文章编号: 1004-0609(2013)12-3484-08

基于提升改进方向波变换的浮选泡沫图像降噪方法

李建奇^{1,2},阳春华¹,朱红求¹,曹斌芳¹

(1. 中南大学 信息科学与工程学院,长沙 410083;2. 湖南文理学院 电气与信息工程学院,常德 415000)

摘要:针对矿物浮选过程中泡沫图像易受噪声影响,存在纹理细节模糊、灰度值对比度低等问题,提出一种浮 选泡沫图像的非线性降噪方法。首先构造一种改进方向波变换,保证信号的平移不变性,同时采用提升算法减小 其运算量。然后通过对分解系数建模,针对低频子带系数采用多尺度 Retinex 算法进行处理,以改善整体亮度均 匀性,提高对比度;对各高通子带构建基于高斯混合尺度模型的分解系数邻域模型,并利用 Bayes 最小均方(BLS) 估计进行局部去噪。最后利用所提出的方法对大量浮选泡沫图像进行去噪分析。结果表明:所提出的降噪方法能 突出泡沫图像的纹理细节信息,提高泡沫图像的对比度,在信噪比和实时性上有明显提高,为后续泡沫图像的分 割和工况识别奠定基础。

关键词:浮选泡沫图像;图像降噪;方向波变换;高斯混合尺度模型;Retinex算法中图分类号:TP391 文献标志码:A

Flotation froth image de-noising algorithm based on lifting improved directionlet transform

LI Jian-qi^{1, 2}, YANG Chun-hua¹, ZHU Hong-qiu¹, CAO Bin-fang¹

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China;

2. College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

Abstract: Considering the defects, such as easy sensitivity to noise and heavy texture, low contrast of gray value in the process of the floatation of foam image, a non-linear de-noising method was proposed. Lifting improved directionlet transform was firstly constructed, which not only ensured the shifting invariance but reduced its complexity. Multi-scale Retinex algorithm dealing with low-frequency subband coefficient was proposed for improving luminance uniformity and overall contrast. For high-pass subband, a model of decomposition coefficients neighbourhood based on Gaussian scale mixtures model was proposed for de-noising the image locally using Bayes least square (BLS). The analysis on the effect of de-noising was given to lots of real froth images. The results show that the proposed method is successful in maintaining edges and is superior in de-noising in term of PSNR and visual effect. It lays a foundation for foamy segmentation and analyzing grade from flotation froth image.

Key words: flotation froth image; image de-noising; directionlet transform (DT); Gaussian scale mixture (GSM); Retinex algorithm

浮选现场监控系统所拍摄到的泡沫图像受光照不 均匀、现场环境以及视频采集设备自身性质的影响, 存在大量的噪声干扰^[1-2]。这些噪声对泡沫图像影响很 大,使得泡沫图像对比度降低,图像细节模糊,加剧 泡沫视觉特征提取的难度,降低了泡沫图像视觉特征 检测精度,影响浮选工况的正确识别,进而导致浮选

基金项目:国家自然科学基金重点项目(61134006);国家杰出青年科学基金资助项目(61025015);湖南省自然科学基金资助项目(14JJ5008) 收稿日期:2012-09-18;修订日期:2013-10-12

通信作者:阳春华,教授,博士;电话:0731-88836876; E-mail: ychh@mail.csu.edu.cn

生产优化控制难以实现^[3-4]。因此,在进行浮选泡沫分 割、纹理特征和工况识别之前,有必要对泡沫图像进 行预处理,提高对比度,降低噪声影响,从而增强图 像细节,改善视觉效果。

目前,图像去噪的方法可分为空间域滤波法和频 率域滤波法。由于空间域处理是在原图像上直接进行 数据运算,可以减少图像的噪声,但同时也极大消弱 了图像的细节,所以仅通过空间滤波处理难以达到泡 沫图像去噪的要求。而在频域处理法中,由于小波变 换能有效地表示信号的零维奇异特性受到了广泛的关 注,但是对于更高维的特征则不能很好地表示,特别 是针对二维图像存在边缘、轮廓和纹理等具有高维奇 异性的几何特征信息。因此,研究人员提出了一种新 的高维函数的最优表示方法 —— 多尺度几何分析 (Multiscale geometric analysis, MGA)的概念。当前的 MGA 方法主要有 CANDES^[5]提出的 Ridgelet 变换及 CANDES 等^[6]提出的 Curvelet 变换, PENNEC 等^[7]构 造的 Bandelet 变换、DO 等^[8]提出的 Contourlet 变换等。 这些 MGA 工具虽然被广泛应用于图像的去噪、特征 提取及分类等领域,但大多存在冗余度高或构造复杂 等缺点。文献[9-10]中的方向波变换(Directionlet transform, DT)作为一种真正的图像二维表示方法,它 不仅具有小波变换的多分辨率时频分析特征,还具有 高度的多方向性和各向异性尺度关系。本文作者尝试 采用方向波变换对对比度变化大、纹理复杂的泡沫图 像进行降噪,但是经过分析可知,采用方向波直接进 行浮选泡沫图像降噪存在以下问题:一是该变换是采 用基于卷积的离散小波变换,其运算量大和复杂性高; 二是该变换过程中引入了下采样操作,导致该变换不 具备平移不变性, 使信号方向频谱产生一定的混叠, 引起伪吉布斯现象, 使重建的图像在边缘附近易产生 振荡,造成轮廓、边缘模糊或失真;三是该变换受分 解系数后续处理算法的影响很大。

基于以上分析,本文作者提出一种基于提升改进 方向波变换的浮选泡沫图像非线性降噪方法。首先, 构造改进方向波变换,保证信号的平移不变性;然后, 采用提升方案进一步减少运算量,对分解后的系数进 行建模分析,结合浮选泡沫图像特点,提出低频分量 的 Retinex 亮度处理,从而提高对比度,改善视觉效 果;根据高频子带系数直方图分布特点,提出采用高 斯混合尺度模型预估去噪方法;最后,结合图像仿真 和工业现场应用说明本文作者提出的方法具有较好的 降噪效果,能突出泡沫图像的纹理细节信息,提高泡 沫图像的对比度,满足基于机器视觉的铝土矿浮选过 程图像预处理的要求。

1 提升改进方向波变换

1.1 方向波变换

方向波变换是一种多方向性的斜各向异性小波变 换(Skewed anisotrophic wavelet transform, SAWT),能 够有效地捕捉图像中任意方向的各向异性特征。它包 含整数格的滤波采样与各向异性小波分解两个部分, 基函数为 SAWT(M_A , n_1 , n_2),分别表示沿向量 $d_1 = d_2$ 方向分别进行 n_1 次与 n_2 次滤波和采样的处理过程。整 数格 Λ 是由两个线性无关的整数向量 $d_1 = d_2$ 经线性 组合构成的点集, Λ 由生成矩阵 M_A 唯一确定^[9,11]。其 中

$$\boldsymbol{M}_{A} = \begin{bmatrix} a_{1} & b_{1} \\ a_{2} & b_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{1} \\ \boldsymbol{d}_{2} \end{bmatrix}$$
(1)

式中: a_1 、 a_2 、 b_1 和 b_2 为整数,沿着斜率为 $r_2=b_2/a_2$ 的向量 d_2 称队列方向(图 1 为-45°),沿着斜率为 $r_1=b_1/a_1$ 的向量 d_1 称为变换方向(图 1 为 45°)。方向波 通过对图像进行采样得到 M_A 个陪集。各陪集通过沿 变换方向和队列方向上各向异性小波变换(AWT(n_1 , n_2))得到图像的稀疏表示。



图 1 AWT(2,1)变换的采样格示意图(45°和-45°方向分解) Fig. 1 Schematic diagram of AWT(2,1) transform based on sampling lattice (Decomposition in 45° and -45° directions)

1.2 非下采样方向波变换的实现

方向波变换过程存在采样操作,使得方向波变换 不具备平移不变性,在利用它进行图像去噪时奇异点 周围会引入伪吉布斯(Gibbs)现象。本文作者借鉴平稳 小波变换的思想^[12]提出一种去掉采样操作的 DT 方法, 即非下采样 DT(Nonsubsampled directionlet transform, NSDT),该方法由非下采样多级分解和非下采样多方 向滤波器组成,具有平移不变性,能够保留更多的图 像相关信息。

在方向波变换中,沿着垂直方向和水平方向上的 变换次数通常是不相等的,即 n₁并不等于 n₂。方向波 变换与标准小波变换类似,在低通滤波中反复进行这 种操作。以 AWT(2,1)为例说明此种分解方法,如图 2 所示。



图 2 AWT(2,1)的分解结构

Fig. 2 Decomposition structure of AWT(2,1)

本文作者将平稳小波变换中对低通和高通滤波器 的输出系数不进行采样操作的思想引入方向波变换 中,这样将使得变换系数、方向波系数和原始信号等 长,且保持了分解的各向异性的特征。从而得到和原 始泡沫图像大小一样的频域图像,由此产生的冗余性 使得系数之间具有比较好的相关性,可以实现完全重 构。非下采样各向异性小波变换的分解如图3所示。





Fig. 3 Decomposition structure of AWT(2,1) nonsubsampled directionlet transform

通过将平稳小波变换和各向异性小波分解方式的 结合,得到的非下采样方向波变换既可以保持对于浮 选泡沫图像分解的各向异性特点,充分有效地捕捉泡 沫图像的复杂特征,又可以兼顾具有平移不变性和冗 余性的特点,能够在一定程度上减少用方向波变换时 的伪吉布斯(Gibbs)现象,使得泡沫图像的边缘提取更 加准确。

1.3 非下采样 DT 的提升方案

Mallat 算法在实现方向波变换时运算量较大^[13], 为了降低运算量,本文作者将提升方案应用于非下采 样方向波变换中,通过沿变换和队列方向进行次数不 等的一维提升变换得到多方向的各向异性变换。提升 方案的实现由奇偶性分解、预测高频分量和更新得到 低频系数 3 部分组成。对每一个整数格 *A* 的陪集按变 换方向 *d*₁的一维提升变换可概括为以下步骤。

 奇偶性分解: 记沿变换方向 *d*₁ 排列的格 *A* 的 点集合为 *x*(*k*),将其划分为奇数元素 *x*_o(*k*)和偶数元素 序列 *x*_e(*k*):

$$\begin{cases} x_{o}(k) = x(2k+1) \\ x_{e}(k) = x(2k) \end{cases}$$
(2)

2)预测高频分量:由偶数元素序列 $x_e(k)$ 预测奇数 元素序列 $x_o(k)$,记 $d_o(k)$ 为预测值 $P[x_e(k)]$ 和真实值 $x_o(k)$ 之间的差。同理,由奇数元素 $x_o(k)$ 序列预测偶数元素 序列 $x_e(k)$,记 $d_e(k)$ 为预测值 $P[x_o(k)]$ 和真实值 $x_e(k)$ 之 间的差。 $d_o(k)$ 与 $d_e(k)$ 对应的系数子带代表高频分量:

$$\begin{cases} d_{o}(k) = x_{o}(k) - P[x_{e}(k)] \\ d_{e}(k) = x_{e}(k) - P[x_{o}(k)] \end{cases}$$
(3)

式中:预测算子 P 可用预测函数 P_k 表示,函数 P_k 可 取 $x_e(k)$ 中对应数据本身或其他更复杂的数据。

3) 更新得到低频分量:利用 *d*_o(*k*)更新 *x*_e(*k*),得 到近似的元素序列 *c*_e(*k*)。同理,利用 *d*_e(*k*)更新 *x*_o(*k*), 得到近似的元素序列 *c*_o(*k*)。*c*_e(*k*)和 *c*_o(*k*)对应的系数子 带代表低频分量:

$$\begin{cases} c_{e}(k) = x_{e}(k) - U[d_{o}(k)] \\ c_{o}(k) = x_{o}(k) - U[d_{e}(k)] \end{cases}$$

$$\tag{4}$$

式中: *U*为更新算子,分解后的点集沿队列方向 d_2 排列成行,形成格 Λ 的子格 Λ' ,相应的生成矩阵为 $M_{\Lambda'} = (2d_1, d_2)^{T}$ 。与变换方向 d_1 的一维变换类似,对子格 Λ 中沿方向 d_2 的点集进行上述步骤的处理,实现非下 DT 在 d_1 和 d_2 方向上的提升分解。

基于提升非下采样方向波变换的 泡沫图像非线性去噪方法

非下采样方向波变换的图像降噪算法是将图像分 解为不同尺度上的子带图像,通过改变子带的小波系 数 *c_{ij}*来完成图像的降噪。待处理的图像一般包括图像 能量、强边缘信息、弱边缘信息和噪声4类信息,如 图4所示。



Fig. 4 Image energy distribution and its definition after NSDT

对上述变换后的系数 *c_{ij}进行分析*,发现图像能量 主要集中在低频子带,对应于泡沫图像的轮廓边缘部 分,其他3类信息主要集中在高频子带,对应于图像 的噪声和细节信息。故本文作者针对低频子带系数值 相差甚小、受环境光照影响严重的情况,引入 Retinex 算法进行背景估计,消除图像光照不均,提高对比度。 通过分析各高通子带系数直方图分布可知服从广义高 斯分布的模型,所以针对高频分量,本文作者采用高 斯混合尺度模型进行预估去噪。

2.1 低频系数的非线性处理

现场浮选泡沫图像的采集平台主要由高分辨率工 业摄像机和高频光源等组成。浮选现场环境恶劣,灰 尘较多,光照条件不均,气泡与矿浆背景之间灰度反 差小,使得泡沫图像的亮度分布不均,严重影响后续 泡沫图像的分割和识别。分析工业现场获取的泡沫图 像的灰度直方图,发现其形态比较单一,且多为单峰, 像素灰度分布比较集中,95%在灰度 150~200 处;针 对背景亮度分布不均匀的问题,一般可以通过一阶和 二阶差分处理,来消除背景梯度变化,但是往往会损 失边缘信息。本文作者采用文献[14-15]中多尺度 Retinex 算法进行背景估计, 消除图像光照不均。

该算法可描述为

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{K} w_i \left\{ \lg I(x, y) - \lg [G_i(x, y)I(x, y)] \right\}$$
(5)

式中: f(x, y)表示亮度图像; I(x, y)为原始图像; K为 维数; w_i 为对应于第 i个尺度 ε_k 的权值,且满足

$$\sum_{i=1}^{K} w_i = 1 \circ G(x, y) 表示如下:$$
$$G(x, y) = \mathbf{k} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\varepsilon^2}\right]$$
(6)

式中: k 是常量矩阵; c 是滤波半径,并且满足

$$\iint G(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1 \tag{7}$$

一般情况下,多尺度 Retinex 算法取中、高和低 3 个尺度,即 *K*=3。该处理通过原始图像与高斯函数的卷积获得最优亮度估计,从而改善图像的亮度均匀性,提高整体对比度。

2.2 基于高斯混合尺度模型的高频子带系数降噪方法

通过分析泡沫图像的子带系数直方图分布可知, 其直方图都具有高尖峰和长托尾特点,服从广义高斯 分布的模型。GSM 模型能有效地表示图像的边缘分 布,同时体现尺度内系数和尺度间系数的相关性。因 此,在泡沫图像去噪中,主要是通过高斯尺度模型来 构造由 Directionlet 域分解得到的高频系数模型。利用 GSM 模型来表示以每个系数为中心的系数邻域特征, 每个系数由给定邻域系数的条件概率密度来描述,并 假设分别独立于其他系数,利用 Bayes 最小均方估计 计算变换域中邻域系数的最优估计。

2.2.1 图像高斯混合尺度模型

泡沫图像经过提升 NSDT 分解得到各高通子带系数,假设系数 x_c 的周围邻域系数 x 符合 GSM 模型,则随机向量 x 可以表示为以零为均值的高斯向量 u 和 独立正尺度的随机因子 \sqrt{z} 的乘积,即 $x = \sqrt{zu}$,这里 表示等式左右边有相同的分布,向量 x 的概率密度描述如下^[11]:

 $p_x(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} \mid z) p_z(z) dz =$

$$\int \frac{\exp\left(\frac{-x'(zc_{u})^{-1}x}{2}\right)}{(2\pi)^{n/2}|zc_{u}|^{1/2}}p_{z}(z)dz$$
(8)

式中: c_u 为协方差矩阵; $p_z(z)$ 为系数概率密度;n为邻 域大小。

2.2.2 基于高斯混合尺度模型的噪声估计 浮选泡沫图像经过提升 NSDT 分解后,其高频观

测系数邻域 y 可用 GSM 模型表示:

$$y = x + n = \sqrt{zu + n} \tag{9}$$

式中: n 为零均值高斯向量,相应的协方差矩阵为 c_n 。 在z条件下,观测系数邻域协方差为

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{v}|\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}} \tag{10}$$

由于随机变量 z、u 和 w 相互独立,将 z 代入可得 $c_{v|z}$ 。

假定图像中信号变量的协方差 *c*_u变化平稳,可以 通过 *k*×*k* 的邻域对其进行估计,*c*_v为邻域内观测系数 邻域协方差,噪声邻域协方差 *c*_n,实验中采用通过启 发式的先验估计方法来获取噪声标准差估计方法:

$$c_n = \frac{\text{median}(\left|y_{i,j}\right|)}{0.6745} \tag{11}$$

式中: y_{ij}表示含噪声多尺度分解的高频子带系数。

通过观察系数邻域 *y* 来估计每个邻域中心系数 *x_c*,利用 BLS 估计:

$$E\{x_c \mid \mathbf{y}\} = \int_0^\infty x_c p\{x_c \mid \mathbf{y}\} dx_c = \int_0^\infty p(z \mid \mathbf{y}) E\{x_c \mid \mathbf{y}, z\} dz$$
(12)

可以计算 z 条件下的中心系数 x_c ,实际上就是以后验密度 p(z|y) 为权重的 Bayes 最小均方估计的均值。由于 x 是高斯变量,所以,利用加性高斯噪声下的性质可以求得式(12)中的期望:

$$E\{x_c \mid \mathbf{y}, z\} = z c_u (z c_u + c_n)^{-1} \mathbf{y}$$
(13)

通过上面的转换可以求得邻域中心系数 xc。

2.3 改进算法的实现步骤

通过上面的分析可以得出基于提升 NSDT 的浮选 泡沫图像去噪方法的主要步骤如下。

步骤 1: 对原始的泡沫图像进行提升 NSDT 变换, 实现图像的稀疏表示:确定图像的变换方向 d₁ 和队列 方向 d₂,对每个陪集沿变换和队列方向分别进行 n₁ 和 n₂次一维提升小波变换,得到相应的高频和低频系 数子带;

步骤 2: 采用多尺度 Retinex 算法对低频子带系数 进行亮度和对比度处理;

步骤 3: 对每个子带(除低频部分外)分别用 GSM 模型进行去噪;

步骤 4: 对经处理后的低频子带和高频子带进行 非下采样 Directionlet 逆变换,得到去噪后的泡沫图像。

3 图像仿真与分析

图 5 所示为从某工业现场两个不同浮选槽获取的 原始泡沫图像。两幅图像均具有纹理丰富、亮度不均 匀、背景偏暗、受噪声影响明显等特点,其反映浮选 工况较差。



图 5 原始泡沫图像 Fig. 5 Original froth image: (a) Froth type 1; (b) Froth type 2

在本算法中,综合考虑计算的复杂度和实验所用 浮选泡沫图像的实际情况,各项异性小波基选用 AWT(2,1),由提升小波 CDF9-7 小波滤波器构造,DT 的分解基数为 5 级,每级分解的方向数均为 4,分别 为 0°、45°、90°和-45°方向,对应的生成矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{M}_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(14)

对图 5 泡沫图像按上述参数设置进行提升改进方 向波变换,获得低频子带和各高通方向子带系数。针 对低频部分进行多尺度 Retinex 处理,实验中尺度分 别取 25、75 和 250,权重均为 1/3。高频分量部分采 用高斯混合尺度模型进行噪声估计,获得重构图像。 为了验证本文作者所提方法的有效性,与中值滤波去 噪方法、基于小波变换的软阈值去噪法^[16]以及 LD-GSM 方法^[11]进行比较。小波软阈值方法采用双正 交 9-7 小波滤波器,取阈值*T* = 1.5*σ*,分解基数为 5 级,其去噪的视觉效果如图 6 和 7 所示。

使用 20 次实验峰值信噪比 PSNR 的均值作为去噪 结果的评价指标。对采用不同去噪方法的运算时间进 行统计,表 1 给出了浮选泡沫图像使用不同方法去噪 后的 PSNR 值和运算的时间。从表 1 知,经本文作者 所提出的降噪算法处理后图像的 PSNR 值明显增大; 运算时间相比传统方向波变换明显减少,主要原因是 采用了提升运算优化计算过程。

从图 6 和 7 可知,中值滤波法能够较好地去除图 像中的噪声,但会造成泡沫图像细节信息更加模糊, 加大泡沫图像特征提取的难度;小波软阈值去噪法较 空间域方法有了更好的去噪效果,但是小波变换只是 表1 使用不同方法去噪后获得的 PSNR 和平均运行时间

 Table 1
 PSNR and average time of different de-noising methods

| Method | Fig. 5(a) | | Fig. 5(b) | |
|---------------------------|-----------|--------|-----------|--------|
| | SNR/dB | Time/s | SNR/dB | Time/s |
| Median de-noising | 22.147 6 | 0.46 | 17.251 2 | 0.52 |
| Wavelet soft threshold | 24.426 1 | 56 | 21.754 4 | 75 |
| DT-GSM de-noising | 30.456 9 | 167 | 22.452 8 | 158 |
| Proposed method | 31.915 3 | 123 | 24.976 5 | 116 |

从垂直和水平方向上来刻画图像细节,忽略了泡沫图 像的边缘方向性,造成图像边缘处模糊,如图 6(b)和 图 7(b)左上角比较明显。文献[11]中 LD-GSM 方法的 去噪效果得到提高,但图像仍存在边界处部分模糊现 象。并且上述 3 种方法均没有考虑工业泡沫图像所特 有的光照不均匀性以及噪声所带来的纹理细节模糊现 象,无法达到有效处理。在本研究中,改进方向波变





Fig. 6 De-noising efficiency comparison of different de-noising algorithms for images of froth type 1: (a) Median de-noising; (b) Wavelet soft threshold de-noising; (c) DT-GSM de-noising; (d) Proposed method



图 7 不同去噪方法对泡沫类型 2 图像去噪效果的比较

Fig. 7 De-noising comparison of different de-noising algorithms for images of froth type 2: (a) Median de-noising; (b) Wavelet soft threshold de-noising; (c) DT-GSM de-noising; (d) Proposed method

换考虑了现场环境影响因素,使得图像的去噪更加彻 底,几乎消除了边界模糊现象,同时有效地提高了图 像整体对比度,改善了视觉效果。

4 结论

 为了提高泡沫图像的质量、降低特征参数提取 的难度和提高参数检测精度,提出了基于提升改进方 向波变换的泡沫图像非线性降噪方法。所构造的提升 改进方向波变换可以同时保证信号的平移不变性和降 低运算量,避免造成图像边缘模糊;对变换后的高、 低频系数分类处理,从而获得较好的效果。

2)与 DT-GSM 等去噪方法相比,本文作者所提出的方法考虑了泡沫图像受光照影响和边缘模糊现象,具有能突出泡沫图像纹理细节信息、提高泡沫图像对比度和减小运算量等优点。

 3) 该方法较好地实现了浮选现场泡沫图像的预 处理,为泡沫特征的提取和矿物品位分析奠定了基础, 能为工业生产提供指导。

REFERENCES

- XU Can-hui, GUI Wei-hua, YANG Chun-hua. Flotation process fault detection using output PDF of bubble size distribution[J]. Minerals Engineering, 2012, 26: 5–12.
- MARAIS C, ALDRICH C. Estimation of platinum flotation grades from froth image data[J]. Minerals Engineering, 2011, 24: 433–441.
- [3] YANG Chun-hua, XU Can-hui, MU Xue-min, ZHOU Kai-jun. Bubble size estimation using interfacial morphological information for mineral flotation process monitoring[J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2009, 19(3): 694–699.
- [4] 刘金平,桂卫华,牟学民,唐朝晖,李建奇.基于 Gabor 小波的浮选泡沫图像纹理特征提取[J]. 仪器仪表学报, 2010(8): 1769-1775.

LIU Jin-ping, GUI Wei-hua, MOU Xue-min, TANG Zhao-hui, LI Jian-qi. Flotation froth image texture feature extraction based on Gabor wavelets[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010(8): 1769–1775.

[5] CANDES E J. Ridgelets: Theory and applications[D]. Stanford:

Stanford University, 1998.

- [6] CANDES E J, DONOHO D L. Curvelets, multiresolution representation, and scaling laws[C]// Proceedings of the Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII. San Diego: SPIE, 2000: 1–12.
- [7] le PENNEC E, MALLAT S. Sparse geometric image representations with bandelets[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(4): 423–438.
- [8] DO M N, VETTERLI M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2005, 14(12): 2091–2106.
- [9] LU Yi-xiang, GAO Qing-wei. Directionlet-based bayesian filter for SAR image despeckling[J]. Procedia Engineering, 2011, 15: 2788–2792.
- [10] VELISAVLJEVIC V, BEFERULL-LOZANO B, VETTERLI M. Space-frequency quantization for image compression with directionlets[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(7): 1761–1771.
- [11] 白 静,侯 彪,王 爽,焦李成.基于提升 Directionlet 域高 斯混合尺度模型的 SAR 图像噪声抑制[J]. 计算机学报, 2008,

31(7): 1234-1241.

BAI Jing, HOU Biao, WANG Shuang, JIAO Li-cheng. SAR image denoising based on lifting directionlet domain Gaussian scale mixtures model[J]. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(7): 1234–1241.

- [12] NASON G P, SILVERMAN B W. The stationary wavelet transform and statistical applications[C]// Wavelets Statistics. New York: Springer-Verlag, 1995: 281–299.
- [13] VELISAVLJEVIC V. Low-complexity iris coding and recognition based on directionlets[J]. IEEE Transactions on Information Forensics and Security, 2009, 4(3): 410–417.
- [14] JOBSON D J, RAHMAN Z, WOODELL G A. Properties and performance of a center/surround Retinex[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(3): 451–462.
- [15] WANG Hao, HE Ming. Retinex-like method for image enhancement in poor visibility conditions[J]. Procedia Engineering, 2011, 15: 2798–2803.
- [16] DONOHO D L. Denoising by soft-thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613–627.

(编辑 陈卫萍)