第 25 卷第 5 期　　中国有色金属学报　　2015 年 5 月
Volume 25 Number 5　　The Chinese Journal of Nonferrous Metals　　May 2015
文章编号：1004-0609(2015)-05-1314-11

大地电磁二维正演中的有限元−径向基点插值法

李俊杰 [1]，严家斌 [2]

(1. 浙江省水利水电勘测设计院，杭州 310002；
2. 中南大学 地球科学与信息物理学院 有色资源与地质灾害探查湖南省重点实验室，长沙 410083)

摘　要：径向基点插值法(RPIM)作为一种插值型无网格方法，为改善无网格点插值法(PIM)在形函数构造过程中可能出现的矩阵奇异性问题而提出的一种方法，该算法支持域无量纲尺寸的选择区间大，能更好地处理各类工程与科学计算问题。介绍了 RPIM 的近似原理，给出了径向基函数形状参数的推荐值；从大地电磁二维变分问题出发利用 Galerkin 法结合高斯积分公式推导出相应的系统矩阵离散表达式；为提高 RPIM 的计算效率，将 RPIM 与有限元法(FEM)耦合，提出了有限元－径向基点插值法(FE-RPIM)，多个模型的数值计算验证了 RPIM 精度高、处理复杂模型便利及耦合法计算复杂模型高效的特点。

关键词：径向基点插值法；有限元；无网格方法；大地电磁
中图分类号：P631　　　　**文献标志码：**A

Magnetotelluric two-dimensional forward by finite element-radial point interpolation method

LI Jun-jie[1], YAN Jia-bin[2]

(1. Zhejiang Design Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Hangzhou 310002, China;
2. Key Laboratory of Nonferrous Resources and Geological Hazard Detection,
School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Polynomial basis interpolation method (RPIM), as a kind of typical interpolation meshfree method, was proposed to overcome the defects of point interpolation method (PIM) that the construction process of the shape function involves the matrix inverse operation. This method overcomes the matrix inverse problem, and supports the wider domain dimensionless size interval to better deal with all kinds of engineering and scientific computing problems. The approximate principle of RPIM was introduced in detail, and the discrete system matrix expression corresponding to the magnetotelluric two-dimensional variational problem by combining the Galerkin method and the gauss integral formula was deduced. In order to overcome the defects of low computational efficiency of RPIM, the finite element−radial point interpolation method (FE−RPIM) based on coupling the FEM and RPIM was proposed. The conclusions were verified by the numerical calculation of several models. The results show that RPIM has the advantage of high precision and convenience to calculate complex models, and FE-RPIM has the characteristics of high calculation efficiency for complex models.

Key words: radial point interpolation method; finite element; meshfree method; magnetotelluric

---

正演计算是研究大地电磁场响应规律的基础,高维问题的大地电磁场响应往往不存在解析解,为此须借助数值计算方法，如：有限差分法(FDM)[1−2]、积分方程法(IEM)[3]及有限元法(FEM)[4−7]。

基金项目：国家自然科学基金资助项目(40874055)；湖南省自然科学基金资助项目(07JJ5065)
收稿日期：2014-08-11；**修订日期：**2015-01-14
通信作者：严家斌，副教授，博士；电话：13548942513；E-mail：cspyry@csu.edu.cn

作为大地电磁正演计算的常用网格方法有着各自的优缺点：FDM 实现过程直接，但无法处理复杂地球物理模型；IEM 只须对异常体进行剖分和求积，不涉及微分方法中的吸收边界等复杂问题，在三维电磁数值模拟研究中具有快速、方便等特点，但同样无法应对地下电阻率复杂时的计算；有限元法适用于复杂物性分布和复杂边界形状的计算，其最大缺陷在于求解复杂模型时网格生成困难。无单元 Galerkin 法(EFGM)[8−9]通过局部支持域内的节点构造形函数及建立离散系统方程，是一种基于节点的无网格数值方法。该方法形函数的构造不涉及网格生成，计算精度高，复杂模型的计算比有限元法便利，广泛应用于有限元法所触及的领域且成功地解决了某些网格方法难以处理的问题[10−12]。EFGM 在地球物理学领域也有少量应用，研究的内容主要集中在地震波场[13−17]、雷达波场[18−19]及大地电磁场[20−22]响应的计算。波场响应的计算证明了 EFGM 的有效性，但未深入讨论此方法相比于有限元法的优缺点。大地电磁场响应的计算体现了 EFGM 处理复杂模型较常规网格方法便利的优势。

径向基点插值法(RPIM)[23]是为改善无网格点插值法(PIM)[24−25]在节点分布不合理时无法顺利构造形函数的缺陷而提出的，与 EFGM 的区别主要在于形函数的构造方式。RPIM 与 PIM 形函数采用点插值的方法构造，满足 Kronecker delta 函数性质，第一类边界条件的加载比形函数采用拟合方法构造的 EFGM 便利，然而 RPIM 在地球物理学领域的研究还未见报导。本文作者详细介绍了 RPIM 形函数的构造过程，从大地电磁二维变分问题出发，采用 Galerkin 法并结合高斯积分公式推导了相应的系统矩阵离散表达式。由于 RPIM 计算效率较低[23]，将其与高效的 FEM 相耦合，形成了有限元−径向基点插值法(FE-RPIM)，数值计算结果表明 FE-RPIM 继承了 FEM 计算效率高及 RPIM 计算复杂模型便利的优点，是一种优越的计算方法。

1　大地电磁二维变分问题

当地下电性结构为二维时，取 z 轴垂直向下，x 轴指向北，y 轴指向东，求解域 Ω 为矩形区域，4 个顶点依次以 A、B、C、D 顺时针编号，Γ_1 为地质体的边界(见图 1)。

当入射电磁波为平面电磁波时，满足式(1)的变分问题[26]：

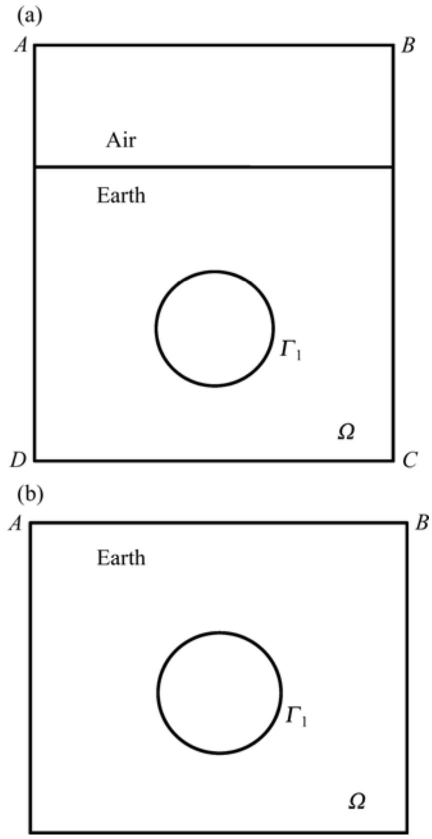

图 1　大地电磁二维正演求解区域

Fig. 1　Solving domain of magnetotelluric two-dimensional forward: (a) TE mode; (b) TM mode

$$\begin{cases} F(u)=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\tau(\nabla u)^2-\frac{1}{2}\lambda u^2\right]\mathrm{d}\Omega+\int\limits_{CD}\frac{1}{2}\tau k u^2\mathrm{d}\Gamma \\ u_{AB}=1 \\ \delta F(u)=0 \end{cases} \tag{1}$$

式中：∇ 是二维哈密顿算子，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y$；$k=\sqrt{-\mathrm{i}\omega\mu\sigma}$；取时谐因子为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，对于电场极化模式(TE 模式)：

$$\begin{cases} u=E_x \\ \tau=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu} \\ \lambda=\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

对于磁场极化模式(TM 模式)可知：

$$\begin{cases} u=H_x \\ \tau=\frac{1}{\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon} \\ \lambda=\mathrm{i}\omega\mu \end{cases} \tag{3}$$

式中：ω 为角频率；μ 为磁导率；σ 为电导率；ε 为介电常数；E_x 与 H_x 分别为电场与磁场的水平分量。

2 大地电磁二维变分问题的无网格解法

RPIM 利用位于积分点支持域内的场节点构造形函数，优点在于引入的径向基函数改善了由多项式基构造形函数所引起的奇异性问题。RPIM 形函数满足 Kronecker delta 函数性质($N_i(\boldsymbol{X})=\delta_{ij}$)，第一类边界条件的加载较便利。图 2 所示为 RPIM 中的背景网格、支持域、积分点与场节点示意图，由于背景网格的积分常选用高斯积分法，故积分点又称高斯积分点或高斯点。

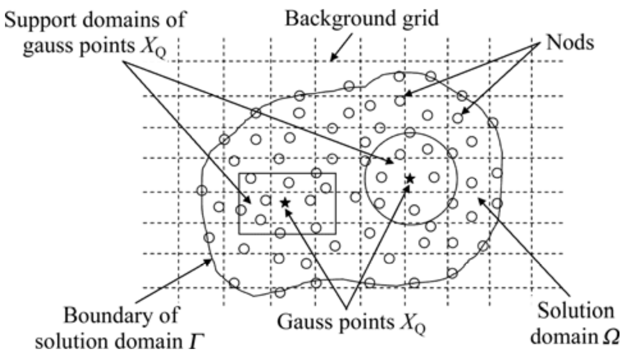

图 2 RPIM 中背景网格、支持域、积分点与场节点示意图

Fig. 2 Schematic diagram of background grid, support domain, gauss points and nodes in RPIM

2.1 支持域

支持域的形状如图 2 所示，常用的支持域形状有圆形与矩形两种，对于任一高斯点 X_Q，支持域尺寸 d 表达式如式(4)所示：

$$d=\alpha d_{\mathrm{c}} \tag{4}$$

式中：α 为支持域的无量纲尺寸，用于控制支持域的大小，是对计算精度影响很大的参数[8]；d_{c} 为位于高斯点 X_{Q} 附近的平均结点间距，表达式如式(5)所示：

$$d_{\mathrm{c}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{n}-1} \tag{5}$$

式中：A 为预估的支持域面积；n 为包含在 A 中的节点数。对于节点均匀分布的情况，d_{c} 为节点间距。在本研究中，采用矩形支持域，故有两个方向的支持域尺寸，如式(6)所示：

$$\begin{cases} d_{\mathrm{x}}=\alpha_{\mathrm{x}} d_{\mathrm{cx}} \\ d_{\mathrm{y}}=\alpha_{\mathrm{y}} d_{\mathrm{cy}} \end{cases} \tag{6}$$

式中：d_{cx} 与 d_{cy} 分别为横向和纵向节点间距；α_{x} 与 α_{y} 为横向和纵向的支持域无量纲尺寸。为便于程序设计，常取 $\alpha_{\mathrm{x}}=\alpha_{\mathrm{y}}=\alpha$，在本研究中，取 $\alpha=1.0$。

2.2 径向基点插值近似(RPIM)

求解域 Ω 中任意一点 $\boldsymbol{X}$ 处的场变量 $u(\boldsymbol{X})$ 的径向基点插值近似表达式为

$$u(\boldsymbol{X})\approx u^h(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a}_i+\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{b} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})$为径向基函数(RBF)；$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{X})$为二维空间坐标 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=[x,y]$ 的基函数；$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是系数向量；n 为 RBF 的个数；m 为单项式的个数。

常用的 RBF 有多二次曲面(MQ)函数、薄板样条(TPS)函数、高斯函数及对数函数[23]。FRANKE[27]比较了 29 种离散数据插值的精度，通常情况下 MQ 函数与 TPS 函数精度最高[27]。在本研究中，选择 MQ 函数,其表达式如下

$$\begin{cases} R_i(x,y)=[r_i^2+(\alpha_{\mathrm{c}}d_{\mathrm{c}})^2]^q \\ r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \end{cases} \tag{8}$$

式中：d_{c} 为与节点间距有关的特征长度，当节点均匀分布时可取 $d_{\mathrm{c}}=\sqrt{d_{\mathrm{cx}}^2+d_{\mathrm{cy}}^2}$；$d_{\mathrm{cx}}$ 和 d_{cy} 分别 d_{c} 在 x 与 y 方向的分量；x 与 y 为高斯点位置的坐标，x_i 与 y_i 为支持域内节点的坐标；α_{c} 与 q 为径向基函数的形状参数，不同学科领域形状参数的最优值一般不同，数值试验研究表明参数 q 比参数 α_{c} 对 RPIM 性能的影响大，在节点等间距分布情况下，α_{c} 的取值区间约为[−40，40]，q 的取值区间约为[−2，0.9]且 $q\neq0$，由此可见，基于 MQ 函数的 RPIM 在大地电磁正演计算具有很好的普适性，本研究的数值计算中取 $\alpha_{\mathrm{c}}=1.3$，$q=0.5$。

式(7)中的 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{X})$可用 Pascal 三角形确定，对于一维(1D)和二维(2D)空间，其线性基函数分别为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{1\quad x\}\qquad m=2,\ p=1\qquad (1\mathrm{D}) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{1\quad x\quad y\}\qquad m=3,\ p=1\qquad (2\mathrm{D}) \tag{10}$$

其二次基函数分别为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{1\quad x\quad x^2\}\qquad m=3, p=2\qquad (1\mathrm{D}) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{1\quad x\quad y\quad x^2\quad xy\quad y^2\}\qquad m=6,\ p=2\qquad (2\mathrm{D}) \tag{12}$$

完备的 p 阶多项式一般可表示为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{1 \quad x \quad x^2 \cdots x^{p-1} \quad x^p\} \quad (1\mathrm{D}) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \cdots x^p \quad y^p\} \quad (2\mathrm{D}) \tag{14}$$

适当增加基函数的阶次能提高无网格法的近似精度，但也降低了计算效率。基函数的形式并不只局限于多项式，也可采用其他不同特性的函数，如楔形函数[28]、带权的正交函数[29]、小波基函数[30]。

将式(7)转化成矩阵的形式如式(15)所示：

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{b} \tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}=\{u_1\ u_2\ u_3\cdots u_n\}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}=\{a_1\ a_2\ a_3\cdots a_n\}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}=\{b_1\ b_2\ b_3\cdots b_n\}^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{R}_0$ 与 $\boldsymbol{P}_m$ 的展开式分别如式(16)和(17)所示：

$$\boldsymbol{R}_0=\begin{bmatrix} R_1(\boldsymbol{r}_1) & R_2(\boldsymbol{r}_1) & R_3(\boldsymbol{r}_1) & \cdots R_n(\boldsymbol{r}_1) \\ R_1(\boldsymbol{r}_2) & R_2(\boldsymbol{r}_2) & R_3(\boldsymbol{r}_2) & \cdots R_n(\boldsymbol{r}_2) \\ R_1(\boldsymbol{r}_3) & R_2(\boldsymbol{r}_3) & R_3(\boldsymbol{r}_3) & \cdots R_n(\boldsymbol{r}_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ R_1(\boldsymbol{r}_n) & R_2(\boldsymbol{r}_n) & R_3(\boldsymbol{r}_n) & \cdots R_n(\boldsymbol{r}_n) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{P}_m=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \cdots\cdots p_m(\boldsymbol{x}_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \cdots\cdots p_m(\boldsymbol{x}_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \cdots\cdots p_m(\boldsymbol{x}_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_ny_n \cdots\cdots p_m(\boldsymbol{x}_n) \end{bmatrix} \tag{17}$$

式(15)中有 $n+m$ 个变量。m 个约束条件如式(18)所示：

$$\sum_{i=1}^{n} p_j(\boldsymbol{X}_i)a_i=\boldsymbol{P}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0,\ j=1,2,\cdots,m \tag{18}$$

结合式(9)与(12)可得到矩阵方程如式(19)所示：

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{s}}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_0 & \boldsymbol{P}_m\\ \boldsymbol{P}_m^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_0 \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}}=\{u_1\ u_2\ u_3\cdots u_n\ 0\ 0\cdots 0\}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{a}_0=\{a_1\ a_2\cdots a_n\ \ b_1\ b_2\cdots b_m\}^{\mathrm{T}}$。

因为矩阵 $\boldsymbol{R}_0$ 是对称的，故矩阵 $\boldsymbol{G}$ 也是对称的，求解式(19)可得式(20)：

$$\boldsymbol{a}_0=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}} \tag{20}$$

将式(15)写为矩阵的形式有

$$u^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{b}=\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\ \ \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{Bmatrix} \tag{21}$$

将式(20)代入式(21)得

$$u^{\mathrm{h}}(\boldsymbol{X})=\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\ \ \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}} \tag{22}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{\phi_1(\boldsymbol{X})\ \ \phi_2(\boldsymbol{X})\ \cdots\ \phi_n(\boldsymbol{X})\ \ \phi_{n+1}(\boldsymbol{X})\ \ \phi_{n+2}(\boldsymbol{X})\ \cdots\ \phi_{n+m}(\boldsymbol{X})\}$，取 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})$ 的前 n 项计算点 $\boldsymbol{X}$ 在支持域内的 LRPIM 形函数 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})$，其表达式为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})=\{\phi_1(\boldsymbol{X})\ \ \phi_2(\boldsymbol{X})\ \cdots\ \phi_n(\boldsymbol{X})\} \tag{23}$$

相应的导数表达式为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathrm{k})}(\boldsymbol{X})=\left\{\frac{\partial^{\mathrm{k}}[\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})]}{\partial x^{\mathrm{k}}}\ \ \frac{\partial^{\mathrm{k}}[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X})]}{\partial x^{\mathrm{k}}}\right\}= \\ \{\phi_1^{(\mathrm{k})}(\boldsymbol{X})\ \ \phi_2^{(\mathrm{k})}(\boldsymbol{X})\ \cdots\ \phi_n^{(\mathrm{k})}(\boldsymbol{X})\}^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

RPIM 改善了 PIM 插值函数的奇异性问题[23]，RPIM 形函数满足 Kronecker delta 函数性质，第一类边界条件加载便利。然而径向基函数中包含了对 RPIM 计算精度有直接影响的形状参数，形状参数的最优值往往需要通过数值试验获得。

2.3 RPIM 离散系统方程的构造

方程式(1)取变分有

$$\delta F(u^{\mathrm{h}})=\int_{\Omega}[(\nabla\delta u^{\mathrm{h}})^{\mathrm{T}}\cdot(\tau\nabla u^{\mathrm{h}})-\delta(u^{\mathrm{h}})^{\mathrm{T}}\cdot(\lambda u^{\mathrm{h}})]\mathrm{d}\Omega+ \\ \int_{CD}\delta(u^{\mathrm{h}})^{\mathrm{T}}\cdot(\tau k u^{\mathrm{h}})\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{25}$$

$$u^{\mathrm{h}}=[\phi_1\ \ \phi_2\ \cdots\ \phi_n][u_1\ \ u_2\ \ u_n]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Phi}_{(1\times n)}\boldsymbol{u}_{(n\times 1)}=\sum_{I}^{\mathrm{n}}\phi_I u_I \tag{26}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}$ 为形函数矩阵；n 为支持域内的节点数；$\boldsymbol{u}$ 为支持域内 n 个节点的场向量。对式(26)进行变分运算有

$$\delta u^{\mathrm{h}}=\boldsymbol{\Phi}_{(1\times n)}\delta\boldsymbol{u}_{(n\times 1)}=\sum_{I}^{n}\phi_I\delta u_I \tag{27}$$

将式(26)与(27)代入式(25)，结合变分问题采用的坐标系统，得到方程式(28)：

$$\sum_{I}^{n}\sum_{J}^{n}\delta u_I^{\mathrm{T}}\left\{\int_{\Omega}\left[\tau\left(\frac{\partial\phi_I}{\partial y}\frac{\partial\phi_J}{\partial y}+\frac{\partial\phi_I}{\partial z}\frac{\partial\phi_J}{\partial z}\right)-\lambda\phi_I\phi_J\right]\mathrm{d}\Omega+ \\ \int_{CD}\tau k\phi_I\phi_J\mathrm{d}\Gamma\right\}u_J=0 \tag{28}$$

式(28)采用支持域内 n 个场节点编号，对于求解域内所有场节点还应有一个用于将局部节点矩阵组装成总体刚度矩阵的总体编号体系。当节点 I 和节点 J

位于不同支持域时，其相应的被积函数为 0，因此可得到按求解域节点编号的总体编号体系方程如式(29)所示

$$\sum_I^N\sum_J^N \delta u_I^{\mathrm{T}}\left\{\int_\Omega\left[\tau\left(\frac{\partial\phi_I}{\partial y}\frac{\partial\phi_J}{\partial y}+\frac{\partial\phi_I}{\partial z}\frac{\partial\phi_J}{\partial z}\right)-\lambda\phi_I\phi_J\right]\mathrm{d}\varOmega+\int_{CD}\tau k\phi_I\phi_J\mathrm{d}\varGamma\right\}u_J=0 \tag{29}$$

式中：N 为场节点总数。

式(29)可简写为

$$\begin{cases}\sum_I^N\sum_J^N \delta u_I^{\mathrm{T}}K_{IJ}u_J=\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KU}=0\\ \boldsymbol{K}=\sum_I^N\sum_J^N\left\{\int_\Omega\left[\tau\left(\frac{\partial\phi_I}{\partial y}\frac{\partial\phi_J}{\partial y}+\frac{\partial\phi_I}{\partial z}\frac{\partial\phi_J}{\partial z}\right)-\lambda\phi_I\phi_J\right]\mathrm{d}\varOmega+\right.\\ \left.\int_{CD}\tau k\phi_I\phi_J\mathrm{d}\varGamma\right\}\end{cases} \tag{30}$$

由于 $\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ 是任意的，故式(30)成立的条件为

$$\boldsymbol{KU}=0 \tag{31}$$

式(31)即为 RPIM 构造的系统方程。$\boldsymbol{K}$ 的表达式中包含对求解域 $\varOmega$ 与求解域边界 $\varGamma$ 的积分。计算这些积分，需将求解域离散成一组背景网格(见图 2)，总体积分可表示成这些单元积分之和的形式，每个单元的积分利用高斯积分法求解，有

$$\boldsymbol{K}_{IJ}=\sum_k^{n_\mathrm{c}}\sum_{i=1}^{n_\mathrm{g}}\omega_i\left\{\tau(\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i})[\frac{\partial\phi_I}{\partial y}\frac{\partial\phi_J}{\partial y}+\frac{\partial\phi_I}{\partial z}\frac{\partial\phi_J}{\partial z}]-\lambda(\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i})\phi_I\phi_J\right\}|J_{ik}^{\mathrm{D}}|+\sum_l^{n_{\mathrm{c}\varGamma}}\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{g}\varGamma}}\omega_i\tau(\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i})k(\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i})\phi_I\phi_J|J_{il}^{\mathrm{B}}| \tag{32}$$

式中：n_c 与 $n_{\mathrm{c}\varGamma}$ 分别为背景单元及边界单元的个数；n_g 与 $n_{\mathrm{g}\varGamma}$ 分别为背景单元及边界单元内的高斯点数目；ω_i 为第 i 个高斯点 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i}$ 的权系数；J_{ik}^{D} 与 J_{il}^{B} 分别为背景单元 k 在积分点 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i}$ 处面积分及子边界 l 在积分点 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{Q}i}$ 处曲线积分的雅可比矩阵。式(32)即为总体刚度矩阵的离散表达式，为带状、对称的稀疏矩阵[23]。

2.4 FE-RPIM 离散系统方程的构造

RPIM 计算效率低但能方便地处理复杂模型，FEM 计算高效，因此将两者耦合起来。RPIM 与 FEM 系统矩阵都是由(4×4)阶小矩阵块状累加至总体矩阵中形成的，这构成了 RPIM 与 FEM 耦合的基础。

如图 3 所示，FE-RPIM 的基本思想是将求解区域 $\varOmega$ 划分为实线的有限单元的 FEM 区域 $\varOmega_1$ 及虚线的背景单元 RPIM 区域 $\varOmega_2$，为了利用 FEM 计算高效及 RPIM 计算复杂模型便利的优点，FEM 区域面积往往占多数，且异常体一般置于 RPIM 区域中。对式(1)取变分并将 FEM 区域单元离散化可得

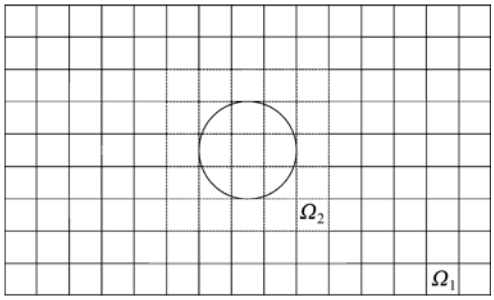

图 3 FE-RPIM 中计算模型 2 的有限单元与背景网格分布示意图

Fig. 3 Schematic diagram of finite element and background grid distribution for numerical calculation of model 2 in FE−RPIM

$$\begin{cases}\delta F_1(u)=\sum_{\varOmega_1}\int_\mathrm{e}[(\nabla\delta u)\cdot(\tau\nabla u)-\delta(u)^{\mathrm{T}}\cdot(\lambda u)]\mathrm{d}\varOmega+\\ \quad\sum_{CD}\int_{\varGamma_\mathrm{e}}\delta u^{\mathrm{T}}\cdot(\tau k u)\mathrm{d}\varGamma\\ \delta F_2(u)=\int_{\varOmega_2}[(\nabla\delta u)^{\mathrm{T}}\cdot(\tau\nabla u)-\delta(u)^{\mathrm{T}}\cdot(\lambda u)]\mathrm{d}\varOmega\\ \delta F(u)=\delta F_1(u)+\delta F_2(u)\end{cases} \tag{33}$$

先将 FEM 区域的积分项即 $\delta F_1(u)$ 离散如式(34)所示：

$$\begin{cases}\int_\mathrm{e}[(\nabla\delta u)\cdot(\tau\nabla u)-\delta u^{\mathrm{T}}\cdot(\lambda u)]\mathrm{d}\varOmega=\\ \quad\delta u_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(K_{1\mathrm{e}}-K_{2\mathrm{e}})u_\mathrm{e}\\ \int_{\varGamma_\mathrm{e}}\delta u^{\mathrm{T}}\cdot(\tau k u)\mathrm{d}\varGamma=\delta u_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}K_{3\mathrm{e}}u_\mathrm{e}\\ K_{1\mathrm{e}}=\frac{\tau b}{6a}\begin{bmatrix}2&1&-1&-2\\1&2&-2&-1\\-1&-2&2&1\\-2&-1&1&2\end{bmatrix}+\frac{\tau a}{6b}\begin{bmatrix}2&-2&-1&1\\-2&2&1&-1\\-1&1&2&-2\\1&-1&-2&2\end{bmatrix}\\ K_{2\mathrm{e}}=\frac{\lambda ab}{36}\begin{bmatrix}4&2&1&2\\2&4&2&1\\1&2&4&2\\2&1&2&4\end{bmatrix}\\ K_{3\mathrm{e}}=\frac{\tau kb}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{cases} \tag{34}$$

式中：a 与 b 分别为单元的横纵向宽度；$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}$、$\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}$、$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}$ 均为 4×4 阶矩阵，将它们扩展成全体节点的矩阵 $\overline{\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}}$、$\overline{\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}}$、$\overline{\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}}$ 可得

$$\delta F_1(u)=\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\sum_{\Omega_1}\overline{\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}}-\sum_{\Omega_1}\overline{\boldsymbol{K}_{2\mathrm{e}}}+\sum_{CD}\overline{\boldsymbol{K}_{3\mathrm{e}}})\boldsymbol{U}=\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{FEM}}\boldsymbol{U} \tag{35}$$

对 $\delta F_2(u)$ 离散，$\delta F_2(u)$ 与式(35)的区别仅在于无网格节点数目的不同，参照式(30)得

$$\begin{cases}\delta F_2(u)=\sum\limits_{I=M_1}^{M_n}\sum\limits_{J=M_1}^{M_n}\delta u_I^{\mathrm{T}}K_{IJ}u_J=\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{RPIM}}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{RPIM}}=\sum\limits_{I=M_1}^{M_n}\sum\limits_{J=M_1}^{M_n}\left\{\int_{\Omega}\left[\tau\left(\dfrac{\partial\phi_I}{\partial y}\dfrac{\partial\phi_J}{\partial y}+\dfrac{\partial\phi_I}{\partial z}\dfrac{\partial\phi_J}{\partial z}\right)-\lambda\phi_I\phi_J\right]\mathrm{d}\Omega\right\}\end{cases} \tag{36}$$

式中：M_1 与 M_n 表示 RPIM 区域第一个节点与最后一个节点的编号，同样 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{RPIM}}$ 中包含的积分可用式(32)的高斯积分法求解。背景网格积分是 RPIM 中最重要的数值计算问题之一，总积分点数一般取支持域内场节点的数量的 2~8 倍，但高斯点数目的增加并不能显著提高无网格法的计算精度反而极大地降低了计算效率[22]，因此，每个背景单元仅采用 4(2×2)个高斯点，每个边界单元采用 2 个高斯点。将式(35)与(36)相加得

$$\delta F(u)=\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{FEM}}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{RPIM}})\boldsymbol{U}=0 \tag{37}$$

由于 $\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ 是任意的，故式(37)成立的条件为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{K}^{\mathrm{FEM}}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{RPIM}})\boldsymbol{U}=0 \tag{38}$$

式(38)即为 FE-RPIM 构造的系统方程，由于 FEM 与 RPIM 构造总体矩阵 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{FEM}}$ 与 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{RPIM}}$ 均为带状、对称、稀疏的，因此 FE-RPIM 构造的总体矩阵 $\boldsymbol{K}$ 也具有带状、对称、稀疏的性质。

求解线性方程组 $\boldsymbol{KU}$=0 还需加载边界条件，在本研究中，采用简单易行的罚函数法，将刚度矩阵中相应的对角元素 K_{II} 变为 αK_{II}，α 为惩罚系数，其值可取 1×10^4~1×10^{10}，然后将边界上的 u_{I} 值取代方程组右端的零向量即可。

3 正演计算

3.1 三层模型

首先通过三层模型来观察数值算法(FEM、RPIM、PIM)的计算精度。第一层电阻率 ρ_1=500 Ω·m，层厚 h_1=1 km；第二层电阻率 ρ_2=2000 Ω·m, 层厚 h_2=3 km；第三层电阻率 ρ_3=100 Ω·m 。场节点等间距分布于求解域，对于 TE 模式，使用 3321(41×81)个场节点和 3200(40×80)个背影网格，横纵向节点间距均为 200 m。对于 TM 模式，使用 1681(41×41)个场节点和 1600(40×40)个背影网格，节点间距与 TE 模式相同。有限元法节点的分布与无网格法一致。

表 1 和 2 所列分别为三层模型视电阻率和阻抗相位数值计算的相对误差，相对误差值的大小对应着数值方法计算精度的高低，相对误差值越大，精度越低，反之则精度越高。由表 1 可知，3 种数值算法(FEM、RPIM 与 PIM)计算精度均很高且量级相同，都随频率的增高而降低，精度变化范围约为 3×10^{-10}~4×10^{-3}；阻抗相位数值计算精度变化规律与视电阻率类似，精度约为 2×10^{-10}~4×10^{-4}(见表 2)。

表 1 三层模型视电阻率数值解的相对误差

Table 1 Numerical solutions relative error of apparent resistivity for three-layer model

Frequency/Hz	FEM		RPIM		PIM	
	TE mode	TM mode	TE mode	TM mode	TE mode	TM mode
0.0001	3.942×10^{-10}	2.957×10^{-10}	4.928×10^{-10}	3.942×10^{-10}	3.942×10^{-10}	4.928×10^{-10}
0.001	1.194×10^{-8}	1.251×10^{-8}	1.194×10^{-8}	1.261×10^{-8}	1.194×10^{-8}	1.261×10^{-8}
0.01	2.965×10^{-7}	3.143×10^{-7}	2.965×10^{-7}	3.143×10^{-7}	2.965×10^{-7}	3.143×10^{-7}
0.1	3.644×10^{-6}	4.009×10^{-6}	3.644×10^{-6}	4.009×10^{-6}	3.644×10^{-6}	4.009×10^{-6}
1	4.347×10^{-5}	4.229×10^{-5}	4.347×10^{-5}	4.229×10^{-5}	4.347×10^{-5}	4.229×10^{-5}
10	3.241×10^{-4}	4.854×10^{-4}	3.241×10^{-4}	4.854×10^{-4}	3.241×10^{-4}	4.854×10^{-4}
50	9.409×10^{-4}	8.187×10^{-4}	9.409×10^{-4}	8.187×10^{-4}	9.409×10^{-4}	8.187×10^{-4}
100	3.374×10^{-3}	2.193×10^{-3}	3.374×10^{-3}	2.193×10^{-3}	3.374×10^{-3}	2.193×10^{-3}

表 2 三层模型阻抗相位数值解的相对误差

Table 2 Numerical solutions relative error of impedance phase for three-layer model

Frequency/Hz	FEM		RPIM		PIM	
	TE mode	TM mode	TE mode	TM mode	TE mode	TM mode
0.0001	2.202×10^{-10}	2.202×10^{-10}	2.202×10^{-10}	2.202×10^{-10}	2.202×10^{-10}	4.404×10^{-10}
0.001	8.211×10^{-9}	8.428×10^{-9}	8.211×10^{-9}	8.428×10^{-9}	8.211×10^{-9}	8.428×10^{-9}
0.01	2.398×10^{-7}	2.525×10^{-7}	2.398×10^{-7}	2.525×10^{-7}	2.398×10^{-7}	2.525×10^{-7}
0.1	5.554×10^{-6}	5.88×10^{-6}	5.554×10^{-6}	5.88×10^{-6}	5.554×10^{-6}	5.88×10^{-6}
1	5.514×10^{-5}	6.129×10^{-5}	5.514×10^{-5}	6.129×10^{-5}	5.514×10^{-5}	6.129×10^{-5}
10	8.903×10^{-5}	1.031×10^{-4}	8.903×10^{-5}	1.031×10^{-4}	8.903×10^{-5}	1.031×10^{-4}
50	6.018×10^{-4}	1.247×10^{-4}	6.018×10^{-4}	1.247×10^{-4}	6.018×10^{-4}	1.247×10^{-4}
100	3.606×10^{-4}	2.472×10^{-4}	3.606×10^{-4}	2.472×10^{-4}	3.606×10^{-4}	2.472×10^{-4}

3.2 方形截面二度体模型

验证 RPIM 求解 MT 问题的有效性，采用与三层模型相同的节点分布计算了方形截面二度体模型(见图 4)：异常体边长 L=400 m，电阻率 ρ_2=100 Ω·m，埋深 h=800 m，求解域背景电阻率 ρ_1=1000 Ω·m，工作频率 f=1×10^{-4}~1×10^3 Hz。

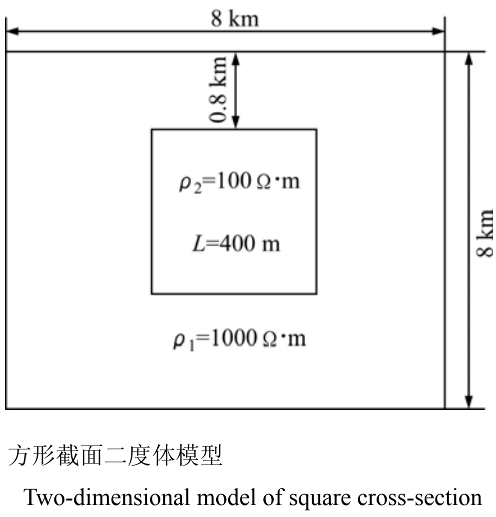

图 4 方形截面二度体模型

Fig. 4 Two-dimensional model of square cross-section

数值计算结果显示 RPIM、FE-RPIM 和 FEM 计算的视电阻率断面图完全一致。图 5(a)所示为 RPIM 的 TE 模式视电阻率断面图，低阻异常呈椭圆状，低阻异常横向上比实际低阻体范围大，视电阻率变化范围为 780~1050 Ω·m；TM 模式视电阻率断面图中，低阻异常呈直立无限向下延伸，低阻体横向位置与实际低阻体一致，但低阻异常无下边界，视电阻率 ρ 变化范围为 840~1060 Ω·m，较好地反映出了异常体的存在。图 5(b)所示为 FEM 数值计算结果，对比图 5(a)可知，RPIM 与 FEM 断面图仅在 TE 模式下有细微差别，TE 模式 FEM 断面图视电阻率变化范围为 770~1050 Ω·m，验证了 RPIM 二维算法的正确性。

3.3 圆形截面二度体模型

RPIM 是为克服 FEM 网格生成困难的缺陷而提出的，是一种节点方法，模型参数加载于只与坐标有关的高斯点上，一个背景网格内的几个高斯点可以有各自不同的物性参数值，因此，处理复杂模型较常规网格方法便利，FE-RPIM 作为 FEM 与 RPIM 的耦合同样继承了这一特性，为体现 RPIM 及 FE-RPIM 这一优势，采用与方形截面二度体模型相同的节点分布计算了圆形截面二度体模型(见图 6)，截面半径 R=200 m，其余参数与方形截面二度体相同。

图 7 所示为圆形截面二度体模型 RPIM 与 FE-RPIM 视电阻率计算结果，两种方法计算结果断面图相同。对比方形截面二度体模型(见图 5)可以看出，两者形态基本相似，图 7 中视电阻率幅值与异常幅值的变化范围略小，这与圆形截面低阻体规模比方形截面二度体略小一致。

3.4 脉状体模型

为了验证 RPIM 与 FE-RPIM 处理复杂地质体边界的能力，计算了两个不同倾角的脉状体模型(见图 8)：截面下底面 a=400 m，上下底面间距 h=600 m，异常体右边界与地面的夹角分别呈 45°与 30°，电阻率、围岩电阻率及前点分布情况与上述的二维模型相同，工作频率 f 为 16~2048 Hz。

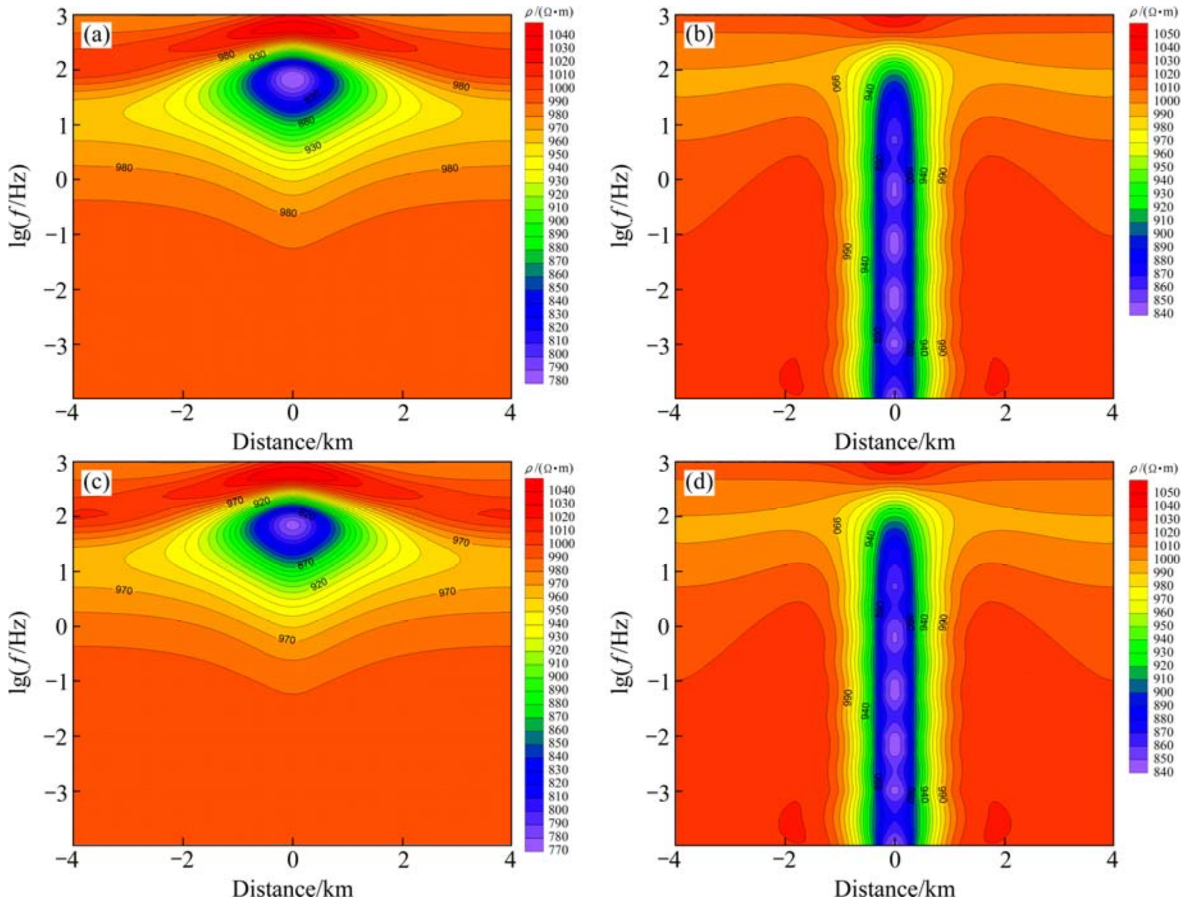

图 5　方形截面二度体模型 RPIM、FEM 的视电阻率断面图

Fig. 5　Numerical solutions of apparent resistivity by RPIM and FEM for model of square cross-section: (a) RPIM for TE mode; (b) RPIM for TM mode; (c) FEM for TE mode; (d) FEM for TM mode

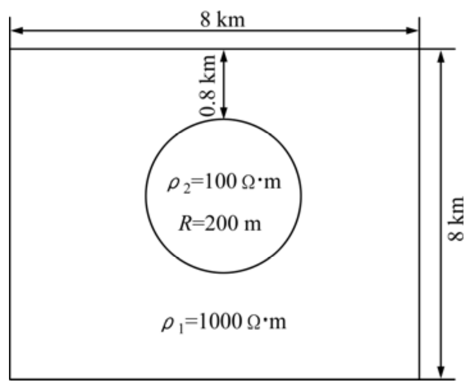

图 6　圆形截面二度体模型

Fig. 6　Two-dimensional model of circular cross-section

图 9 所示为脉状体模型 TE 模式 RPIM 与 FE-RPIM 计算结果。由图 9 可见，脉状体的视电阻率断面左右不对称，低阻区域呈“上窄下宽”倾斜条带状分布，倾向与地质体的倾向相同。45°脉状体视电阻率变化范围为 100~1100 Ω·m。30°脉状体视电阻率变化范围为 50~1200 Ω·m，较 45°脉状体低阻条带呈现更小的倾角。

3.5　数值算法效率

虽然 RPIM 计算效果良好，却是一种低效率的数值方法，FE-RPIM 提高了计算效率。表 3 所列为 17 个计算频点下方形截面二度体模型的 RPIM、FE-RPIM 及 FEM 计算耗时 t。由表 3 可知，RPIM 计算耗时约为 FEM 的 9 倍，FE-RPIM 的耗时相比于 RPIM 更少，且随着 RPIM 区域的减少，计算耗时显著降低，采用背景网格(10×4)的 FE-RPIM 计算效率已和 FEM 的相当。

4　结论

1) 将 RPIM 及 FE-RPIM 应用于大地电磁二维正演，采用径向基点插值原理构造了 RPIM 形函数；从大地电磁二维变分问题出发采用 Galerkin 法并结合高

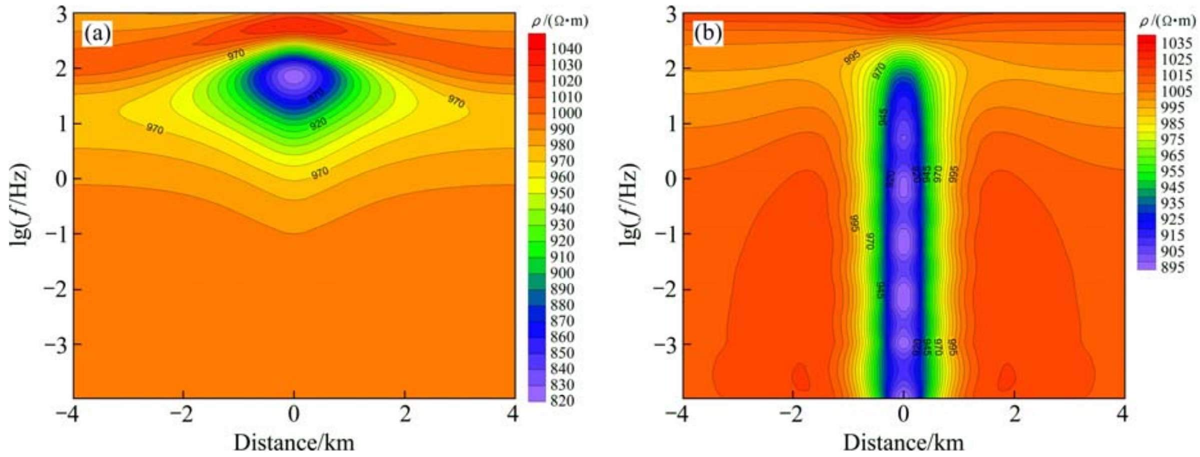

图 7　圆形截面二度体模型 RPIM 与 FE-RPIM 视电阻率断面图

Fig. 7　Numerical solutions of apparent resistivity by RPIM and FE-RPIM for model of circular cross-section: (a) TE mode; (b) TM mode

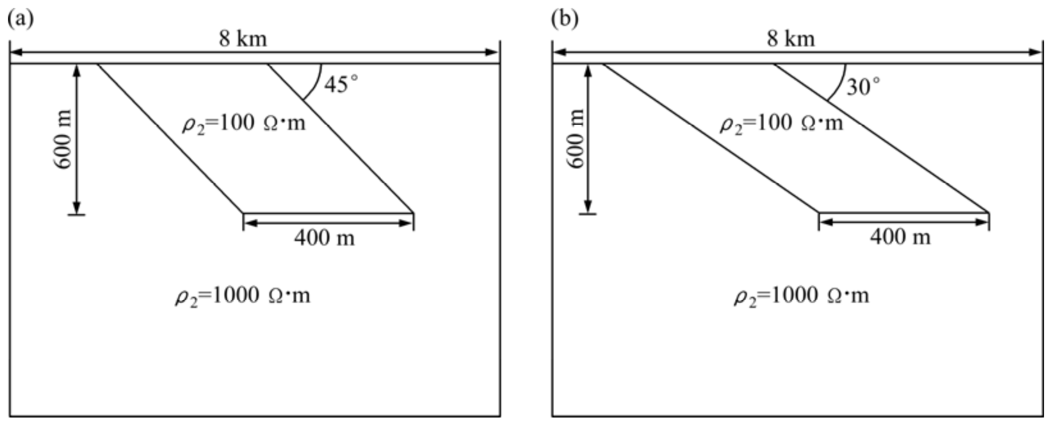

图 8　脉状二度体模型

Fig. 8　Two-dimensional vein-like models: (a) Vein-like model in 45°; (b) Vein-like model in 30°

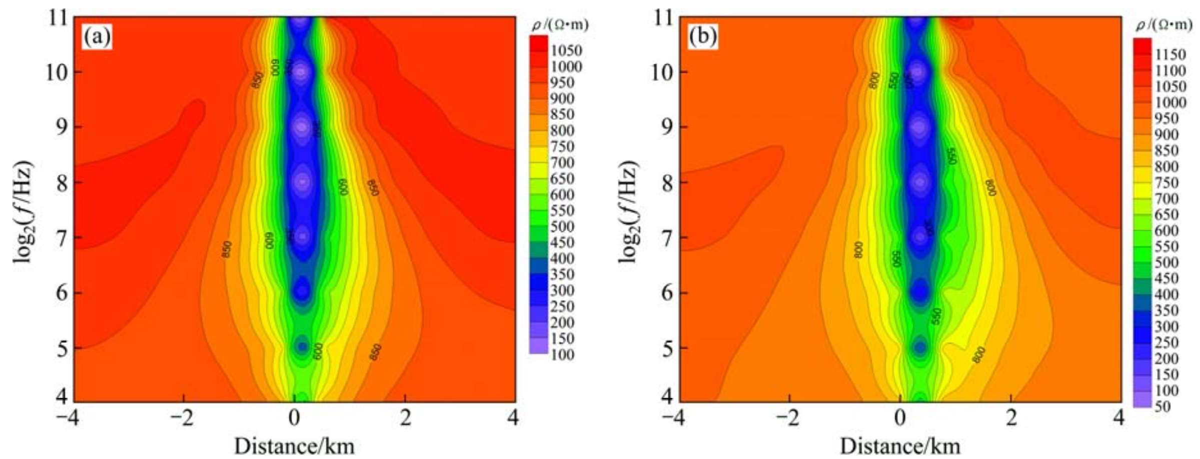

图 9　TE 模式脉状体模型 RPIM 与 FE-RPIM 视电阻率断面图

Fig. 9　Numerical solutions of apparent resistivity for vein-like model by RPIM and FE-RPIM in TE mode: (a) Vein-like model in 45°; (b) Vein-like model in 30°

表 3　方形截面模型数值方法计算耗时

Table 3　Computation time of numerical methods for model of square cross-section

t_{RPIM}/s		$t_{\mathrm{FE\text{-}RPIM}}$/s				t_{FEM}/s	
		Meshfree domain (10×10)		Meshfree domain (10×4)			
TE mode	TM mode	TE mode	TM mode	TE mode	TM mode	TE mode	TM mode
181	67	28	13	24	11	20	8

斯积分公式推导了 RPIM 及 FE-RPIM 的总体矩阵离散表达式，通过试验分析得出了大地电磁二维正演问题的径向基函数形状参数建议值：α_c=1.3，q=0.5。

2) 采用节点均匀分布的 FEM、RPIM 及 PIM 计算了三层模型的大地电磁场响应，计算结果表明 3 种数值方法计算精度相当，固定网格下精度随频率的增高而降低。在 10^{-4}~10^{2} Hz 频段，视电阻率精度变化范围约为 3×10^{-10}~4×10^{-3}，视相位精度约为 2×10^{-10}~4×10^{-4}。

3) 用 RPIM 与 FEM 计算了方形截面二度异常体的大地电磁场响应，两者断面图形态基本一致，进一步验证了 RPIM 算法的有效性；柱形二度体及倾斜条带状二度体大地电磁场响应体现了 RPIM 在处理复杂模型问题较常规网格方法便利的优势。

4) 结合 RPIM 处理复杂模型便利及 FEM 计算高效的特性，将两种方法耦合形成了 FE-RPIM。方形截面二度异常体 FE-RPIM 计算结果与 FEM 一致，验证了耦合算法的正确性以及构建地质模型的优越性。

5) 对比了 RPIM、FE-RPIM 及 FEM 的计算效率，RPIM 计算耗时约为 FEM 的 9 倍。FE-RPIM 计算时异常体所在的区域往往较小(占求解域的 1/40)，故计算耗时低于 RPIM 的而略高于 FEM 的。随着 FEM 区域的增大，FE-RPIM 耗时将逐渐趋于 FEM 的。本研究中无网格区域(10×4)的 FE-RPIM 耗时与 RPIM 耗时相比，在 TE 模式下效率提高约 87%，在 TM 模式下效率提高约 84%。因此，FE-RPIM 综合了 RPIM 处理复杂模型便利及 FEM 计算高效的优点，是一种优越的数值方法。

REFERENCES

[1] 陈　辉, 邓居智, 谭捍东, 杨海燕. 大地电磁三维交错网格有限差分数值模拟中的散度校正方法研究[J]. 地球物理学报, 2011, 54(6): 1649−1659.
CHEN Hui, DENG Ju-zhi, TAN Han-dong, YANG Hai-yan. Study on divergence correction method in three-dimensional magnetotelluric modeling with staggered-grid finite difference method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2011, 54(6): 1649−1659.

[2] 董　浩, 魏文博, 叶高峰, 金　胜, 景建恩. 基于有限差分正演的带地形三维大地电磁反演方法[J]. 地球物理学报, 2014, 57(3): 939−952.
DONG Hao, WEI Wen-bo, YE Gao-feng, JIN Sheng, JING Jian-en. Study of Three-dimensional magnetotelluric inversion including surface topography based on finite-difference method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2014, 57(3): 939−952.

[3] WANNAMAKER P E. Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations[J]. Geophysics, 1991, 56(11): 1716−1728.

[4] 刘　云, 王绪本. 电性参数分块连续变化二维 MT 有限元数值模拟[J]. 地球物理学报, 2012, 55(6): 2079−2086.
LIU Yun, WANG Xu-ben. The FEM for modeling 2-D MT with continuous variation of electric parameters within each block[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2012, 55(6): 2079−2086.

[5] KEY K, WEISS C. Adaptive finite-element modeling using unstructured grids: The 2D magnetotelluric example[J]. Geophysics, 2006, 71(6): 291−299.

[6] 刘长生, 汤井田, 任政勇, 冯德山. 基于非结构化网格的三维大地电磁自适应矢量有限元模拟[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2010, 41(5): 1855−1859.
LIU Chang-sheng, TANG Jing-tian, REN Zheng-yong, FENG De-shan. Three-dimension magnetotellurics modeling by adaptive edge finite-element using unstructured meshes[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2010, 41(5): 1855−1859.

[7] REN Zheng-yong, TANG Jing-tian. 3D direct current resistivity modeling with unstructured mesh by adaptive finite-element method[J]. Geophysics, 2010, 75(1): 7−17.

[8] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229−256.

[9] DOLBOW J, BELYTSCHKO T. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 1998, 5 (3): 207−241.

[10] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods[J]. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1994, 2(3): 519−534.

[11] LI Dong-ming, BAI Fu-nong, CHENG Yu-min, LIEW K M. A novel complex variable element-free Galerkin method for

two-dimensional large deformation problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 233/236(1): 1−10.

[12] LIU Lei-chao, DONG Xiang-huai, LI Cong-xin. Adaptive finite element-element-free Galerkin coupling method for bulk metal forming processes[J]. Journal of Zhejiang University-Science A, 2009, 10(3): 353−360.

[13] 贾晓峰, 胡天跃. 滑动最小二乘法求解地震波波动方程[J]. 地球物理学进展, 2005, 20(4): 920−924.
JIA Xiao-feng, HU Tian-yue. Solving seismic wave equation by moving least squares (MLS) method[J]. Progress in Geophysics, 2005, 20(4): 920−924.

[14] 贾晓峰. 复杂介质中地震波模拟与成像的无单元数值算法[D]. 北京: 北京大学, 2005.
JIA Xiao-feng. Element-free Galerkin method for seismic numerical modeling and imaging in complex media[D]. Beijing: Peking University, 2005.

[15] 贾晓峰, 胡天跃, 王润秋. 复杂介质中地震波模拟的无单元法[J]. 石油地球物理勘探, 2006, 41(1): 43−48.
JIA Xiao-feng, HU Tian-yue, WANG Run-qiu. A mesh-free algorithm of seismic wave simulation in complex medium[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2006, 41(1): 43−48.

[16] 贾晓峰, 胡天跃, 王润秋. 无单元法用于地震波波动方程模拟与成像[J]. 地球物理学进展, 2006, 21(1): 11−17.
JIA Xiao-feng, HU Tian-yue, WANG Run-qiu. Wave equation modeling and imaging by using element-free method[J]. Progress in Geophysics, 2006, 21(1): 11−17.

[17] 王月英. 地震波正演模拟中无单元 Galerkin 法初探[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(5): 1539−1544.
WANG Yue-ying. Study of element-free Galerkin method in the seismic forward modeling[J]. Progress in Geophysics, 2007, 22(5): 1539−1544.

[18] 冯德山, 王洪华, 戴前伟. 基于无单元 Galerkin 法探地雷达正演模拟[J]. 地球物理学报, 2013, 56(1): 298−308.
FENG De-shan, WANG Hong-hua, DAI Qian-wei. Forward simulation of ground penetrating radar based on the element-free Galerkin method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2013, 56(1): 298−308.

[19] 戴前伟, 王洪华. 基于随机介质模型的 GPR 无单元法正演模拟[J]. 中国有色金属学报, 2013, 23(9): 2436−2443.
DAI Qian-wei, WANG Hong-hua. Element free method forward modeling of GPR based on random medium model[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2013, 23(9): 2436−2443.

[20] 苏 洲, 胡文宝, 朱 毅. 二维大地电磁正演中无网格算法研究[J]. 石油天然气学报, 2012, 34(5): 87−90.
SU Zhou, HU Wen-bao, ZHU Yi. Meshfree method used in two-dimensional magnetotelluric forwarding[J]. Journal of Oil and Gas Technology, 2012, 34(5): 87−90.

[21] 李俊杰, 严家斌. 无网格法进展及其在地球物理学中的应用[J]. 地球物理学进展, 2014, 29(1): 452−461.
LI Jun-jie, YAN Jia-bin. Developments of meshless method and applications in geophysics[J]. Progress in Geophysics, 2014, 29(1): 452−461.

[22] 严家斌, 李俊杰. 无网格法在大地电磁正演计算中的应用[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014, 45(10): 3513−3520.
YAN Jia-bin, LI Jun-jie. Magnetotelluric forward calculation by meshless method[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2014, 45(10): 3513−3520.

[23] WANG J G, LIU G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54(11): 1623−1648.

[24] LIU G R, GU Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(4): 937−951.

[25] 李俊杰, 严家斌. 无网格点插值法大地电磁二维正演数值模拟[J]. 石油物探, 2014, 53(5): 617−626.
LI Jun-jie, YAN Jia-bin. Magnetotelluric two-dimensional forward numerical modeling by meshfree point interpolation method[J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 2014, 53(5): 617−626.

[26] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994: 229−235.
XU Shi-zhe. Finite element method for geophysics[M]. Beijing: Science Press, 1994: 229−235.

[27] FRANK R. Scattered data interpolation: Tests of some methods[J]. Mathematics of Computation, 1972, 38(157): 181−199.

[28] 署恒木, 黄朝琴, 李翠伟. 基于楔形基函数的一种新型无网格法[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2008, 32(3): 108−113.
SHU Heng-mu, HUANG Zhao-qin, LI Cui-wei. A novel meshless method based on ridge basis function[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2008, 32(3): 108−113.

[29] 赵云亮. 无网格法基函数的改进与应用[D]. 长春: 吉林大学, 2008.
ZHAO Yun-liang. Improvement and application of the basis of element-free method[D]. Changchun: Jilin University, 2008.

[30] 吴 琛, 周瑞忠. 小波基无单元法及其与有限元法的比较[J]. 工程力学, 2006, 23(4): 28−32.
WU Chen, ZHOU Rui-zhong. Element free galerkin method with wavelet basis and its comparison with finite element method[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(4): 28−32.

(编辑 王 超)