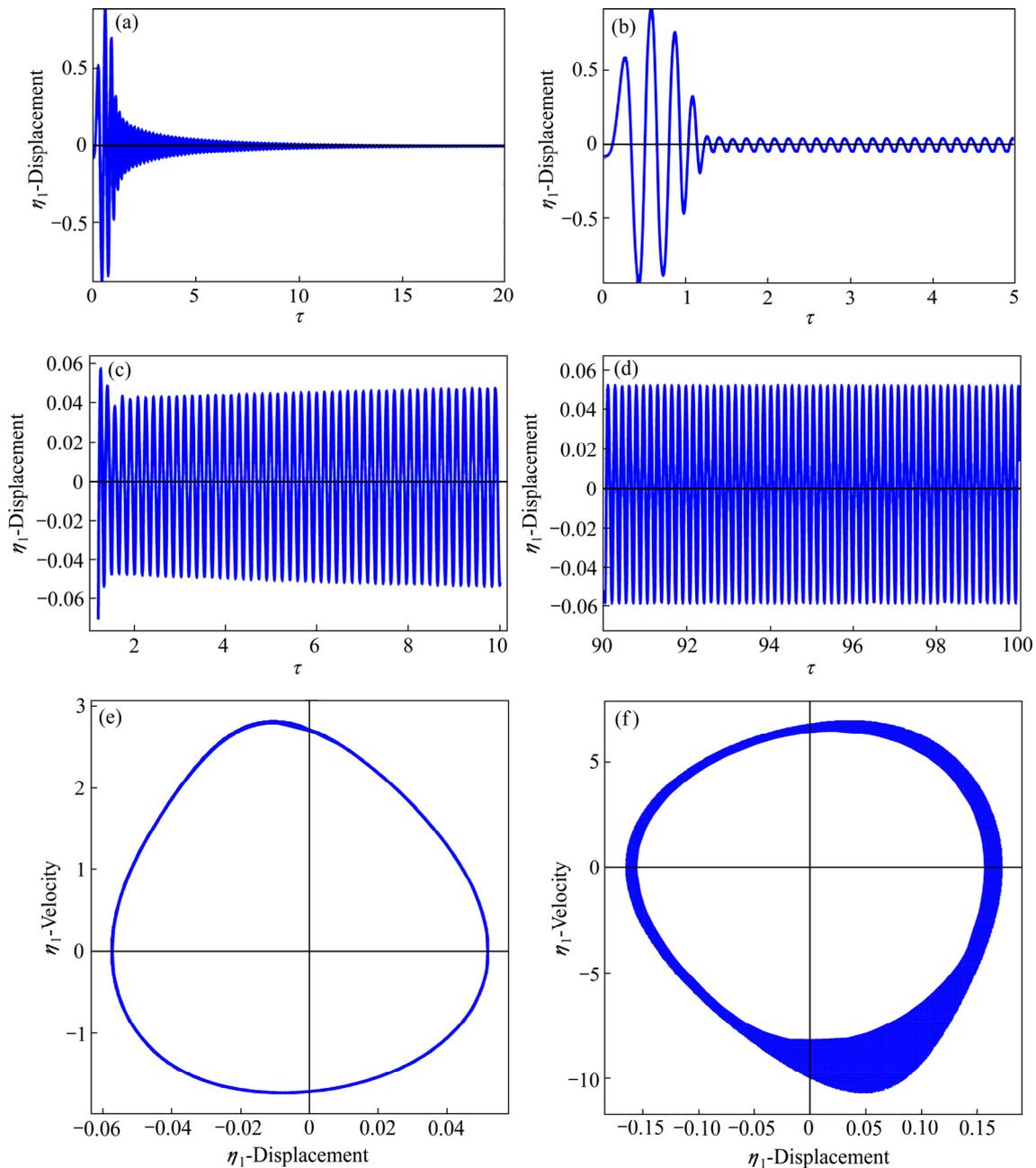


图 7 不同流速下 η_1 方向管道末端振动状态图

Fig. 7 Vibration diagrams of free-end at various flow velocity in η_1 direction: (a)–(d) Time history at $u_f=10$, $u_f=10.55(\tau=0\sim 10)$, $u_f=10.55(\tau=1.4\sim 10)$ and $u_f=10.55(\tau=90\sim 100)$; (e)–(f) Phase portraits at $u_f=10.55$ and $u_f=13(\tau=90\sim 100)$

随着速度增大, 达到周期振动的时间减少, 振动的频率明显加快。当 $u_f=1.59$ 时, 对比图 7(b)和 8(a) 可以看到, 振动形式与 η_1 方向不同, 呈现概周期振动, 此时振动的一个周期内有两个波峰和一个波谷, 在图 8(d)中也观察到存在 4 个速度为 0 的点。当 $u_f=1.6\sim 1.73$ 时, 概周期振动开始消失, 管道运动体现出值得注意的特性, 初始时间段内的运动状况和之后的管道周期振动在 η_2 方向上的平衡位置有很大关系。对比图 8(b)和(c)可以看到, 随着速度的增大, 平衡位置在正负间不断跳动。在这一速度区间内, 初始段振动 II 的振动非常杂乱且不稳定, 显示出一些混沌的特征, 但之后并没有出现混沌, 最终均回到周期振动状态。

当 u_f 从 1.73 增大到 3 时, 振动 II 不断消减且持续时间越来越短, $u_f=3$ 时振动 II 基本不再存在, 此时也预示着管道的振动平衡位置回到 0, 如图 9(a)所示。当 u_f 继续增大时, 平衡位置不变, 振动仍然保持极限环周期振动, 且周期振动的振幅随着速度的增大而增大。但在这个过程中, 对比图 9(b)和(c)可以看到, 极限环对称但形状在不断发生变化, 在 $u_f=5$ 时极限环

为很规则的椭圆形。当 $u_f=9$ 时, 从图 9(d)可以发现与在 η_1 方向上 $u_f=13$ 时类似的现象, 振动短时间内仍体现着极限环运动的特征, 并开始出现振幅变化的概周期振动。

3.3 管道自由末端振动维度分析

根据上述分析, 将两个平面内管道自由端运动随速度的变化规律总结在表 1 中, 其中, 横线代表稳定状态, 竖线代表多波峰概周期振动, 右下斜线(/)代表稳定周期振动, 右上斜线(/)代表振幅变化的概周期振动, 网格代表平衡位置变化的周期振动。

管道末端三维动力学行为通过两个平面内的运动叠加形成, 从整体上分析在平均速度不同时管道的平面和三维振动, 如表 2 所示。其中, 横线代表无振动, 竖线代表二维平面振动, 右上斜线(/)代表管道由二维向三维振动过渡, 网格代表三维振动。管内流速低于 0.001 时, 管道稳定, 对应于表 2 中的横线部分; 当管内膏体流速超过 η_2 方向临界流速发生失稳时, η_1 方向上此时还未失稳; 等到 η_1 不再振动后, 只呈现 $x-z$

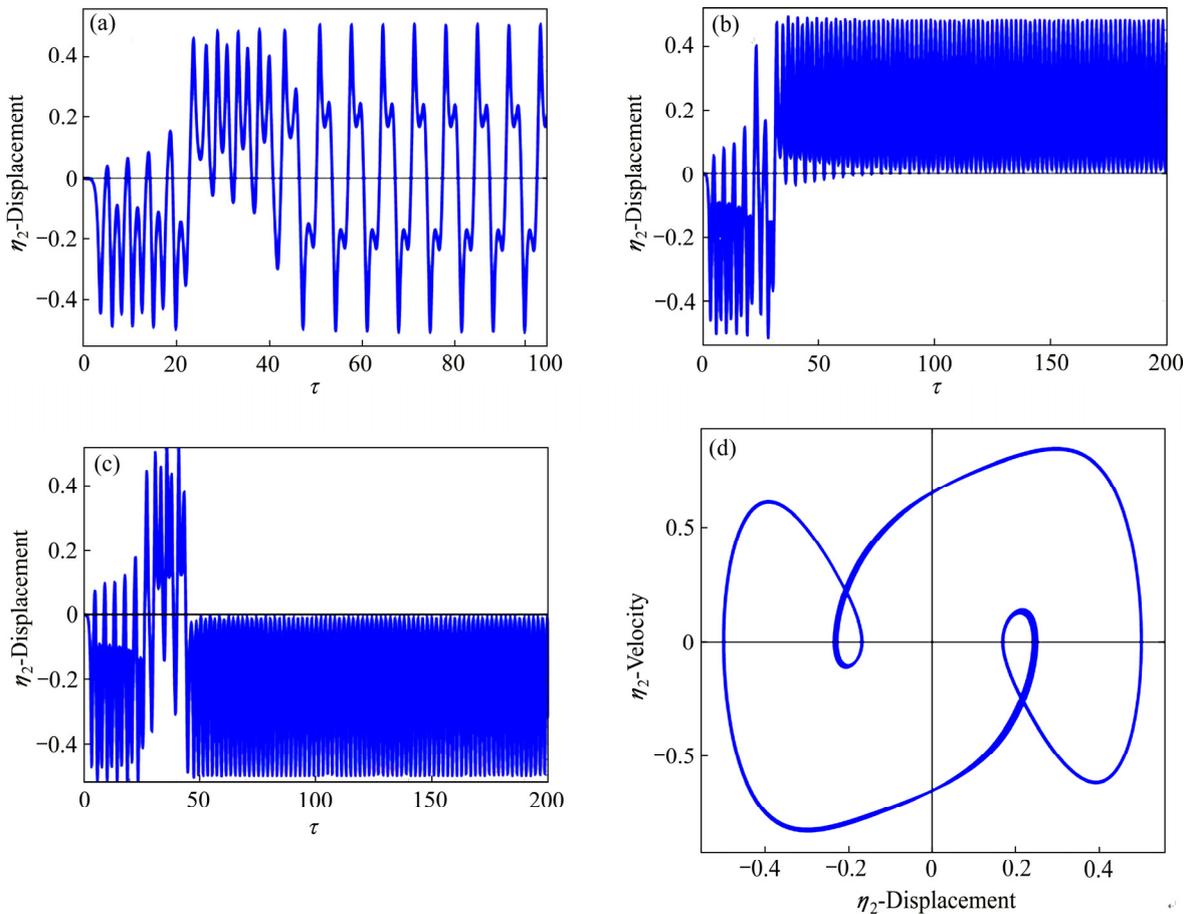


图 8 不同流速下 η_1 方向管道末端振动状态图

Fig. 8 Vibration diagrams of free-end at various flow velocity in η_1 direction: (a)–(c) Time history at $u_f=1.59$, $u_f=1.64$ and $u_f=1.73$; (d) Phase portrait at $u_f=1.59$

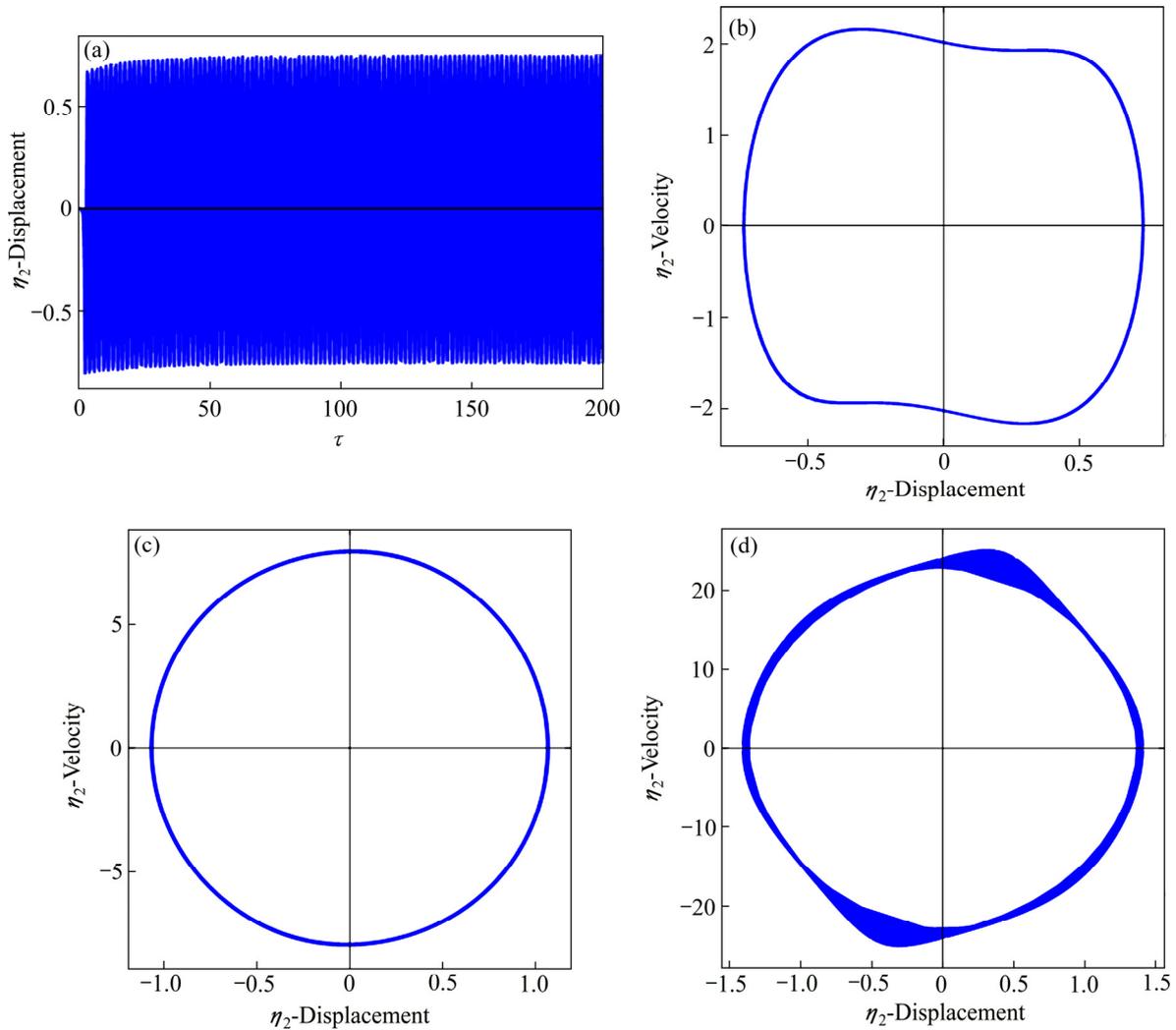


图9 不同流速下 η_2 方向管道末端振动状态图

Fig. 9 Vibration diagrams of free-end at various flow velocity in η_2 direction and $\tau=90-100$: (a) Time history at $u_f=3$; (b)–(d) Phase portraits at $u_f=3$, $u_f=5$ and $u_f=9$

表1 不同膏体流速下管道末端动力学行为

Table 1 Free-end dynamics of pipe at various flow velocity

u_f	η_1	η_2
0	Horizontal lines	Horizontal lines
0.001	Horizontal lines	Horizontal lines
0.005	Horizontal lines	Vertical lines
1.59	Horizontal lines	Vertical lines
1.64	Horizontal lines	Diagonal lines (top-left to bottom-right)
1.675	Horizontal lines	Diagonal lines (top-left to bottom-right)
1.7	Horizontal lines	Diagonal lines (top-left to bottom-right)
3	Horizontal lines	Diagonal lines (top-left to bottom-right)
6	Horizontal lines	Diagonal lines (top-left to bottom-right)
9	Horizontal lines	Cross-hatch pattern
10.55	Diagonal lines (top-left to bottom-right)	Cross-hatch pattern
13	Cross-hatch pattern	Cross-hatch pattern

表2 不同速度下管道末端二维或三维振动表

Table 2 2D or 3D vibration of pipe free-end at various flow velocity

u_f	(2D or 3D)
0	Horizontal lines
0.001	Vertical lines
0.005	Vertical lines
5	Vertical lines
10	Diagonal lines (top-left to bottom-right)
10.55	Cross-hatch pattern
13	Cross-hatch pattern

平面内的二维振动，对应于表 2 中的竖线部分。当 $u_f=10-10.55$ 时，在 η_2 方向上会出现衰减的位移，在管道末端位移未回到 0 时，可以观察到图 10(a) 中环形

的三维振动,对应于表2中右上斜线部分。当速度超过 η_1 方向上的临界流速后,管道末端呈现三维振动,运动轨迹图如图10(b)所示,为一个折“8”形的极限环运动,对应于表2中的网格部分。

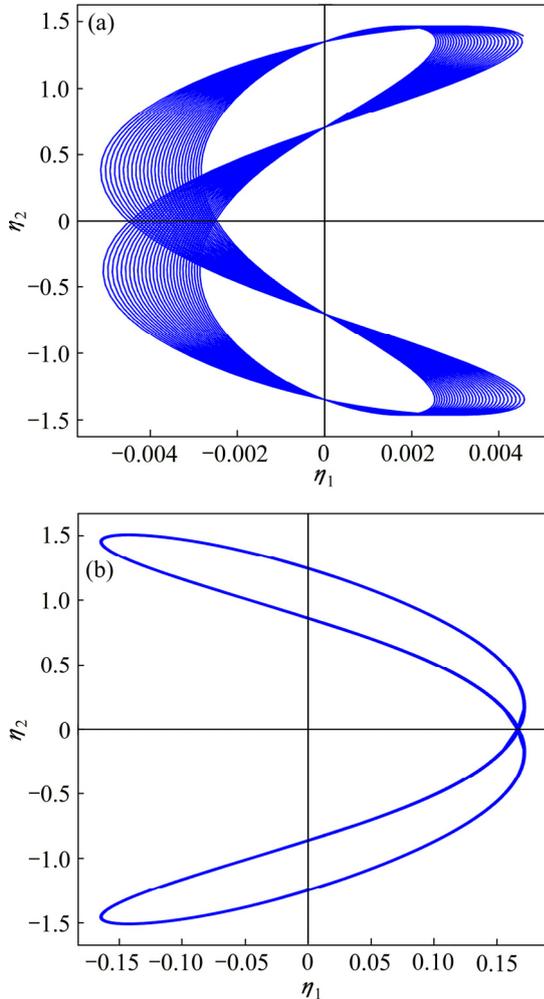


图10 管道自由端三维运动轨迹图

Fig. 10 3D oscillation trajectories of free-end of pipe: (a) $u_f=10.3$; (b) $u_f=13$

4 结论

1) 当无量纲平均流速 $u_f < 0.001$ 时,管道稳定;
 $u_f \approx 0.005$ 时, $x-y$ 平面内稳定, $x-z$ 平面颤振失稳,开始出现多波峰概周期振动;随着速度增大, $x-y$ 平面继续稳定, $x-z$ 平面周期振动频率和振幅增大。

2) $u_f > 1.59$ 时,初始时间段内管道自由端位移随时间的变化极不规律,稳定后的周期振动平衡位置在正负间跳动; $u_f > 1.7$ 时初始时间段内振动开始消减,且平衡位置开始慢慢靠近0点; $u_f = 3$ 时,平衡位置回

到0;速度继续增大,振幅变大,但依然呈现周期振动, $u_f = 9$ 左右出现振幅不稳定的概周期振动; $u_f = 10.55$ 时, $x-y$ 平面内也开始失稳,出现周期振动,膏体输送管道系统3维颤振失稳; $u_f = 13$ 时,两个平面内均出现振幅不稳定概周期振动。

REFERENCES

- [1] 吴爱祥,王洪江. 金属矿膏体充填理论与技术[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
WU Ai-xiang, WANG Hong-jiang. Theory and technology of paste backfilling on metal ore[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [2] 吴爱祥,杨莹,程海勇,陈顺满,韩悦. 中国膏体技术发展现状与趋势[J]. 工程科学学报, 2018, 40(5): 517-525.
WU Ai-xiang, YANG Ying, CHEN Hai-yong, CHEN Shun-man, HAN Yue. Status and prospects of paste technology in China[J]. Chinese Journal of Engineering, 2018, 40(5): 517-525.
- [3] NI Q, WANG Y, TANG M, LUO Y, YAN H, WANG L. Nonlinear impacting oscillations of a fluid-conveying pipe subjected to distributed motion constraints[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(1/2): 893-906.
- [4] GREGORY R W, PAÏDOUSSIS M P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid, I. Theory[C]// Proceedings of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1966, 293(1435): 512-527.
- [5] GREGORY R W, PAÏDOUSSIS M P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid, II. Experiments[C]// Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1966, 293(1435): 528-542.
- [6] PAÏDOUSSIS M P, ISSID N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, 33(3): 267-294.
- [7] PAÏDOUSSIS M P, SEMLER C. Nonlinear and chaotic oscillations of a constrained cantilevered pipe conveying fluid: a full nonlinear analysis[J]. Nonlinear Dynamics, 1993, 4(6): 655-670.
- [8] 徐鉴,王琳. 输液管动力学分析和控制[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
XU Jian, WANG Lin. Dynamics and control of fluid-conveying pipe system[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [9] 王乙坤,王琳. 分布式运动约束下悬臂输液管的参数共振研究[J]. 力学学报, 2019, 51(2): 558-568.
WANG Yi-kong, WANG Lin. Parametric resonance of a

- cantilever pipeline conveying fluid subjected to distributed motion constraints[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(2): 558–568.
- [10] WADHAM-GAGNON M, PAÏDOUSSIS M P, SEMLER C. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion[J]. Journal of Fluids and Structures, 2007, 23(4): 545–567.
- [11] GHAYESH M H, PAÏDOUSSIS M P. Three-dimensional dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid, additionally supported by an intermediate spring array[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2010, 45(5): 507–524.
- [12] 吴爱祥, 程海勇, 王贻明, 王洪江, 刘晓辉, 李公成. 考虑管壁滑移效应膏体管道的输送阻力特性[J]. 中国有色金属学报, 2016, 26(1): 180–187.
- WU Ai-xiang, CHEN Hai-yong, WANG Yi-ming, WANG Hong-jiang, LIU Xiao-hui, LI Gong-cheng. Transport resistance characteristic of paste pipeline considering effect of wall slip[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2016, 26(1): 180–187.
- [13] WU A, RUAN Z, WANG Y, YIN S, WANG S, WANG Y, WANG J. Simulation of long-distance pipeline transportation properties of whole-tailings paste with high sliming[J]. Journal of Central South University, 2018, 25(1): 141–150.
- [14] 颜丙恒, 李翠平, 吴爱祥, 王洪江, 侯贺子. 膏体料浆管道输送中粗骨料颗粒运动规律分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2019, 50(1): 172–179.
- YAN Bing-heng, LI Cui-ping, WU Ai-xiang, WANG Hong-jiang, HOU He-zi. Analysis of law of movement of coarse aggregate particles in pipeline transportation of paste[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2019, 50(1): 172–179.
- [15] KHEIRI M, PAÏDOUSSIS M P, DEL POZO G C, AMABILI M. Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends[J]. Journal of Fluids and Structures, 2014, 49: 360–385.
- [16] KHEIRI M, PAÏDOUSSIS M P. On the use of generalized Hamilton's principle for the derivation of the equation of motion of a pipe conveying fluid[J]. Journal of Fluids and Structures, 2014, 50: 18–24.
- [17] PAÏDOUSSIS M P. Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow (Vol.1)[M]. London: Academic Press, 2014.

Analysis of three-dimensional nonlinear vibration of horizontal cantilevered pipeline conveying paste at various flow velocity

LI Rong^{1,2}, LI Cui-ping^{1,2}, YAN Bing-heng^{1,2}

(1. School of Civil and Resource Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. State Key Laboratory of High-Efficient Mining and Safety of Metal Mines,

Ministry of Education, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: In the process of paste-filling, the violent vibration of the horizontal pipeline conveying paste close to paste-filling area tends to affect the effect of filling and efficiency greatly. To investigate the effect of paste average flow velocity on vibration, the analysis model was obtained for the horizontal pipeline conveying paste according to the actual condition on site. Based on this, the governing equations for nonlinear three-dimensional dynamics were deduced. By the Galerkin discretization and the Runge-Kutta algorithm, the equations were solved numerically and the dynamic responses of free-end which were presented by time trace, bifurcation diagram, phase-plane diagram and oscillation trajectories were obtained. The numerical results show that there is a critical flow velocity which is different in two dimensions when non-dimensional velocity of paste u_f increases, and u_{cr} is 10.55 in η_1 , u_{cr} is 0.001 in η_2 . It also shows that the pipe is stable as $u_f < u_{cr}$. When $u_f > u_{cr}$, the pipe loses stability via flutter, meanwhile, the period and quasi-period vibration are observed. Moreover, the amplitude of vibration increases as u_f increases.

Key words: paste transportation; three-dimensional vibration of pipeline; nonlinear; average flow velocity

Foundation item: Project(2017YFC0602903) supported by the National Key Research and Development Program of China

Received date: 2019-09-02; **Accepted date:** 2019-12-25

Corresponding author: LI Cui-ping; Tel: +86-10-62334756; E-mail: cpli@ustb.edu.cn

(编辑 龙怀中)