2015 年 11 月 November 2015

文章编号: 1004-0609(2015)-11-3182-08

# 基于最小梯度支撑的 2.5D 井地电位法正则化聚焦反演



张志勇1,周峰2,李泽林2

(1. 中南大学 地球科学与信息物理学院,长沙 410083;2. 东华理工大学 核资源与环境教育部重点实验室,南昌 330013)

摘 要:利用最小梯度支撑稳定因子进行 2.5D 井地电位聚焦反演。通过对边界近似处理、结合基于图论理论的 矩阵重排与填入元分析方法,实现一种快速的正演稀疏矩阵直接分解方法,提高了正演计算效率。为了突出对陡 变异常体边界的识别能力,引入最小梯度支撑稳定因子(MGS),采用重加权共轭梯度(RRCG)方法进行反演目标函 数求解。结果表明: MGS 具有良好的聚焦特征,RRCG 反演迭代过程稳定、收敛速度快。对"L-curve"选择正则 化因子的算法进行改进,避免了传统采用最大曲率计算时需要对离散数据求导引起的误差,同时该算法对于出现 多个拐点的"L-curve"也可正确选择正则化因子。

关键词: 井地电位法; 重加权共轭梯度法; L-curve; 最小梯度支撑稳定因子; LDL<sup>T</sup>分解算法 中图分类号: P631 文献标志码: A

# 2.5D focusing inversion for borehole-surface electrical data based on minimum gradient support function

ZHANG Zhi-yong<sup>1</sup>, ZHOU Feng<sup>2</sup>, LI Ze-lin<sup>2</sup>

 School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China;
 Key Laboratory of Nuclear Resources and Environment, Ministry of Education, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** The 2.5D focusing inversion for borehole-to-ground electric potential was implemented using minimum gradient support function. The boundary approximation, matrix rearrangement and fill-in element analysis algorithm based on graph theory were adopted to complete the fast algorithm of direct decomposition method for sparse matrix, the computational efficiency was improved. In order to improve the inversion ability to discriminate boundary of abnormal bodies, the minimum gradient support stability factor (MGS) was adopted. On the other hand, re-weighted regularized conjugate gradient (RRCG) inversion method was applied to solve inverse function. The results show that the stability factor is good at invert sharp boundary of underground bodies, RRCG method is stable and fast. For the rapid selection of the most suitable regularization factor, the revised "L-curve" algorithm was studied. New method based on the simply principle of distance from point to line, the error caused by the derivation of discrete data was avoided when the regularization factor was calculated using the maximum curvature method, moreover, for multiple inflection point of the "L-curve", it also can select the best regularization factor.

**Key words:** borehole-surface electrical method; re-weighted regularized conjugate gradient; L-curve; minimum gradient support function; LDL<sup>T</sup> factorization

收稿日期: 2015-03-17; 修订日期: 2015-08-14

基金项目: 国家自然科学基金青年资助项目(41304055, 41304056, 41104074)

通信作者: 张志勇, 副教授; 电话: 18007910091; E-mail: zhyzhang78@hotmail.com

<u>3183</u> 数据反演,

直流电阻率法是矿产资源勘查、水资源调查的常 用方法之一,近年来特别是在环境与工程地球物理中 得到广泛应用。直流电阻率方法采用地表观测,通过 视电阻率曲线或拟断面图对地下目标体进行推断解 释。在某些情况下,由于测区、目标体电阻率差异的 限制,严重影响探测深度与分辨率,井地电法由于井 中电极的引入,大大改善了传统方法的不足,但是井 地电位方法难于采用视参数拟断面图表示,因此,资 料解释更依赖反演技术,当前井地电位正演与反演成 为了研究的热点<sup>[1-6]</sup>。SCRIBA<sup>[7]</sup>和 SPITZER<sup>[8]</sup>利用边 界元法实现了三维井地电位正演模拟; PRIDMORE 等<sup>[9]</sup>利用有限元法实现三维井地电位正演模拟;徐凯 军等[10]和王志刚等[11]采用有限差分实现了垂直线源 井地电位法三维正演模拟;戴前伟等<sup>[12]</sup>进行了井地电 位 2.5 有限元数值模拟异常分析; 柳建新等[13]进行了 坑道内的聚焦超前探测电阻率法有限元数值模拟研 究: LI 等<sup>[14]</sup>进行了地面和井中观测数据的三维反演研 究;柯敢攀等<sup>[15]</sup>应用非线性阻尼最小二乘迭代算法实 现了井地电法的三维正反演研究;吕玉增等[16]采用了 共轭梯度法求解最小二乘目标函数实现了井地三维激 电数据的快速反演;王志刚等<sup>[17]</sup>实现了 Born 近似快 速三维井地电法数据的反演;安然等[18]实现了井地三 维电阻率反演。

众所周知,地球物理反问题存在不稳定性与多解 性,正则化方法是得到稳定解的重要方法之一。正则 化方法通过在反演目标函数中引入稳定因子, 对模型 解空间进行约束,减少反问题的不适定性。地球物理 中常用的稳定因子形式有:最小模型约束、最大平滑 模型约束、模型总变化量约束、最小支撑约束、最小 梯度支撑约束等。CONSTABLE 等<sup>[19]</sup>、SMITH 等<sup>[20]</sup> 和 ZHDANOV 等<sup>[21-22]</sup>成功地将最大平滑模型约束应 用到地球物理反演解释,其中,以 CONSTABLE 等<sup>[19]</sup> 和DEGROOT-HEDLIN等<sup>[23]</sup>提出的OCCAM反演算法 应用最为广泛。RUDIN等<sup>[24]</sup>在对图像边界的识别研究 中提出了模型总变化量约束,该方通过模型参数梯度 在定义域中 L<sub>1</sub> 范数最小进行约束, 识别陡变边界; GAO 等<sup>[25]</sup>将模型总变化量约束应用到生物荧光成像 中; BURSTEDDE 等<sup>[26]</sup>在一维全波场反演中也采用了 模型总变化量约束;韩波等[27]结合模型总变化量 和经典正则化方法的优点,实现了电阻率成像的 混合正则化反演算法。为了减少随机的局部不均匀体, LAST 等<sup>[28]</sup>提出最小体积支撑约束,应用于重力 资料反演解释;之后 GUILLEN 等<sup>[29]</sup>和 BARBOSA 等<sup>[30]</sup>对这一方法进行改进, 使约束条件具有方 向性; CANDANSAYAR<sup>[31]</sup>、MEHANEE 等<sup>[32]</sup>和 PORTNIAGUINE 等<sup>[33]</sup>将其引入 MT 数据反演; GRIBENKO 等<sup>[34]</sup>将其用于 CSEM 三维反演; VIGNOOLI等<sup>[35]</sup>分析了最小支撑稳定因子中β取值对 反演结果的影响。最小梯度支撑约束是一种有利突出 陡变边界实现聚焦反演的约束形式, 它是由 PORTNIAGUINE 等<sup>[36]</sup>提出并应用到地球物理反演 中;之后,ZHDANOV等<sup>[37]</sup>实现了重力的聚焦反演; SALAH<sup>[38]</sup>同样将此方法应用到井间电磁模型反演;刘 小军等<sup>[39]</sup>进行了二维大地电磁数据的聚焦反演算法 研究。

反演是井电位法数据处理的核心,直接影响后期 资料解释。为了提高陡变边界地质体的识别能力,本 文作者采用最小梯度支撑的稳定因子实现了聚焦反 演。为提高计算速度,采用了基于最小填入元思想的 稀疏矩阵 LDL<sup>T</sup>分解算法;为了快速精确选择正则化 因子,研究"L-curve"改进算法,避免求曲线曲率过程 中对离散数据求导引起的误差;采用重加权共轭梯度 法(RRCG)求解正则化目标函数<sup>[36]</sup>,提高求解的稳定性 与收敛速度,且该方法只需在初始迭代时选择一次正 则化因子,在后面的迭代中自动调整。反演试算例表 明,该方法具有较好的陡变边界识别能力和良好的应 用前景。

# 1 井地电位正演理论

直流电阻率三维问题对地质体走向(z 方向)进行 傅里叶变换,得到 2.5D 井地电位的边值问题<sup>[40]</sup>,其 表达式为

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) - k^2 \sigma U = -\frac{I}{2} \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \in \Omega$$
$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \qquad \qquad \in \Gamma_s \quad (1)$$
$$\frac{\partial U}{\partial n} + k \frac{K_1(kr)}{K_0(kr)} U \cos \alpha = 0 \qquad \qquad \in \Gamma_{\infty}$$

式中: 区域  $\Omega$  为二维研究区域;  $\Gamma_s$ 、 $\Gamma_\infty$ 为二维区域的 边界( $\Gamma_s$ 为区域  $\Omega$  的地表边界,  $\Gamma_\infty$ 为区域  $\Omega$  的地下边 界);  $\sigma$  为电导率; r 为点电源到边界的距离; n 为边界 外法向方向; k 为傅氏变换波数;  $\alpha$  为边界外法向方向 与供电点到边界矢量夹角;  $K_0$ 、 $K_1$ 分别为零阶、一阶 第二类贝塞尔函数;  $(x_s, y_s)$ 表示 xy 平面上的供电点坐 标;  $\delta(x)$ 表示以 x 点为中心的一维狄拉克函数; I 为供 电点电流。

为了更好地模拟地下地质体的形态和提高正演计 算的精度,采用了三角单元双二次插值有限单元法求 (3)

解。式(1)的边值问题与求解式(2)的变分问题等价。

$$\boldsymbol{F}(U) = \int_{\Omega} \left[ \frac{\sigma}{2} (\nabla U)^2 + \frac{1}{2} k^2 \sigma U^2 \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{I}{2} \delta(x - x_s) \cdot (y - y_s) d\Omega \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma k \frac{K_1(kr)}{K_0(kr)} U^2 \cos \alpha d\Gamma$$
(2)

通过对式(2)进行离散,得到线性方程组:

#### KU=P

求解式(3)即可求得结点上傅氏域电位。通过傅里 叶反变换得到电位 *u*,研究工作采用八点滤波系数进 行傅里叶变换及反变换,正变换系数(*k<sub>m</sub>*)与反变换系 数(*g<sub>m</sub>*)如表1所列<sup>[41]</sup>。

表1 傅氏变换系数 k<sub>m</sub>和 g<sub>m</sub>

**Table 1**  $k_m$  and  $g_m$  parameters of Fouriers inverse transform

т	$k_m$	$g_m$
1	0.003694	0.007699
2	0.031109	0.028744
3	0.105288	0.071942
4	0.291071	0.181920
5	0.766626	0.468466
6	1.994081	1.210086
7	5.172940	3.147197
8	13.672040	8.763861

分析式(2)可知,如果将区域 Ω 分成目标区和边界 区,目标区为异常体存在的区域,其网格步长采用等 距剖分,边界区的网格步长采用指数递增的形式来模 拟无穷边界。由于采用指数扩边,供电点到边界的矢 径 r 相对计算区目标区足够大,因此,可采用目标区 中心到边界的矢径近似,这样刚度矩阵只与波数有关, 而与供电点无关。依据这一特点,为了提高计算的效 率,结合基于图论理论的矩阵重排与填入元分析算法, 设计了稀疏矩阵的 LDL<sup>T</sup>分解算法。对于确定的剖分 形式,只需一次基于最少填入元的符号分析<sup>[42]</sup>,对 于同一波数只需一次 LDL<sup>T</sup>分解算法,大大提高了正 演的计算速度为反演研究奠定了基础,具体计算流程 如图 1 所示。

# 2 井地电位聚焦反演

反演是井地电位资料解释的重要环节。为实现陡变 边界地质体反演,研究了基于最小梯度支撑稳定因子的 正则化反演技术。正则化因子的选择与目标函数的最优 化求解是正则化反演的两个关键环节,本文作者在 "L-curve"基础上提出了一种改进的"L-curve"方法,实 现了正则化因子快速选择;采用 RRCG 方法求解反演 目标函数,提高了反演过程的稳定性与计算效率。



图1 井地电位有限单元正演计算流程

Fig. 1 Flow chart of borehole-surface electrical numerical simulation using FEM

# **2.1** 基于最小梯度支撑的正则化反演 Tikhonov 正则化,

$$P(\alpha, \mathbf{m}) = \varphi^{d}(\mathbf{m}) + \alpha \varphi^{m}(\mathbf{m}) \to \min$$
(4)

式中:  $P(\alpha, m)$ 为目标函数;  $\alpha$ 为正则化因子 (Regularization parameter);  $\varphi^{d}(m)$ 为数据目标函数;  $\varphi^{m}(m)$ 为模型约束目标函数,也称稳定因子(stabilizer) <sup>[21]</sup>; m为模型参数。

通常采用实测数据与预测数据的距离来表示  $\varphi^{d}(m)$ ,即

$$\varphi^{d}(\boldsymbol{m}) = \left\| \hat{W}_{d}(A(\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{d}) \right\|^{2} = (A(\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} \hat{W}_{d}^{\mathrm{T}} \hat{W}_{d}(A(\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{d})$$
(5)

式中: $\hat{W}_d$ 为数据权重矩阵;A(m)正演函数;d为观测数据。

ZHDANOV 等<sup>[21]</sup>利用最小范数形式给出了一种 稳定因子的统一表示形式。最小模型稳定因子是最常 采用的稳定因子形式,它采用了当前模型和先验模型 之差的L<sub>2</sub>范数。模型约束目标函数的表达式为

$$\varphi^{m}(\boldsymbol{m}) = \left\| \hat{\boldsymbol{W}}_{m}(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{apr}) \right\|^{2} = (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{apr})^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{W}}_{m}^{T} \hat{\boldsymbol{W}}_{m}(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{apr})$$
(6)

式中: $m_{apr}$ 为先验模型; $\hat{W}_m$ 为模型权重矩阵。如果 以式(6)为标准形式,通过引入矩阵 $\hat{W}_e$ 则可以得到不 同稳定因子的统一表示形式<sup>[33]</sup>。

为实现陡变异常体的边界反演,PORTNIAGUINE 等<sup>[36]</sup>提出了最小梯度稳定因子:

$$s_{\text{MGS}}(\boldsymbol{m}) = \int_{V} \frac{\nabla \boldsymbol{m} \cdot \nabla \boldsymbol{m}}{\nabla \boldsymbol{m} \cdot \nabla \boldsymbol{m} + \beta^{2}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$$
(7)

式中: β 为聚焦因子。分析可知,式(7)作为稳定因子 将突出模型梯度的变化,从而实现聚焦反演。

为了利用式(7)统一表示稳定因子,采用式(7)构造 模型权重函数:

$$w_e(\mathbf{r}) = \hat{W}_e^{\text{MGS}} = \text{diag}\left[\frac{\nabla m(\mathbf{r})}{[\nabla m(\mathbf{r}) \cdot \nabla m(\mathbf{r}) + \beta^2]^{1/2} [m^2(\mathbf{r}) + e^2]^{1/2}}\right] (8)$$

式中: *m*(*r*)为模型参数分布函数; ∇*m*(*r*)为模型参数 梯度; *e* 为与计算机数值精度有关的一个很小正数。

然后将式(5)、(6)和(8)代入到式(4)中,有

$$P(\alpha, m) = (A(m) - d)^{\mathrm{T}} \hat{W}_{d}^{\mathrm{T}} \hat{W}_{d} (A(m) - d) + \alpha(m - m_{\mathrm{apr}})^{\mathrm{T}} (\hat{W}_{e} \hat{W}_{m})^{\mathrm{T}} (\hat{W}_{e} \hat{W}_{m})(m - m_{\mathrm{apr}})$$
(9)

即可得到基于最小梯度支撑稳定因子的正则化反演目标函数。

#### 2.2 重加权共轭梯度法(RRCG)

采用重加权共轭梯度法求解式(9)表示最优化问题,该方法在每一次迭代过程中利用前一次计算得到的模型向量重新计算权重矩阵 $\hat{W}_e$ ,令 $\hat{W}_e = \hat{W}_{en}(m_n), m_n$ 为第 n 次迭代的模型向量。重加权共轭梯度法模型更新为

$$\boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{m}_n + \delta \boldsymbol{m} = \hat{\boldsymbol{m}}_n - k_n^{\alpha} \widetilde{\boldsymbol{I}}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_n)$$
(10)

式中:  $k_n^{\alpha}$  为线性搜索的迭代步长;  $\widetilde{I}^{\alpha}(m_n)$  为共轭梯 度搜索方向向量。

$$\widetilde{\boldsymbol{I}}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n}) = \boldsymbol{I}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n}) + \beta_{n}^{\alpha} \widetilde{\boldsymbol{I}}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n-1})$$
(11)

式中:  $I^{\alpha}(m_n)$ 为第 n 步迭代的最速下降方向向量, 可表示为

$$\boldsymbol{I}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n}) = \hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}_{n}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{W}}_{d}^{2} (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m}_{n}) - \boldsymbol{d}) + \alpha \hat{\boldsymbol{W}}_{en}^{2} \hat{\boldsymbol{W}}_{m}^{2} (\boldsymbol{m}_{n} - \boldsymbol{m}_{apr})$$
(12)

式中:  $\hat{F}_{m_n}^{\mathrm{T}}$ 为第 n 次迭代的偏导数矩阵。根据共轭梯度法搜索方向的正交性有

$$\beta_{n+1}^{\alpha} = \frac{\left\| \boldsymbol{I}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n+1}) \right\|^{2}}{\left\| \boldsymbol{I}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n}) \right\|^{2}}$$
(13)

为确保式(10)每一次搜索目标函数充分下降,线 性搜索的迭代步长为

$$k_{n}^{\alpha} = \frac{\widetilde{I}^{\alpha T}(\boldsymbol{m}_{n})I^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n})}{\widetilde{I}^{\alpha T}(\boldsymbol{m}_{n})(\hat{F}_{\boldsymbol{m}_{n}}^{T}\hat{W}_{d}^{2}\hat{F}_{\boldsymbol{m}_{n}} + \alpha \hat{W}_{en}^{2}\hat{W}_{m}^{2})\widetilde{I}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_{n})}$$
(14)  

$$\beta \mathcal{N}, \quad \mathfrak{L} n=0 \text{ bf}, \quad \tilde{q}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{I}}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_0) = \boldsymbol{I}^{\alpha}(\boldsymbol{m}_0) \tag{15}$$

为确保目标函数下降,可以利用稳定因子进行正则化因子自适应调整,

$$s^{\text{MGS}}(\boldsymbol{m}_{n+1}) = (\boldsymbol{m}_{n+1} - \boldsymbol{m}_{\text{apr}})^{\text{T}} \hat{W}_{e(n+1)}^{2} \cdot \hat{W}_{m}^{2}(\boldsymbol{m}_{n+1} - \boldsymbol{m}_{apr}) = \gamma s^{\text{MGS}}(\boldsymbol{m}_{n})$$
(16)

其中:

$$\gamma = \frac{(\boldsymbol{m}_{n+1} - \boldsymbol{m}_{apr})^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{W}}_{e(n+1)}^{2} \hat{\boldsymbol{W}}_{m}^{2} (\boldsymbol{m}_{n+1} - \boldsymbol{m}_{apr})}{(\boldsymbol{m}_{n} - \boldsymbol{m}_{apr})^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{W}}_{en}^{2} \hat{\boldsymbol{W}}_{m}^{2} (\boldsymbol{m}_{n} - \boldsymbol{m}_{apr})}$$
(17)

根据 y 可实现正则化因子的自动调整,即

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n \ (\gamma \le 1) \\ \alpha_n \ / \ \gamma \ (\gamma > 1) \end{cases}$$
(18)

#### 2.3 修正"L-curve"方法

正则化因子 a 是数据目标函数和模型约束函数的 加权系数,是反演的关键参数之一。HANSEN<sup>[43]</sup>提出 用"L-curve"(见图 2(a))来确定正则化因子,该方法通 过求取双对数坐标下  $\varphi^{d}(m) = \varphi^{m}(m)$ 曲线最大曲率 K 来确定正则化因子 a。双对数坐标下  $\varphi^{d}(m) = \varphi^{m}(m)$ 曲线曲率可表示为

$$\kappa = 2 \frac{\rho \eta}{\eta'} \frac{\lambda^2 \rho \eta' + 2\lambda \rho \eta + \lambda^4 \eta \eta'}{\left(\lambda^4 \eta^2 + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$
(19)

式中:  $\rho = \varphi^{d}(\mathbf{m})$ 、 $\eta = \varphi^{m}(\mathbf{m})$ ;  $\eta' \exists \eta \exists \alpha$ 的一阶 导数。在反演过程中,由于  $\eta$  是离散的,其导数只能 通过数值方法计算,精度不高,严重影响了  $\kappa$  值。另 外,在实际试算中发现双对数坐标下  $\varphi^{d}(\mathbf{m}) \exists \varphi^{m}(\mathbf{m})$ 曲线并不总是呈"L"形,很多情况下表现为两个拐点 (见图 2(b))。

针对上述情况,提出了"L-curve"的改进算法,其 基本原理是基于点与直线的关系,利用点到直线的距 离进行计算,算法具体步骤:



图 2 L-Curve 特征图

**Fig. 2** L-curve feature map: (a) One inflection point; (b) Two inflection points

1) 给出初始的正则化因子 { $\alpha_i$ } , 求解式(9)得到 { $m^{\alpha_i}$ } , 并计算对应的{ $(p_i,q_i) = (\lg \varphi^d(m^{\alpha_i}), \lg \varphi^m(m^{\alpha_i}))$ };

2) 令  $\beta_i = \lg \alpha_i$ , 对 {( $\beta_i, p_i$ )} 和 {( $\beta_i, q_i$ )} 分别作 3 次样条插值,分别将插值函数记为  $p(\beta)$  和  $q(\beta)$ ;

3) 取"L-curve"上的两个端点,计算直线表达式
 *M*(*Ax* + *By* + *C* = 0);

 4) 取"L-curve"上的任意点(*p<sub>k</sub>*,*q<sub>k</sub>*),将其带入直 线表达式 *M* 中,计算 {(*p<sub>k</sub>*,*q<sub>k</sub>*)|*Ap<sub>k</sub>* + *Bq<sub>k</sub>* + *C* < 0};</li>

5) 计算所有 (*p<sub>k</sub>*,*q<sub>k</sub>*) 到直线 *M* 的距离 {*d<sub>k</sub>*}, 筛选 出距离最大的点 *d<sub>k</sub>*;

 6) 在区间(α<sub>h-1</sub>, α<sub>h+1</sub>)加密剖分,作为初始值重新 计算步骤 1)~步骤 5),直到满足收敛条件。

改进的"L 曲线"算法,无需利用 $\varphi^{m}(m)$ 的导数信息,可以自动舍弃错误曲率点,提高了正则化因子的求取精度。

### 3 反演算例分析

#### 3.1 模型试算

均匀半空间中存在一个倒"L"型的低阻异常体(见 图 3),低阻异常体的电阻率为 50 Ω·m,背景电阻率为 100 Ω·m,在水平坐标 10 m 与 20 m 布设井中电极(共 32 个,每口井 16 个),地表布设 30 个电极。反演数 据由模型正演结果加入 2%随机噪声得到。分别采用 最小梯度支撑、最平滑模型及最小模型稳定因子进行 反演,反演断面如图 4 所示。各种稳定因子均能反映 低阻异常体的存在,最小梯度稳定因子得到的反演结 果相对其它稳定因子,边界更明显,并且背景电阻率 接近 100 Ω·m;其它两种稳定因子,反演断面存在多 处假异常,异常体边界的陡变程度受到井位置的影响, 离井越近边界越明显。





Fig. 3 Schematic diagram of model

 $\rho/(\Omega \cdot m)$ 0 105 (a) 95 -5 Depth/m 85 75 -1065 55 -15 5 10 15 20 25 30 Distance/m  $\rho/(\Omega \cdot m)$ 0 120 (b) -110 -100-5 Depth/m 90 80 -10 70 60 -15 50 0 15 20 25 30 5 10 Distance/m  $\rho/(\Omega \cdot m)$ 0 120(c) 110 100 -5 Depth/m 90 80 -1070 60 -15 50 0 10 15 20 25 30 5 Distance/m

图4 反演电阻率断面

**Fig. 4** Inversion resistivity sections: (a) Minimum gradient support; (b) Maximum smoothness; (c) Minimum norm

#### 3.2 某汉代墓葬区主剖面反演

文物保护单位对某汉代墓葬区进行保护性挖掘, 为确定墓室、陪葬坑、墓道的位置及是否存在古代盗 洞等情况,进行了直流电法勘探工作。在主剖面探测 过程中,利用一个垂向盗洞开展了井地电法测量,地 表采用 2.5 m 极距,共布置 60 个电极; 盗洞中采用 1.0 m 极距,共布置井中电极 8 个(电极位置见图 5,其中 部分在反演区外的地表电极未画出)。采用最小梯度稳 定因子的正则化反演目标函数,应用 RRCG 方法进行 了反演,反演电阻率断面如图 5 所示。

从地表地形推断,两处高程最高的地方(水平坐标 20~32 m,55~75 m)为主墓与陪葬墓的封土区,其下方 应当存在墓室。两个封土堆的正上方均存在垂向盗洞, 其中,右侧年代较久,根据当地百姓反映可能发生在 20 世纪 80 年代,左侧盗洞正在开挖还没有达到墓室, 左侧盗洞也是利用布置井中电极的盗洞。由反演电阻 率断面(见图 5)可知,该断面电阻率变化范围为40~400 Ω·m,其中高电阻率区(>280 Ω·m)主要分布在高程较 高和地形变化大的位置,推测主要是由于这些区域有 利于排水比较干燥而造成; -10 m以下为低电阻率区 (<100 Ω·m),结合水文地质资料推测,与地下潜水面 有关;右侧封土下在 160~220 Ω·m 的包围区内存在 220~280 Ω·m 的封闭异常,推测中间封闭异常为墓室, 墓室周围的高阻推测与夯土等施工有关;左侧封土下 在 100~160 Ω·m 的包围区内存在 40~100 Ω·m 的封闭 异常,推测中间低阻封闭异常为墓室。左、右两侧墓 室分别表现为低阻与中高阻,后经现场考查发现,左 侧盗洞内部有水,而右侧盗洞内部较为干燥。



图 5 主剖面反演电阻率断面



# 4 结论

1) 近似的边界处理以及基于符号分析的 LDL<sup>T</sup>分 解算法有利于提高了正演计算效率,为快速反演奠定 基础。

2) 采用改进的"L-curve"求取正则化因子,计算方 便,无需对离散数据求导,提高了反演的稳定性。

3) 重加权共轭梯度方法通过在每次迭代过程中, 计算变权重矩阵  $\hat{W}_{e}$ ,并且利用前一次稳定因子与本次 稳定因子的比值作为正则化因子的衰减系数,这种迭 代过程中自适应求取正则化因子的方法提高了反演效 率及结果的稳定性。

4) 最小梯度支撑稳定因子有利于提高 2.5D 井地 反演陡变异常体边界的识辨能力。

#### REFERENCES

- SMITH N C, VOZOOFF K. Two-dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data[J]. IEEE Transactions Geoscience Remote Sensing, 1984, 22(1): 21–28.
- [2] ZHOU B, GREENHALGH S A. A synthetic study on cross-hole resistivity imaging with different electrode arrays[J]. Exploration Geophysics, 1997, 28(2): 1–5.
- [3] ZHANG J, MACKIE R L, MADDEN T R. 3-D resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients[J].

3188

Geophysics, 1995, 60(5): 1313–1325.

- OLDENBURG D W, MCGILLICRAY P R, ELLIS R G. Generalized subspace methods for large-scale inverse problem[J]. Geophysical Journal International, 1993, 114(1): 12–20.
- [5] LI Y G, OLDENBURG D W. Approximate inverse mapping in DC resistivity problems[J]. Geophysical Journal International, 1992, 109(2): 343–362.
- [6] MAURIELLO P, PATELLA D. Resistivity anomaly imaging by probability tomography[J]. Geophysical Prospecting, 1999, 47(3): 411–429.
- SCRIBA H. Computation of the electrical potential in the three-dimensional structures[J]. Geophysical Prospecting, 1981, 29(5): 790–802.
- [8] SPITZER K. 3-D finite-difference algorithm for DC resistivity modeling using conjugate methods[J]. Geophysical Journal International, 1995, 123(3): 903–914.
- [9] PRIDMORE D F, HOHMANN G W, WAED S H, SILL W R. An investigation of finite-element modeling for electrical and electrical and electromagnetic data in three dimensions[J]. Geophysics, 1981, 46(7): 1009–1015.
- [10] 徐凯军,李桐林. 垂直有限线源三维地电场有限差分正演研究[J].吉林大学学报(地球科学版), 2006, 36(1): 137-141. XU Kai-jun, LI Tong-lin. The forward modeling of three-dimensional geo-electrical field of vertical finite line source by finite difference method[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2006, 36(1): 137-141.
- [11] 王志刚,何展翔,魏文博. 井地直流电法三维数值模拟中若 干问题研究[J]. 物探化探计算技术,2006,28(4):322-326.
  WANG Zhi-gang, HE Zhan-Xiang, WEI Wen-bo. Study on some problems upon 3D modeling of DC borehole-ground method[J].
  Computing techniques for geophysical and Geochemical Exploration, 2006, 28(4): 322-326.
- [12] 戴前伟,侯智超,王洪华. 井地电位 2.5 维有限元数值模拟异 常分析[J]. 物探化探计算技术, 2013, 35(4): 457-462.
  DAI Qian-wei, HOU Zhi-chao, WANG Hong-hua. Anomalous analysis of the 2.5D finite element numerical simulation of borehole-ground electrical method[J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2013, 35(4): 457-462.
- [13] 柳建新,邓小康,郭荣文,刘海飞,童孝忠,柳 卓. 坑道直 流聚焦超前探测电阻率法有限元数值模拟[J]. 中国有色金属 学报, 2012, 22(3): 970-975.
  LIU Jian-xi, DENG Xiao-kang, GUO Rong-wen, LIU Hai-fei, TONG Xiao-zhong, LIU Zhuo. Numerical simulation of advanced detection with DC focus resistivity in tunnel by finite element method[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2012, 22(3): 970-975.
- [14] LI Y G, OLDENBURG D W. 3-D inversion of induced polarization data[J]. Geophysics, 2000, 65(6): 1931–945.
- [15] 柯敢攀, 黄清华. 井地电法的三维正反演研究[J]. 北京大学

学报(自然科学版), 2009, 45(3): 264-272.

KE Gan-pan, HUANG Qing-Hua. 3D Forward and inversion problems of borehole to surface electrical method[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2009, 45(3): 264–272.

- [16] 吕玉增, 阮百尧, 黄俊革. 直流电井间三维直接成像[J]. 物探 化探计算技术, 2003, 25(1): 60-64.
   LÜ Yu-zeng, RUAN Bai-yao, HUANG Jun-ge. The 3-D immediate cross hole tomography with direct current[J].
   Computing Techniques for Geophysical and Geochemical
- Exploration, 2003, 25(1): 60-64.
  [17] 王志刚,何展翔,魏文博. Born 近似快速三维反演并地电法数 据[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(2): 508-513.
  WANG Zhi-gang, HE Zhan-xiang, WEI Wen-bo. Fast 3D inversion of borehole ground electrical method data based on born approximation[J]. Progress in Geophysics, 2007, 22(2): 508-513.
- [18] 安 然,李桐林,徐凯军. 井地三维电阻率反演研究[J]. 地球 物理学进展, 2007, 22(1): 247-249.
  AN Ran, LI Tong-lin, XU Kai-jun. Well-surface 3-D resistivity inversion[J]. Progress in Geophysics, 2007, 22(1): 247-249.
- [19] CONSTABLE S C, PARKER R L, CONSTABLE C G. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from EM sounding data[J]. Geophysics, 1987, 52(3): 289–300.
- [20] SMITH J T, BOOKER J R. Rapid inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1991, 96(3): 3905–3922.
- [21] ZHDANOV M S. Geophysical inverse theory and regularization[M]. New York: Elsevier Science, 2002: 149–165.
- [22] ZHDANOV M S, FANG S. 3-D quasi-liner electromagnetic inversion[J]. Radio Science, 1996, 4(3): 741–745.
- [23] DEGROOT-HEDLIN C, CONSTABLE S. Occam's inversion to generate smooth, two dimensional models from magnetotelluric data[J]. Geophysics, 1990, 55(12): 1613–1624.
- [24] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physical D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(14): 259–268.
- [25] GAO H, ZHAO H K. Multilevel bioluminescence tomography based on radioactive transfer equation Part 2: Total variation and 11 data fidelity[J]. Optics Express, 2010, 18(3): 2894–2912.
- [26] BURSTEDDE C,GHATTAS O. Algorithmic strategies for full wave-form inversion: 1D experiments[J]. Geophysics, 2009, 74(6): 37–46.
- [27] 韩 波, 窦以鑫, 丁 亮. 电阻率成像的混合正则化反演算法[J]. 地球物理学报, 2012, 55(3): 970-980.
  HAN Bo, DOU Yi-xin, DING Liang. Electrical resistivity tomography by using a hybrid regularization[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2012, 55(3): 970-980.
- [28] LAST B J, KUBIK K. Compact gravity inversion[J]. Geophysics, 1983, 48(6): 713–721.

- [29] GUILLEN A, MENICHETTI V. Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional[J]. Geophysics, 1984, 49(8): 1354–1360.
- [30] BARBOSA V C F, SILVA J B C. Generalized compact gravity inversion[J]. Geophysics, 1994, 59(1): 57–68.
- [31] CANDANSAYAR M E. Two-dimensional inversion of magnetotelluric data with CG and SVD: A comparison study of different stabilizers[J]. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2002, 21(1): 669–672.
- [32] MEHANEE S, ZHDANOV M S. Two-dimensional magnetoelluric inversion of blocky geo-electrical structures[J]. Journal of Geophysical Research, 2002, 107(B4): 2065–2075.
- [33] PORTNIAGUINE O, ZHDANOV M S. 3-D magnetic inversion with data compression and image focusing[J]. Geophysics, 2002, 67(5): 1532–1541.
- [34] GRIBENKO A, ZHDANOV M. Rigorous 3-D inversion of marine CSEM data based on the integral equation method[J]. Geophysics, 2006, 25(1): 815–819.
- [35] VIGNOLI G, DEIANA R, CASSIANI G. Focused inversion of vertical radar profile (VRP) travel time data[J]. Geophysics, 2012, 77(1): 9–18.
- [36] PORTNIAGUINE O, ZHDANOV M S. Focusing geophysical inversion images[J]. Geophysics, 1999, 64(3): 874–887.
- [37] ZHDANOV M S, ELLIS R, MUKERJEE S. Three-dimensional

regularized focusing inversion of gravity gradient tensor data[J]. Geophysics, 2004, 69(4): 925–937.

- [38] SALAH A M. Multidimensional finite difference electromagnetic modeling and inversion based on the balance method[D]. Utah: The University of Utah, 2003.
- [39] 刘小军, 王家林, 陈 冰, 于 鹏. 二维大地电磁数据的聚焦 反演算法探讨[J]. 石油地球物理勘探, 2007, 42(3): 338-342.
  LIU Xiao-jun, WANG Jia-lin, CHEN Bing, YU Peng. The focusing inversion of 2-D magnetotelluric[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2007, 42(3): 338-342.
- [40] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994: 159-178.
  XU Shi-zhe. The Finite element method in Geophysics[M]. Beijing: Science Press, 1994:159-178.
- [41] ERHAN E, ISMAIL D, MEHMET E C. Incorporating topography into 2D resistivity modeling using finite-element and finite-difference approaches[J]. Geophysics, 2008, 73(3): 135–142.
- [42] LIU J. The role of elimination trees in sparse factorization[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1990, 11(1): 134–172.
- [43] HANSEN P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve[J]. Siam Review, 1992, 34(4): 561–580.

(编辑 王 超)