



电磁场作用下中铝合金熔体流动的混沌特征的仿真与分析

刘 政¹, 张嘉艺², 余昭福²

(1. 江西理工大学 机电工程学院, 赣州 341000;
2. 江西理工大学 材料科学与工程学院, 赣州 341000)

摘 要: 为探明铝合金熔体在电磁场作用下的流动特征, 利用 Fluent 软件模拟电磁场作用下铝熔体中微粒的流动轨迹, 计算这些流动轨迹的混沌特征参数: 最大 Lyapunov 指数及 Kolmogorov 熵。并根据不同电磁频率搅拌下铝合金熔体中微粒的运动轨迹, 对其进行混沌特征判断及分析。结果表明: 铝合金熔体在电磁场作用下的流动具有混沌特征; 电磁频率为 5、15 和 30 Hz 时, 在铝合金熔体中都发生了混沌对流, 其最大 Lyapunov 指数都大于 0, 且其 Kolmogorov 熵随着电磁频率增大而迅速增加, 说明其系统内混沌程度越大, 信息损失量也越大。

关键词: 铝合金熔体; Lyapunov 指数; Kolmogorov 熵; 混沌对流; 电磁场

中图分类号: TG292; TP391.9

文献标志码: A

Simulation and analysis on chaotic characteristic of flow in Al alloy melt under electromagnetic field

LIU Zheng¹, ZHANG Jia-yi², YU Zhao-fu²

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China;
2. School of Materials Science and Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In order to find out the flow features of Al alloy melt under the electromagnetic field, the trajectories of the particle in Al alloy melt was simulated by the computational fluid dynamics software Fluent, and the chaotic characteristic parameters such as max Lyapunov exponent and Kolmogorov entropy were calculated, and they were used to characterize the trajectories of three groups. The chaotic characters on the flow trajectories of Al alloy melt were judged and analyzed according to the trajectories of the particle in the melt under the electromagnetic field. The results show that there is chaotic character for flow in Al alloy melt under electromagnetic field. Chaotic advection happens in the melt at different frequencies such as 5, 15 and 30 Hz. The maximum Lyapunov exponents are beyond 0. And Kolmogorov entropy increases rapidly with increasing the frequencies, indicating that its system has more degree of chaos and more information loss.

Key words: Al alloy melt; Lyapunov exponent; Kolmogorov entropy; chaotic advection; electromagnetic field

在合金的凝固过程中, 熔体流动所起的作用已有不少研究^[1-6], 凝固前沿的熔体流动通过影响固液界面处的热质分布和结晶动力学, 从而对凝固组织的形态、成分和晶体缺陷产生影响。而且合金熔体的流动是凝

固过程中一种不可避免的现象, 也是影响其综合性能的重要因素之一。为了利用熔体流动对凝固显微组织进行有效预测和调控, 人们在合金凝固的研究和生产中使用了各种外场, 其中电磁场技术是在合金凝固前

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51361012); 江西省自然科学基金资助项目(20114bab206014, 20142bab206012); 江西省教育厅科技落地计划项目(KJLD12070); 江西省教育厅科技项目(GJJ2014407)

收稿日期: 2015-03-26; **修订日期:** 2015-06-14

通信作者: 刘 政, 教授, 博士; 电话: 0797-8312428; E-mail: liukk66@163.com

或凝固过程中对合金熔体施加电磁场, 利用合金和电磁场的相互作用, 改善其凝固组织^[7]。

电磁场作用下的金属凝固是一个非平衡过程, 传统的金属凝固理论可能不完全适应, 还须不断探索新的理论及研究方法进行完善。铝合金中的添加元素或细化剂(如 AlTiB、RE、Zr、Na)等是否能够实现强化、净化、细化等功效, 与它们在合金熔体中的分布不无关系。以往的研究表明^[8-9], 在熔体中, 特别是固液共存状态下, 溶质元素的扩散迁移将受到熔体流动特性的影响, 继而影响到合金的凝固组织^[10]。因此, 控制溶质在熔体中的传输、扩散与分布对合金制品的最终性能极为重要。

目前, 由于凝固理论的不完善与研究手段的欠缺, 人们对于合金处于固液共存、高黏性状态下的流动规律及其溶质传输的认识与控制, 还受到一些限制。20 世纪 80 年代初期, AREF^[11]提出了混沌对流的概念, 并用来强化粘稠流体中的混合、传质与传热。后来混沌对流的理论与技术在化学工程中率先获得应用^[12-13], 有实验研究表明, 混沌混合可以有效改变搅拌器内流体混合效果^[14-15]。因此, 引入混沌理论探索合金熔体流场中溶质扩散、分布规律, 达到控制合金凝固组织具有十分重要的意义。

在混沌理论中, 表征系统动力学混沌特性的 3 个特征量: 维数、Lyapunov 指数、Kolmogorov 熵。为今后进一步探究铝合金熔体在电磁场作用下流动的特性, 更好地调控熔体流动对合金中溶质传输、扩散与分布的影响, 继而对合金凝固组织的影响, 本文作者先用 CFD-Fluent 流体力学软件模拟电磁场中铝熔液微粒运动轨迹, 再在 Matlab 平台上分析计算运动轨迹的 Lyapunov 指数以及 Kolmogorov 熵值, 并对其变化规律进行混沌判断描述及分析, 揭示半固态合金熔体在电磁场作用下流体的混沌特征, 并对今后从非线性科学的角度表明合金熔体流动对凝固组织影响的演变打下基础。

1 Fluent 模拟

将盛铝熔液的容器(坩埚)简画成圆柱体(半径 3

cm, 高 12 cm), 所研究的电磁场内的流体为 A356 铝熔液, 其液态密度为 2630 kg/m³, 动力黏度为 1.2×10⁻⁵ Pa·s, 热导系数为 161 W/m, 比热为 880 J/kg; 而该合金的液相线温度与固相线温度分别为 615.6 °C(888.6 K)和 576.1 °C(849.1 K)。电磁场为交变场, 其电磁场频率分别设置为 5、15 和 30 Hz。搅拌时间均为 5 s。熔体浇注初始温度参数设置为 923 K(即 650 °C)。选用标准 $k-\epsilon$ 湍流模型。磁场强度通过加载 MHD 磁场模块导入, 已知磁场强度公式为 $H=NL/L_e$, N 为线圈匝数(实验所用为 3 个对极的电磁搅拌器, 匝数为 9); L 为电流强度; L_e 为样品有效磁路长度(横截面直径为 6 cm), 可知磁场频率不同, 励磁电流也不同, 在频率为 5 Hz 时, 电流强度 $L=0.425$ A, 磁场强度 $H=63.75$ A/m; 在频率为 15 Hz 时, 磁场强度 $H=191.25$ A/m; 频率为 30 Hz 时, 磁场强度 $H=382.8$ A/m。可知随着磁场频率增加, 磁场强度也随着增加。众所周知, 金属熔体在坩埚内会产生很大的温度梯度, 甚至接近坩埚壁会形成树枝晶, 所产生的温度场分布及不同频率引起的温度场变化是不同的, 但不影响其合金熔体微粒的运动且模拟搅拌时间仅为 5 s, 合金熔体降温较小, 还可以保持液态而进行充分的流动, 并不会影响设置的边界条件。所以壁面采用黏性流动壁面 Wall 界面来模拟其滑移壁面, 其动量方程、湍动能方程和湍动能耗散率均采用二阶迎风差分格式, 采用 SIMPLEC 算法。实验采用 3 组对比模拟实验, 以其不同的频率作为比较对象, 每组随机模拟 2 个相近微粒坐标的运动轨迹, 分别标记为 $A(A_1, A_2)$ 、 $B(B_1, B_2)$ 、 $C(C_1, C_2)$, 如表 1 所列。

将其运动轨迹导入 Matlab 中更加直观地显示(如图 1~3 所示)。

从图 1 中可以明显看出, 在频率为 5 Hz 时, 熔体内微粒 A 、 B 和 C 在凝固系统中受施加的电磁场均发生不规则三维流动。随着频率的增大其他条件不变的情况下, 在频率为 15 Hz 下, 熔体内微粒 A 、 B 和 C 做较图 1 更复杂的湍流运动, 如图 2 所示。随着电磁频率进一步地增大, 意味着电磁场对合金熔体的扰动加剧, 熔体流速加快, 湍动越明显, 其中的微粒运动轨迹越复杂多变, 如图 3 中 A 、 B 和 C 微粒轨迹所示。

表 1 A、B 和 C 的起始坐标
Table 1 Starting coordinate positions of A, B and C

Group of coordinate	$A(A_1, A_2)$	$B(B_1, B_2)$	$C(C_1, C_2)$
Starting coordinates position	$A_1(0, 1, 2), A_2(0.05, 1, 2)$	$B_1(1, 2, 5), B_2(1, 2.05, 5.5)$	$C_1(2, 0, 10), C_2(2, 0.05, 10.5)$

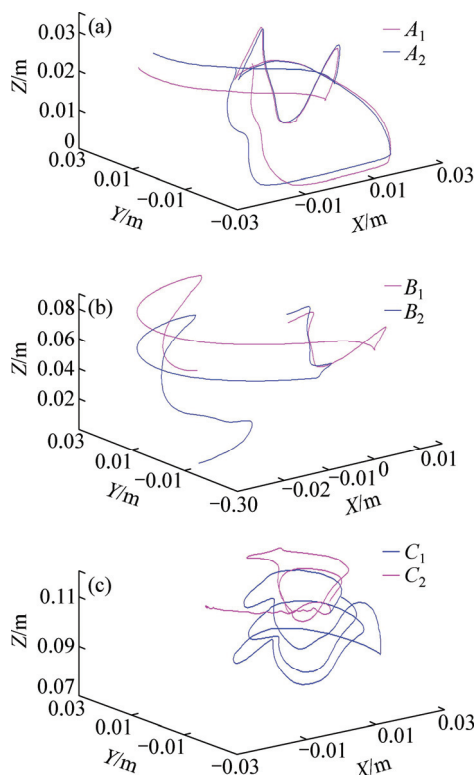


图1 A、B和C在频率为5 Hz时的运动轨迹

Fig. 1 Trajectories of A, B and C at frequency of 5 Hz: (a) A(A_1, A_2); (b) B(B_1, B_2); (c) C(C_1, C_2)

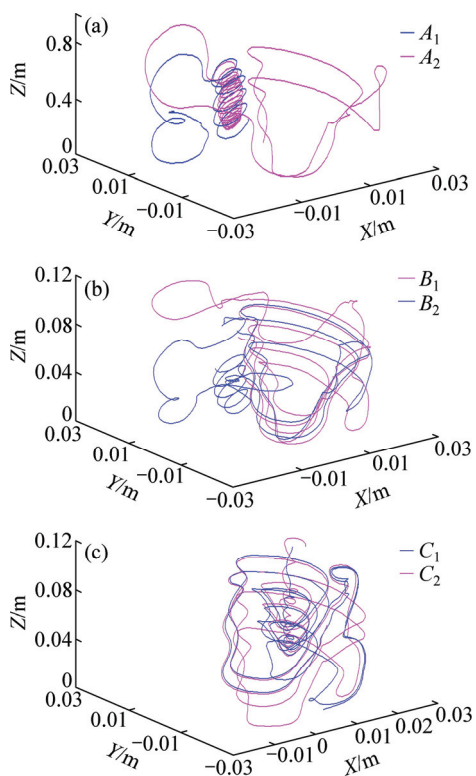


图2 A、B和C在频率为15 Hz时的运动轨迹

Fig. 2 Trajectories of A, B and C at frequency of 15 Hz: (a) A(A_1, A_2); (b) B(B_1, B_2); (c) C(C_1, C_2)

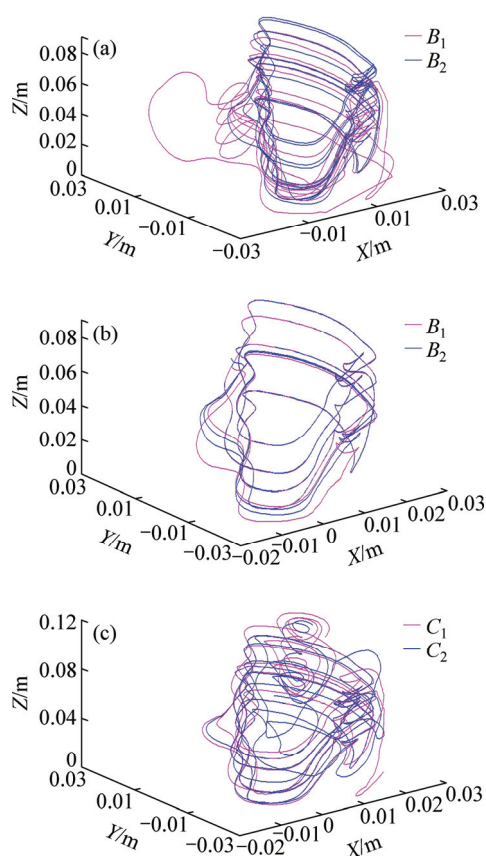


图3 A、B和C在频率为30 Hz时运动轨迹

Fig. 3 Trajectories of A, B and C at frequency of 30 Hz: (a) A(A_1, A_2); (b) B(B_1, B_2); (c) C(C_1, C_2)

2 Lyapunov 指数及计算分析

2.1 Lyapunov 指数

首先, Lyapunov 指数是针对系统的轨道而言的。混沌运动基本特点是运动对初始条件极其敏感, 两个极为靠近的初始坐标产生的运动轨迹, 随着时间的演变而分离, Lyapunov 就是表征这个现象的特征量。Lyapunov 指数是检验系统的有序或混沌状态的重要依据, 而正的 Lyapunov 指数是刻画混沌系统的主要特征。从最大 Lyapunov 指数^[16-17]大于 0 可以判断出: 无论初始两条轨迹线多接近, 随着时间的演变会成指数增长而无法预测, 这就是混沌现象。在一个 n 维的动力系统中, 以 x_0 为中心的一个很小 n 维球体, 随着时间演变, 球体将变为一个近似椭圆球体, 该球面成为 n 维椭球面。在球的直径 x_0 趋向于 0 的情况, 映像与椭球相同的时间趋于无穷大。在迭代椭球的轴长增加倍数的长期平均值, 其对数成为 Lyapunov 指数。那么相对应 Lyapunov 指数 λ_0 一般按 Lyapunov 指数大小排列, 即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。一般对单变量的时间序列

进行空间重构, 然后用分析法和轨道跟踪法来提取系统的 Lyapunov 指数。

Lyapunov 指数对混沌初始条件敏感, 其吸引子的特征有: 1) 任何吸引子, 都至少有一个负的 Lyapunov 指数; 2) 稳态运动或者周期运动都不可能具有正的 Lyapunov 指数; 3) 对于任何混沌运动系统, 都至少有一个正的 Lyapunov 指数。

WOLF 等^[18]提出基于相平面和相体积演化来计算 Lyapunov 指数, 此方法成为 Wolf 法, 此法计算结果不易受拓扑复杂性(如 Lorenz 吸引子)影响, 所以 Wolf 法在计算最大 Lyapunov 指数来判断分析混沌特性运用广泛。

设混沌时间序列 $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, 嵌入维数 m , 时间 τ , 重构相空间为

$$Y(t_i) = (x(t_i) + x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)),$$

$$i = 1, 2, \dots, n - (m-1)\tau \quad (1)$$

式中: t_i 为发生混沌时间; n 为自然数。当重构相空间后, 根据混沌吸引子分离特性, 即用 Wolf 法计算最大 Lyapunov 指数。

取相空间初始点 $Y(t_0)$, 设初始点近邻点 $Y_0(t_0)$, 它们之间间距为 $L(t_0)$, 从初始时刻追踪两点的时间演化, 直至 t_1 点时两点距离超过规定值 ε , 有

$$L'(t_1) = |Y(t_1) - Y_0(t_1)| > \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2)$$

式中: $L'(t_1)$ 为 $Y(t_1)$ 和 $Y_0(t_1)$ 之间的间距; $Y(t_1)$ 为 t_1 时的相空间点, $Y_0(t_1)$ 为 $Y(t_1)$ 的近邻点。再在 $Y(t_1)$ 临近处找随意点 $Y_1(t_1)$, 保证 $Y(t_1)$ 和 $Y_1(t_1)$ 两点间距小于规定值 ε , 有

$$L(t_1) = |Y(t_1) - Y_1(t_1)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (3)$$

为了使 $L'(t_1)$ 与 $L(t_1)$ 夹角 θ 尽量小, 反复重复式(2)和(3)过程, 直到 $Y(t)$ 到达时间序列终点; W 为总迭代次数; t_0 为初始迭代所用时间; t_w 为迭代次数 W 所用时间, 所以最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{\max}$ 为

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{t_w - t_0} \sum_{k=1}^W \ln \frac{L'(t_k)}{L(t_k - 1)} \quad (4)$$

2.2 最大 Lyapunov 指数计算与分析

对测单变量的时间序列计算系统的 Lyapunov 指数, 有 Wolf 算法和 Jacobian 算法。Wolf 算法对计算最大 Lyapunov 指数简单。利用所编程的 Wolf 算法对其最大 Lyapunov 指数进行计算, 结果如图 4 所示。对于 A 、 B 和 C 坐标微粒轨迹不同频率下的最大 Lyapunov 指数, 如表 2 所列。

从表 2 可以看出: 在相同运动时间下, A 、 B 和 C

表 2 A 、 B 和 C 微粒轨迹在不同频率、相同运动时间的最大 Lyapunov 指数

Table 2 The max Lyapunov exponents of A , B and C particle trajectories at the same time but different frequencies

Group of coordinate	Maximum Lyapunov exponent		
	5 Hz	15 Hz	30 Hz
$A(A_1, A_2)$	2.18	2.09	2.00
$B(B_1, B_2)$	2.59	2.89	2.84
$C(C_1, C_2)$	2.58	2.28	2.37

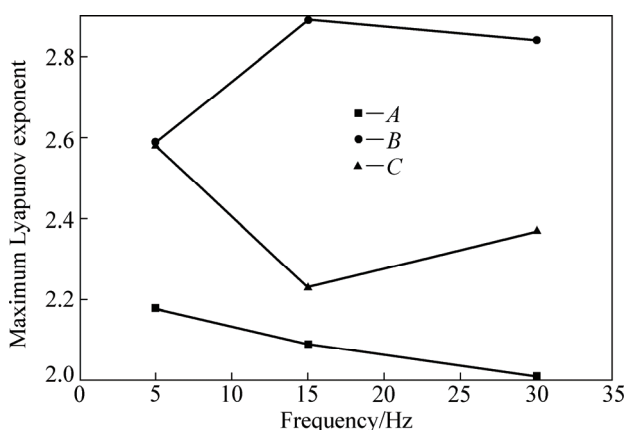


图 4 A 、 B 和 C 在不同频率、相同运动时间下对应的最大 Lyapunov 指数变化趋势图

Fig. 4 Maximum Lyapunov exponents trend chart of A , B and C particle trajectories at the same time but different frequencies

在不同频率下得到的最大 Lyapunov 指数不同, 并有一个共同特点都大于 0, 且最大指数值均在 2~3 之间。从 Wolf 算法中最大 Lyapunov 指数判断, 得知在频率 5、15 和 30 Hz 下, 每组对应的系统轨迹都有混沌解, 即每组微粒在运动中发生了混沌流动, 有混沌特性。从图 4 可以看出, A 、 B 和 C 在不同频率下, 最大 Lyapunov 指数的变化趋势。所选 B 组, 不同频率对应的最大 Lyapunov 指数都较其他两组大; C 组在不同频率下对应的最大 Lyapunov 指数也比 A 组值大。无论在所选的频率范围内, 最大 Lyapunov 指数分布由大到小依次为: B 、 C 、 A 。但从目前研究情况来看, 仅能从最大 Lyapunov 指数判断其是否有混沌特性, 并不能单从最大 Lyapunov 指数的大小来判断混沌程度大小, 可从 K 熵来判断。

3 Kolmogorov 熵及计算分析

3.1 Kolmogorov 熵

熵是物质系统的状态的丰富程度, 或称为复杂程

度。热力学定义的熵是在能量空间分布均匀性的特征量,分布越均匀,无序度越大,熵值越大;相反地,分布越不均匀,有序度越高,熵值越小。所以一般认为熵是状态的度量标尺。每一个正 Lyapunov 指数就代表该方向信息的损失,那么有多个正 Lyapunov 指数时,涉及了另外一个 Lyapunov 指数相关的量,即 Kolmogorov 熵(K 熵)^[19-21],它是刻画混沌的另一个重要的特征,它可以用来区分规则运动、混沌运动和随机运动。在不同的运动系统中, K 熵数值是不同的。在规则周期运动中, K 熵为 0;在混沌运动中, K 熵大于 0,且 K 熵越大,系统混沌程度越大,信息损失量越大;在随机运动中, K 熵趋于无穷。在混沌运动中: K 熵大于 0, K 熵越大意味着信息量的损失越大;对于规则运动: K 熵等于 0;在随机运动中:系统不可预测,故 $K \rightarrow \infty$, K 熵实际上代表总的信息流率。GAO 等^[22]采用 CFD 模拟计算了偏心搅拌的流场行为变化,发现偏心结构的搅拌槽能够破坏系统的周期性和对称性,从而诱发混沌;BRIONGOS 等^[23]通过分析三维流化床的表面自由波动维数和 K 熵,并通过计算分析 K 熵对流化床流型的敏感性。杨世锡等^[24]将 K 熵引入故障诊断中来辨别故障类别及严重程度。杨春振等^[25]在运用 K 熵研究双支腿流化床颗粒交换时,得到颗粒团簇交换方式促使系统更加混沌。尽管 K 熵研究比较广泛,但在电磁搅拌器内研究熔体混沌流动应用还是比较少。

考虑一个 n 维动态系统,假设状态空间分为一个边长为 l 的 n 维正方体盒子,对空间一个吸引子和一条落在吸引域中的轨道 $x(t)$,若 $D(i_1, i_2, i_3, \dots, i_m)$ 是 $x(\tau)$ 落在盒 i_1 中, $x(2\tau)$ 落在盒 i_2 中, $\dots$, $x(m\tau)$ 落在盒 i_m 中的联合概率,即 Kolmogorov 熵定义为

$$S_k = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} p(i_1, i_2, \dots, i_m) \ln p(i_1, i_2, \dots, i_m) \quad (5)$$

从时间序列来计算 K 熵一般有两种方法:最大似然算法^[26]和关联积分算法。其中最大似然算法相对简单,计算结果没有二义性。已知对数似然函数 $L(k)$ 为

$$L(k) = \ln[p(b_1, b_2, \dots, b_m; k)] = M \ln(e^{k-1}) - k \sum_{i=1}^M b_i \quad (6)$$

式中: $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ 为样本; M 是抽取样本独立的点。求解其最大值就是要得到样本概率最大 k 值。得到 $L(k)$ 值,必须使

$$\frac{\partial L(k)}{\partial k} = \frac{M}{1 - e^{-k}} - \sum_{i=1}^M b_i = 0 \quad (7)$$

从式(7)可得到 K 熵的最大似然值

$$K_M = -\ln\left(1 - \frac{1}{b}\right), \bar{b} = \frac{1}{M \sum_{i=1}^M b_i} \quad (8)$$

3.2 K 熵计算与分析

运用最大似然算法进行 Matlab 编程,求其 A , B 和 C 的 K 熵值,如表 3 所列。为了方便直观研究其规律,作出 K 熵趋势图,如图 5 所示。

表 3 A 、 B 和 C 微粒轨迹在不同频率、相同运动时间下的 K 熵值

Table 3 Kolmogorov entropies of A , B and C particle trajectories at same time but different frequencies

Group of coordinate	Kolmogorov entropy/(nats·s ⁻¹)		
	5 Hz	15 Hz	30 Hz
$A(A_1, A_2)$	550.77	2348.00	4077.00
$B(B_1, B_2)$	659.18	1955.40	6609.30
$C(C_1, C_2)$	819.19	1658.80	4050.30

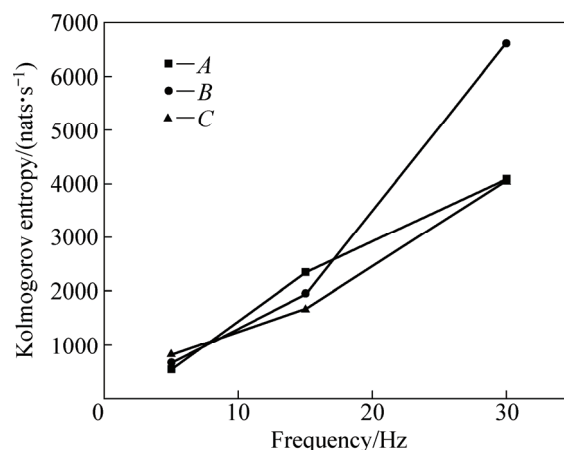


图 5 A 、 B 和 C 微粒轨迹在不同频率、相同运动时间下的 K 熵值变化趋势图

Fig. 5 Kolmogorov entropy trend chart of A , B and C particle trajectories at same time but different frequencies

从表 3 可以看出,无论在 5、15 还是 30 Hz 下的轨迹 K 熵都远远大于 0,可见在运动系统中发生了混沌现象且混沌程度较大。从图 5 可看出,3 条曲线随着频率的变大, K 熵迅速增。加在 5 Hz 时,3 条轨迹对应的 K 熵都大于 500 小于 1000,由大到小的顺序为: C 的 K 熵、 B 的 K 熵、 A 的 K 熵,由此可见在此频率下, C 的微粒轨迹 K 熵最大,混沌程度更大。在 15 Hz 时,3 组微粒轨迹 K 熵比在 5 Hz 的时,大了一个数量级。在 30 Hz 时, K 熵比在 15 Hz 时大了几个倍数,可见频率增大,直接影响运动系统的混沌程度。在电

磁场旋转时, 熔体每一处产生感应电动势, 感应电动势使熔体产生电流, 感应电流和和旋转电磁场相互作用使熔体受到 Lorenz 力, 所以使熔体内每个微粒产生复杂的三维混沌流动。在低频率情况下, 电磁搅拌功率小, 且搅拌速度也低, 故使凝固系统中混沌程度不高, 随着频率的增加, 搅拌速度和功率也增大, 使得熔体微粒流动加快, 使系统混沌特性更加明显。 K 熵也是关联 Lyapunov 指数的一个量, 为正 Lyapunov 指数之和^[27]。Lyapunov 指数正比于信息量的损失, 而每一个正 Lyapunov 指数意味着该方向的信息损失。所以可以看出, K 熵越大, 说明信息损失越大, 系统更加混沌。从表 3 及图 5 可以明显看出, K 熵最大的对应的是 30 Hz 时的 B 微粒轨迹, 而 K 熵最小的是 5 Hz 时的 A 微粒轨迹, 由于每个熔体内微粒的位置不同, 合金凝固时所受 Lorenz 力的径向与切向力也不同, 故使熔体内微粒运动轨迹不同, 对应的 K 熵也不同。可见混沌不仅受单一变量的影响, 且对初始条件位置也敏感。

综上所述, 在本实验范围内, 不仅从 Lyapunov 指数还是 Kolmogorov 熵的计算中都可以得知在施加电磁搅拌下的铝熔液内部存在混沌对流, 而且直接体现混沌对流所产生的影响还需从合金凝固组织的观察分析中获取: 是否混沌程度为一定值时, 其凝固组织形貌达到最佳, 其晶粒越细小圆整; 或是否混沌程度越大, 其凝固组织形貌而越优; 或是相反, 这都直接影响混沌特征量和凝固形貌之间的关联。受电磁搅拌的合金熔体中的微粒运动看似无规则, 实则其混沌特征量的值暗含着其内部的规律性。然而用 CFD-Fluent 流体力学软件及混沌特征量来研究电磁场作用下的合金凝固组织形貌在国内外来说是极少的, 所以今后还需大量开展实验工作来分析和验证此研究。

4 结论

1) 在相同时间不同频率下, A 、 B 和 C 3 组运动轨迹的最大 Lyapunov 指数都大于 0, 值均分布在 2~3 之间, 证明有混沌解, 发生混沌运动。 B 组轨迹在不同频率对应的最大 Lyapunov 指数都较其他两组的大, 在 3 个不同频率下, 最大 Lyapunov 指数由大到小依次为 B 、 C 、 A 。

2) 在频率 5、15 和 30 Hz 下, 其运动轨迹的 K 熵都远大于 0。且随着频率增大, K 熵迅速倍增。在 5 Hz 时, A 组微粒轨迹 K 熵最小; 在 30 Hz 时, C 组微粒轨迹 K 熵达到最大, 说明其混沌程度最大, 混沌不仅

受频率影响, 而且对初始条件坐标也敏感。

3) 本研究表明, 在一定频率电磁场的扰动下, 铝合金熔体中可以产生混沌流动。 K 熵可用于表征电磁搅拌内熔体混沌流动的特征, 可为混沌理论调控流场结构提供新的方法。

REFERENCES

- [1] 陈兴润, 张志峰, 徐 骏, 石力开. 电磁搅拌法制备半固态浆料过程电磁场、流场和温度场的数值模拟[J]. 中国有色金属学报, 2010, 20(5): 937-945.
CHEN Xin-run, ZHANG Zhi-feng, XU Jun, SHI Li-kai. Numerical simulation of electromagnetic field, flow field and temperature field in semi-solid slurry preparation by electromagnetic stirring[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2010, 20(5): 937-945.
- [2] 朱鸣芳, 戴 挺, 李成允, 洪俊杓. 对流作用下枝晶生长行为的数值模拟[J]. 中国科学 E 辑(工程科学材料科学), 2005, 35(7): 673-688.
ZHU Ming-fang, DAI Ting, LI Cheng-yun, HONG Jun-shao. Convection under the action of the numerical simulation of dendritic growth behavior[J]. Science in China Series E (Engineering & Materials Science), 2005, 35(7): 673-688.
- [3] LYUBIMOVA T P, SKURIDIN R V, FAIZRAKHMANOVA I S. Thermo- and soluto-capillary convection in the floating zone process in zero gravity conditions[J]. Journal of Crystal Growth, 2007, 303(1): 274-278.
- [4] LIN X, TONG L, ZHAO L N, WANG L N, WANG M, HUANG W D. Morphological evolution of non-dendritic microstructure during solidification under stirring[J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2010, 20(S3): s826-s831.
- [5] 袁讯锋, 丁雨田, 郭廷彪, 胡 勇, 唐向前. 对流作用下枝晶生长行为的相场法[J]. 中国有色金属学报, 2010, 20(4): 681-687.
YUAN Xun-feng, DING Yu-tian, GUO Tin-biao, HU Yong, TANG Xiang-qian. Phase-field method of dendritic growth under convection[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2010, 20(4): 681-687.
- [6] 赵力宁, 林 鑫, 黄卫东. 较低剪切速率下过冷熔体非枝晶组织的形成与演化[J]. 金属学报, 2011, 47(4): 403-407.
ZHAO Li-ning, LIN Xin, HUANG Wei-dong. Formation and evolution of the non-dendritic morphology in undercooling melt with lower shearing rate[J]. Acta Metallurgica Sinica, 2011, 47(4): 403-407.
- [7] 白云峰, 周月明, 严 彪, 张永杰, 徐达鸣, 郭景杰, 傅恒志. 电磁场在材料凝固加工领域的应用[J]. 铸造, 2008, 57(2): 105-109.
BAI Yun-feng, ZHOU Yue-ming, YAN Biao, ZHANG Yong-jie,

- XU Da-ming, GUO Jing-jie, FU Heng-zhi. Application of electromagnetic field in materials solidification[J]. Foundry, 2008, 57(2): 105–109.
- [8] TIMMEL K, ECKERT S, GERBETH G. Experimental investigation of the flow in a continuous-casting mold under the influence of a transverse, direct current magnetic field[J]. Metall Mater Trans, 2011, 42B: 68–80.
- [9] HAGHAYEGHI R, EZZATNESHAN E, BAHAI H, NASTAC L. Numerical and experimental investigation of the grain refinement of liquid metals through cavitation processing[J]. Met Mater Int, 2013, 19(5): 959–967.
- [10] 杨满红, 郭志鹏, 熊守美. 对流作用下镁合金凝固组织演变的数值模拟[J]. 中国有色金属学报, 2015, 25(4): 835–843.
- YANG Man-hong, GUO Zhi-peng, XIONG Shou-mei. Numerical simulation of dendritic growth of magnesium alloy with convection[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2015, 25(4): 835–843.
- [11] AREF H. Stirring by chaotic advection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1984, 143: 1–21.
- [12] TEKIN H C, SIVAGNANAM V, CIFTLIK A T. Chaotic mixing using source-sink microfluidic flows in a PDMS chip[J]. Microfluidics and Nanofluidics, 2011, 10(4): 749–759.
- [13] PAUL E L, ATIEMOEBENG V A, KRESTE S M. Handbook of industrial mixing: Science and practice[M]. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2004: 89–143.
- [14] ARRATIC P E, MUZZIO F J. Planar laser-induced fluorescence method for analysis of mixing in laminar flows[J]. Ind Eng Chem Res, 2004, 43(20): 6557–6568.
- [15] BRESLER L, SHINBROT T, METCALFE G. Isolated mixing regions: Origin, robustness and control[J]. Chem Eng Sci, 1997, 52(10): 1623–1636.
- [16] 罗利军, 李银山, 李 彤, 董青田. 李雅普诺夫指数谱的研究与仿真[J]. 计算机仿真, 2005, 22(12): 285–288.
- LUO Li-jun, LI Yin-shan, LI Tong, DONG Qing-tian. Research and simulation of Lyapunov's exponents[J]. Computer Simulation, 2005, 22(12): 285–288.
- [17] 刘海峰, 赵艳艳, 代正华, 龚 欣, 于遵守. 利用小波分析计算离散动力系统的最大 Lyapunov 指数[J]. 物理学报, 2001, 50(12): 2311–2317.
- LIU Hai-feng, ZHAO Yan-yan, DAI Zheng-hua, GONG Xin, YU Zun-shou. Calculation of the largest Lyapunov exponent in the discrete dynamical system with wavelet analysis[J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(12): 2311–2317.
- [18] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D, 1985, 16: 285–317.
- [19] 张连毅, 郑崇勋, 李小平. EEG 柯尔莫格洛夫熵测度用于精神疲劳状态的研究[J]. 中国生物医学工程学报, 2007, 26(2): 170–176.
- ZHANG Lian-yi, ZHENG Chong-xun, LI Xiao-ping. Measuring Kolmogorov entropy of EEG for studying the state of mental fatigue[J]. Chinese Journal of Biomedical Engineering, 2007, 26(2): 170–176.
- [20] 黄明英, 王德明, 朱志宇. Kolmogorov 熵在船舶电力系统可靠性研究中的应用[J]. 船舶科学技术, 2009, 31(3): 60–63.
- HUANG Ming-ying, WANG De-ming, ZHU Zhi-yu. Application of Kolmogorov entropy in reliability research of ship power system[J]. Ship Science and Technology, 2009, 31(3): 60–63.
- [21] 王平立, 宋 斌, 王 玲. 混沌时间序列的 Kolmogorov 熵的应用研究[J]. 计算机工程与应用, 2006, 21(15): 162–164.
- WANG Ping-li, SONG Bin, WANG Ling. Study on Kolmogorov entropy based on chaotic time series[J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 21(15): 162–164.
- [22] GAO D R, GUO M J, LI Y. PIV experimental investigation of chaotic mixing using non-constant speed stirring[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(8): 445–448.
- [23] BRIONGOS J V, SOLER J G. Using free bed surface fluctuations in a 3-D fluidized bed for dynamic characterization[J]. Aiche Journal, 2004, 50(12): 3061–3067.
- [24] 杨世锡, 汪慰军. 柯尔莫格洛夫熵及其在故障诊断中的应用[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(1): 6–8.
- YANG Shi-xi, WANG Wei-jun. Kolmogorov entropy and its application to the diagnosis of mechanical faults[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(1): 6–8.
- [25] 杨春振, 段玉峰, 胡海韬. 基于关联维数和柯尔莫格洛夫熵的双支腿流化床颗粒交换特性[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(11): 54–59.
- YANG Chun-zhen, DUAN Yu-feng, HU Hai-tao. Analysis of solids exchange in a double-leg fluidized bed based on correlation dimension and Kolmogorov entropy[J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(11): 54–59.
- [26] SCHOUTEN J C. Maximum-likelihood estimation of the entropy of an attractor[J]. Phys Rev E, 1994, 49(1): 126–129.
- [27] 刘 飞. 基于关联维数和 Kolmogorov 熵的转子振动故障模式辨别[D]. 沈阳: 沈阳航空工业学院, 2009.
- LIU Fei. Vibration fault mode determination for rotor based on correlation dimension and Kolmogorov entropy[D]. Shenyang: Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, 2009.

(编辑 王 超)