

## 起伏地形电偶源 2.5 维有限元数值模拟

张继锋, 智庆全, 李 犀, 冯 兵

(长安大学 地质工程与测绘学院, 西安 710054)

**摘要:** 地形的起伏严重影响着电磁场分布, 在实际资料处理中, 研究地形起伏对电磁场的畸变规律可使电磁勘探解释更加准确可信。采用任意四边形网格剖分求解区域, 实现起伏地形 2.5 维电偶源有限元正演算法, 推导波数域电磁场耦合微分方程, 通过基于等参单元的双二次插值将连续函数的微分离散化; 采用一维非零元素紧缩存储, 利用大规模稀疏矩阵并行求解器 PARDISO 求解, 得到电偶源激发下二维地电断面的波数域电磁场响应。然后通过选取适当的波数进行傅里叶反变换, 获取空间域电磁场响应, 对正演中的关键问题, 如波数的选择、场源参数的选取以及辅助场的计算等进行了分析和研究, 为提高正演计算的精度和速度提供了理论保证。验证该算法的正确性和高效性, 分别对山丘和山谷等典型地形进行了数值计算, 分析起伏地形的电磁场响应规律。

**关键词:** 电偶源; 等参单元; 起伏地形; 数值模拟

中图分类号: P631

文献标志码: A

## 2.5D finite element numerical simulation for electric dipole source on ridge terrain

ZHANG Ji-feng, ZHI Qing-quan, LI Xiu, FENG Bing

(School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** The topography seriously affects the distribution of electromagnetic field, and the study on distortion law of topography for the electromagnetic field can make the electromagnetic interpretation more accurate and reliable in the actual data processing work. The electric dipole source electromagnetic field finite element algorithm of 2.5D rugged topography was studied by using arbitrary quadrilateral mesh generation for computational domain. Firstly, the electromagnetic coupled differential equations in wave number domain was deduced, and continuous function was discretized based on the isoparametric element of interpolation, the wave number domain electromagnetic response is obtained for the two dimensional geoelectric section by a nonzero element compact storage and large-scale parallel sparse matrix solver PARDISO. The electromagnetic field space response is got by choosing appropriate wave number of the inverse Fourier transform. The forward key problems, such as the selection of wave number, source selection and the auxiliary field solution, were analyzed and studied, which provide a theoretical guarantee for improving the computation precision and speed. The correctness and high efficient of the algorithm were verified. Finally, the electromagnetic response characteristics of the trapezoidal hill and valley were analyzed.

**Key words:** electric dipole source; isoparametric element; ridge terrain; numerical simulation

人工源电磁法由于场源强度可以控制、信噪比高等优点, 已成为工程及矿产勘探领域中应用比较广泛的电磁勘探方法之一<sup>[1-4]</sup>。目前, 纯二维的人工源电磁场正反演研究已有较多的研究成果, 具有计算量小、

速度较快<sup>[5-6]</sup>等优点。但在实际工作中, 采用的场源多是三维偶极源, 而非二维线源, 纯二维的正反演只是对实际情况的粗略近似。三维正反演方法能更真实地模拟地质构造的电性分布, 但是现有的三维正反演算

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41104075, 41174108); 深部探测技术与实验研究专项(Sinoprobe-03-03); 中国博士后基金联合资助(20100481309)

收稿日期: 2013-05-16; 修訂日期: 2013-06-30

通信作者: 张继锋, 副教授, 博士; 电话: 029-82339262; E-mail: zjf0201@126.com

法均很难合理地平衡计算速度和精度, 要达到较高的精度, 往往要花费大量的计算时间。在没有很好地解决此问题之前, 很难将三维正反演算法广泛应用于实际数据的处理解释。我国多山区丘陵, 山区面积约占国土面积的三分之二, 在山区开展电磁勘探时, 地形是影响电磁场分布的主要因素之一<sup>[7]</sup>。起伏地形偶极源电磁场2.5维模拟方法能较好地适应这种复杂地质环境, 且计算成本低, 在普通微机上就可以快速地实现, 因此, 此方法具有重要的理论和现实意义。

COGGON<sup>[8]</sup>于1971提出基于二维地电结构三维源的2.5维有限元电磁模拟方法, 为有限元在地球物理电磁法中的应用奠定了基础, 之后, 有许多学者对二维半电磁正演问题进行了研究<sup>[9-12]</sup>。20世纪90年代初, UNSWORTH等<sup>[13]</sup>采用2.5维有限元数值模拟方法对海水及海底介质进行模拟, 讨论有限长度电性源激发时场的特征。MITSUHATA<sup>[14]</sup>采用等参单元模拟带地形二维地电结构电磁响应, 分别计算了山丘地形下两个相互垂直方向电偶极子源产生的电磁场分布, 取得了较好的效果。LI等<sup>[15]</sup>采用非结构化三角形网格的自适应有限元方法实现了海水中频率域水平电偶极子源二维海洋电磁法数值模拟。KONG等<sup>[16]</sup>采用delta源对海洋可控源层状各向异性介质开展了2.5D有限元模拟。ELLEFSEN等<sup>[17]</sup>构建了2.5D各向异性介质的格林函数, 利用在垂直走向方向上采用有限差分、平行走向方向上采用解析方程求解的混合算法, 实现模拟的高效性。在国内, 孟永良等<sup>[4]</sup>利用有限元法实现了CSAMT法的数值计算。底青云等<sup>[18-19]</sup>进行了CSAMT2.5维有限元数值模拟, 并得出了一些有价值的结论。沈金松等<sup>[20-21]</sup>研究2.5维电磁响应与波数的关系, 并把该方法应用于海洋可控源电磁法模拟中。前人的研究成果表明, 电磁场2.5D有限元正演方法能很好地适应复杂的物性分布, 计算速度和精度较高, 极具应用前景。实际工作也表明, 真实地电构造往往是复杂的, 地形同地下异常体一样, 都对电磁场的分布有很大的影响。在勘探工作中, 必须加以综合考虑。鉴于此, 本文作者利用等参单元实现带地形的2.5维电偶源电磁场模拟, 并对2.5维电磁场正演中的一些关键问题和技术细节进行分析讨论, 给出合理的处理方案。

## 1 基本原理

假定谐变时间因子为 $\exp(i\omega t)$ , 电场和磁场频率

域Maxwell方程组如下:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - i\omega\mu\mathbf{M}_s \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (2)$$

式中:  $\epsilon$ 是介电常数,  $\sigma$ 是电导率,  $\mu$ 是磁导率,  $\omega$ 为圆频率,  $i$ 为虚数单位,  $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别为电场和磁场矢量,  $\mathbf{J}_s$ 为外加电流源的电流密度,  $\mathbf{M}_s$ 为外加磁性源的磁场强度。

对上述方程沿构造走向( $Y$ )方向按以下形式作傅里叶变换( $k_y$ 为波数):

$$\hat{F}(x, k_y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, z, \omega) \exp(-ik_y y) dy \quad (3)$$

并消去 $\hat{E}_x$ 和 $\hat{H}_z$ 、 $\hat{E}_z$ 和 $\hat{H}_x$ 分量, 得到沿走向方向电场( $\hat{E}_y$ )和磁场( $\hat{H}_y$ )的耦合微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \hat{E}_y + \\ ik_y \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) \right) = \\ \hat{J}_{sy} - ik_y \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{sx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{sz} \right) \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{sz} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{sx} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) - \hat{z} \hat{H}_y + \\ ik_y \left( - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) \right) = \\ \hat{z} \hat{M}_{sy} - ik_y \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{M}_{sx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{M}_{sz} \right) \right) + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{J}_{sz} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{J}_{sx} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $k^2 = -\hat{z}\hat{y}$ ,  $k_e^2 = k_y^2 - k^2$ ,  $\hat{z} = i\omega\mu$ ,  $\hat{y} = \sigma + i\epsilon\omega$ ,  $\hat{J}_s$ 、 $\hat{M}_s$ 为场源项。

根据式(4)和(5)可解出 $\hat{E}_y$ 和 $\hat{H}_y$ , 辅助场 $\hat{E}_x$ 和 $\hat{H}_z$ 、 $\hat{E}_z$ 和 $\hat{H}_x$ 可由 $\hat{E}_y$ 和 $\hat{H}_y$ 的空间导数导出:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x = - \frac{ik_y}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\hat{z}}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\hat{z}}{k_y^2 - k^2} \hat{J}_{sx} - \\ \frac{ik_y \hat{z}}{k_y^2 - k^2} \hat{M}_{sz} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{H}_z = -\frac{\hat{y}}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\mathrm{i} k_y}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\mathrm{i} k_y}{k_y^2 - k^2} \hat{J}_{sx} + \frac{k^2}{k_y^2 - k^2} \hat{M}_{sz} \quad (7)$$

$$\hat{H}_x = -\frac{\hat{y}}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} - \frac{\mathrm{i} k_y}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} + \frac{\mathrm{i} k_y}{k_y^2 - k^2} \hat{J}_{sz} + \frac{k^2}{k_y^2 - k^2} \hat{M}_{sx} \quad (8)$$

$$\hat{E}_z = -\frac{\mathrm{i} k_y}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \frac{\hat{z}}{k_y^2 - k^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} - \frac{\hat{z}}{k_y^2 - k^2} \hat{J}_{sz} + \frac{\mathrm{i} k_y \hat{z}}{k_y^2 - k^2} \hat{M}_{sx} \quad (9)$$

## 2 关键技术

### 2.1 波数的选取

2.5 维的求解方法是将空间域的场量转换到波数域并抽取部分波数进行计算, 然后通过离散傅氏反变换来求取空间域场值的, 本质上是一个利用特定离散样本来恢复连续信号的过程, 其关键技术在于离散样本的选取。离散波数样本的选取实际上是合理安排采样点的过程。由于各种地电断面的场函数不同, 适合一种地电断面的波数组不一定适用于另一种地电断面。因此, 波数序列的长短和间隔是影响计算精度的重要因素。如果选取较长的波数序列, 求解线性方程组的次数增加, 必然使得计算时间增加; 若选取过短的波数序列, 虽然计算速度较快, 但难以保证精度。如何选择波数的个数和分布, 取决于傅氏反变换核函数随波数变化的规律。

首先, 研究均匀半空间波数域电磁场分布特点, 取模型电阻率  $100 \Omega \cdot \text{m}$ , HED 源(水平电偶源)频率为  $1 \text{ kHz}$ , 偶极矩为  $1 \text{ A} \cdot \text{m}$ , 位于坐标原点位置, 网格间距为  $25 \text{ m}$ , 计算结果如图 1 所示(图 1 中  $I$  为谐变电流;  $d_y$  为电偶极距;  $Id_y$  表示一个量即电偶极矩)。在波数较小的范围内,  $\hat{E}_y$  为一常数, 随  $k_y$  增大,  $\hat{E}_y$  迅速衰减。在高频范围( $k_y > 0.04$ )内, 曲线波动强烈, 不符合实际电场的变化规律。这说明波数超过某一界限值后, FEM 离散解是不精确的。通过理论分析和实际计算可知, 此界限约为  $k_y = 1/\Delta$ ,  $\Delta$  是节点距。如果反变换时使用超过此界限的波数域场, 必然将引入较大的误差。幸运的是, 由于  $\hat{E}_y$  随  $k_y$  的快速衰减, 在高频范围内的  $\hat{E}_y$ , 实际上对于式(3)的影响很小。因此, 可以简

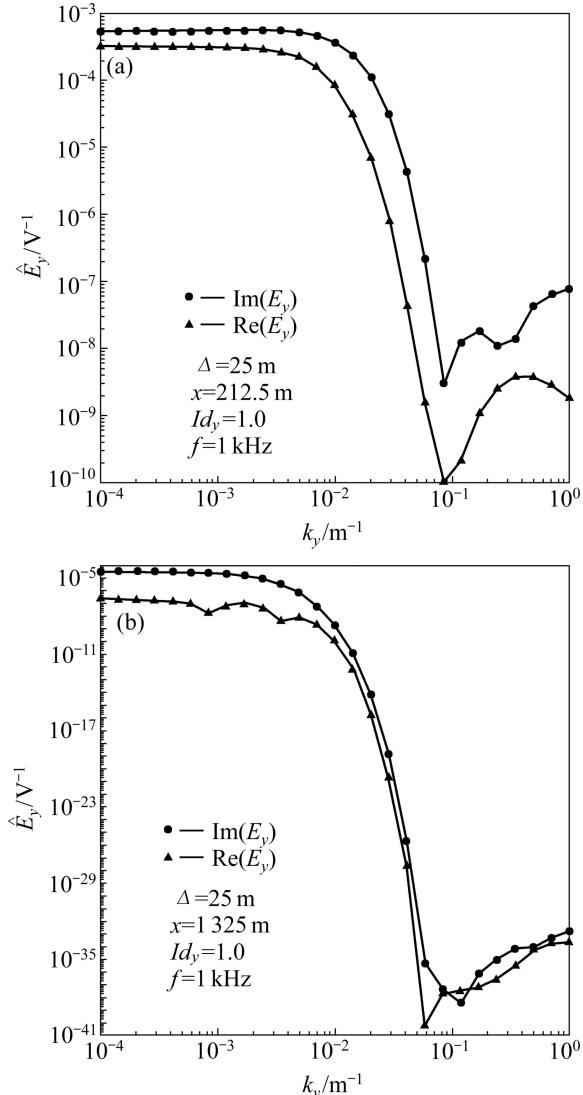


图 1 均匀半空间中  $Y$  向电偶源产生的波数域电场

Fig. 1 Electric field of wave number domain in homogeneous half space for electrical dipole source

单地在积分中略去高频场, 取积分上限为  $1/\Delta$ 。可以从理论上证明, 这种截取方案是合理的。一般而言, 波数在选定的  $k_y < 1/\Delta$  范围内应该取的越多越准确, 但计算量也随之增加。本文作者采用直接积分法进行傅里叶反变换, 在  $k_y < 1/\Delta$  范围内可按积分精度要求自由确定  $k_y$  的个数和间隔。在本文后续的计算中, 波数范围取为  $10^{-4} \sim 1/\Delta$ , 波数取其中的 27 个对数等间隔数。

### 2.2 伪 delta 源的选取

电偶源和磁偶源在源点处是奇异的。例如, 在近区时, 对于沿走向方向的电偶极子源,  $E_y$  在场源附近的渐近线为

$$E_y = -\frac{Id_y}{2\pi\sigma} \frac{1}{r^3} - i \frac{Id_y}{4\pi} \frac{\omega\mu}{r} \quad (10)$$

$E_y$  实部的奇异性为  $O(1/r^3)$ 。由于这些分量在源的附近快速变化, 即使有良好的网格剖分条件、采用高阶插值函数, 也不能很好地模拟近区源场的变化。通常的解决办法是对背景场和二次场给予分别求解。但这种办法的不足是, 在地表起伏或存在复杂地质体时, 很难找到一个合适的背景构造。另一个简单有效的解决办法如下: 采用一个近似函数来等效电偶极子场源的作用, 将源分布于一定范围内, 避免在源点处产生奇异性, 从而不用区分背景场和异常场, 直接求解总场值。本研究中, 采用 HERRMANN<sup>[22]</sup>(1979)提出的伪  $\delta$  函数(空间分布如图 2):

$$\delta_s(x-x_0) =$$

$$\frac{1}{2\tau} \begin{cases} 0, & (x-x_0) \leq -2\tau \\ [(x-x_0+2\tau)/\tau]/2, & -2\tau < (x-x_0) \leq -\tau \\ -[(x-x_0+2\tau)/\tau]^2 + 2(x-x_0+2\tau)/\tau, & -1-\tau < (x-x_0) \leq \tau \\ [(x-x_0+2\tau)/\tau]/2 - 4(x-x_0+2\tau)/\tau + 8, & \tau < (x-x_0) \leq 2\tau \\ 0, & 2\tau < (x-x_0) \end{cases} \quad (11)$$

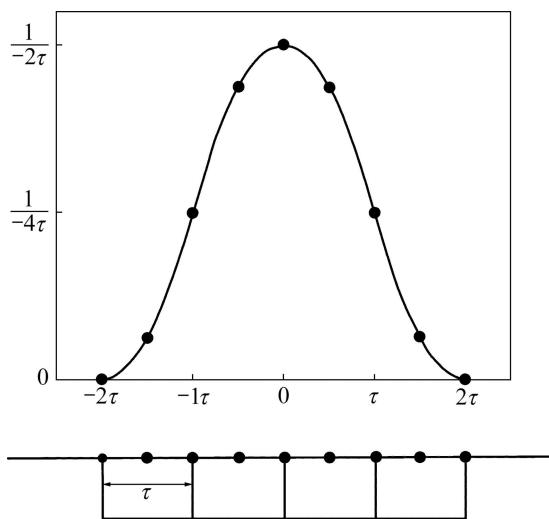


图 2 Herrmann's 伪  $\delta$  函数分布

Fig. 2 Distribution of Herrmann's pseudo-delta

参数  $\tau$  是控制源分布宽度和幅值的参数。一个三维的伪  $\delta$  函数源可以表示为  $\delta_s(r-r_0)=\delta_s(x-x_0)\cdot\delta_s(y-y_0)\cdot\delta_s(z-z_0)$ 。其中,  $r_0$ 、 $x_0$ 、 $z_0$  分别表示源点的坐标。显然, 使用伪  $\delta$  函数描述源项, 可使总体方程右端项不为 0

的节点增多, 改善了总体方程组的不稳定性。

伪  $\delta$  函数实际上起到了低通滤波的作用, 就消除奇异性效果而言,  $\tau$  取值愈大, 不为 0 的右端项越多, 消除奇异性效果愈好, 但同时, 等效源响应与点源响应的差异也将变大。这种差异主要分布在伪  $\delta$  源的附近, 在远离源区的区域逐渐减小趋于 0。本文作者采用如下方法选择  $\tau$  值: 网格剖分时, 将以源点为对称中心的 4 个单元的网格近似剖分为正方形, 等效源控制参数  $\tau$  就取为此处的网格间距。这样, 既能保证方程右端项有足够的非零元素(9 个), 又能使插值函数适应场源的分布(插值函数和场源的分布函数都是二阶的, 如果其节点重合, 插值函数将精确等效于场源分布函数), 提高计算精度。

### 2.3 辅助场的求取方法

辅助场的场值, 需要对主场值进行空间求导得到。在双二次插值条件下, 单元内的场值是按二次型变化的, 但场值的导数是线性变化的。由于单元之间仅通过节点场值进行连接, 导数在节点位置一般是不连续的, 这对辅助场值的计算造成了困难。对于这种不连续, 徐世浙<sup>[23]</sup>提出分别计算相邻单元在节点处的导数值, 然后取平均的方法, 这只能从统计学角度上对不连续引起的误差进行削弱; 马为<sup>[24]</sup>提出使用有限元直接迭代格式快速加密节点, 利用加密后的节点场值计算节点处的导数值, 但仍存在节点处导数不连续的问题。本文作者认为, 可以考虑发展全空间曲面插值方法, 如采用三次曲面样条插值来求取节点处的导数, 即可保证节点处主场导数值的连续性。

本研究中, 对电阻率为  $100 \Omega\cdot\text{m}$  的均匀半空间模型分别使用曲面拟合方法和简单取平均方法计算了辅助场, 求出了  $y=100 \text{ m}$  处的次剖面上的卡尼雅视电阻率, 并计算了其与解析结果的偏差, 其结果如图 3 所示。折线和带点折线分别是采用曲面拟合方法和简单平均方法的结果。显然, 使用曲面拟合方法计算的视电阻率精度更高。

### 2.4 起伏地形网格剖分

有限元研究区域的剖分问题, 直接影响到计算的精度和速度。如果网格剖分方法不合理, 那么即使采用再高精度的线性求解系统, 也难以得到正确的解。根据徐世浙<sup>[23]</sup>、MITSUHATA<sup>[14]</sup>和吴娟等<sup>[25]</sup>的经验, 本研究采用任意四边形单元、双二次插值。为了能适应复杂的模型, 利用 Ansys 软件进行剖分。源点附近和电性变化区域网格线要求比较稠密, 以适应源点和电性快速变化区域场的快速变化。在远离场源、电性

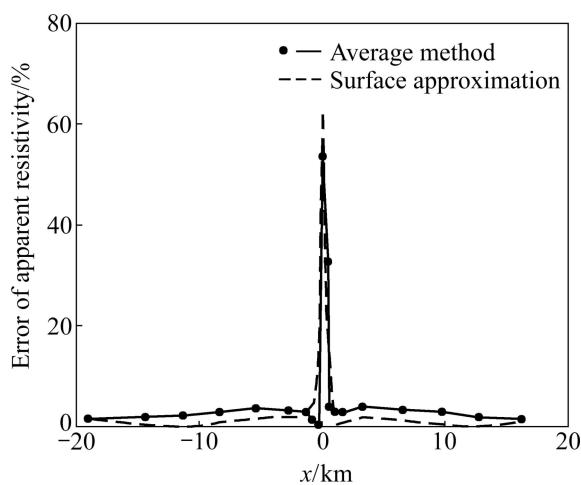


图3 不同辅助场计算方法的精度

Fig. 3 Accuracy of different methods for auxiliary fields

变化缓慢的地方,令网格间距快速增大,以减小边界环路积分强制为零引起的误差,但考虑到波数序列的下限,最大间距不应超过10 km。这可以通过Ansys的网格控制功能实现。最后,应对网格进行局部细化,其基本原则为在地形平坦和地电参数变化平稳的地方,适当放大网格间距,以减小运算量;在地形起伏或地电参数变化剧烈的地方,加密网格,以提高运算精度。

## 2.5 地层以上空气层的处理

空气层几乎是不导电的,但若取其电导率为0,当 $k_y=\omega(\epsilon\mu)^{1/2}$ 时,会出现 $k_e=0$ 的情况,此时总刚矩阵的系数出现奇异点。EVERETT等<sup>[26]</sup>(1993)指出,在这一奇异界面上,电场 $\hat{E}_y$ 和磁场 $\hat{H}_y$ 平滑变化且连续,  $k_y=\omega(\epsilon\mu)^{1/2}$ 时对结果的影响可以忽略。为避免计算中可能出现的奇异,空气电导率可取 $10^{-5}\sim 10^{-8}$  S/m。

求取辅助场时,要用到节点所处位置的电阻率。在地表节点上,地层的电阻率和空气层的差异很大,分别使用地层和空气层电阻率求取的辅助场值差异很大(见图4)。可见,在计算辅助场时,应选取空气层的电导率。

## 3 等参变换

使用任意四边形单元进行剖分的方法可以模拟复杂的地形和边界,并能方便地调节网格的疏密结构,但对于任意四边形这种复杂形状的单元直接进行数值计算,工作量过大,且不利于计算机自动化实现。为满足对一般形状求解域进行离散化和自动化计算的需

要,必须建立一个坐标变换,将总体(笛卡儿)坐标中几何形状扭曲的单元转换成局部(自然)坐标中几何形状规则的单元。在规则单元域内,无论各个积分形式表示的被积函数如何复杂,都可以方便地采用标准化的数值积分方法计算。本研究中,采用8节点等参单元剖分求解区域。如图5所示,8个黑点表示曲边四边形单元的8个节点,括号内的数表示各个节点在新坐标系内的坐标值。可见,在新坐标系中,曲边四边形变成了一标准正方形,称为基本单元。曲边四边形单元称为实际单元,两单元内的参变量函数采用相同数目的节点参数和相同的形函数进行变换。然后,在局部自然坐标系中的规则单元上进行单元分析,再映射到实际直角坐标系中的单元上,等参单元同时具有计算精度高和适用性好的特点。

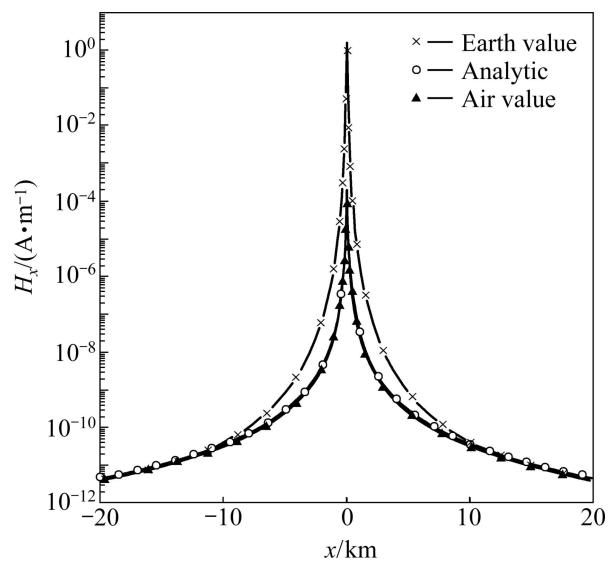


图4 使用地层、空气层电阻率计算的辅助场 $H_x$

Fig. 4 Auxiliary fields  $H_x$  using earth and air resistivity

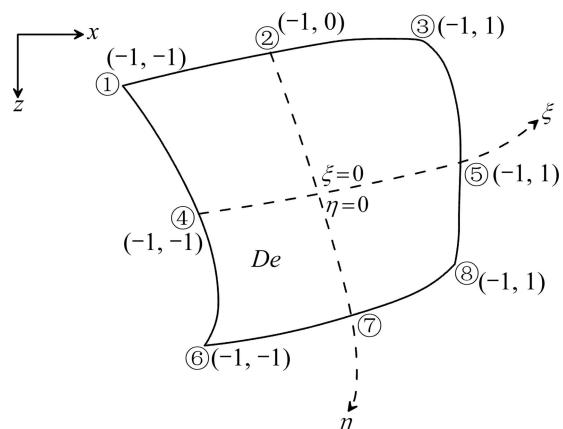


图5 等参单元示意图

Fig. 5 Schematic diagram of isoparametric element

## 4 矩阵的压缩存储

全稀疏行压缩存储方案是近年来流行的一种稀疏存储方案,许多通用的求解大型稀疏方程的软件包都是基于该存储方案,关于该方法的存储模式已有许多文献陈述。它是把矩阵中的非零元素按行依次存储在一个一维数组中,然后通过两个索引数组来确定该数组中的元素与原矩阵中的元素对应关系。考虑到总刚矩阵的对称性,可以只存储矩阵的上三角元素。下面通过一个例子来说明这种压缩存储格式。

如图6所示,有一对称稀疏系数矩阵 $\mathbf{m}$ ,它的上三角非零元素按行依次存储在数组 $a$ 中,这些非零元素在 $\mathbf{m}$ 中所处的列记录在整数数组 $ja$ 中,即如果 $a(k)=m(i,j)$ ,那么 $ja(k)=j$ 。如果要知道数组 $a$ 中的元素在矩阵 $\mathbf{m}$ 中的具体位置,还需要知道它从哪一行开始,距离起始位置有多长,这通过数组 $ia$ 表示,如果 $m(i,j)$ 是第 $i$ 行第一个上三角非零元素,并且 $a(k)=m(i,j)$ ,那么 $ia(i)=k$ 。第 $i$ 行的非零元素个数为 $ia(i+1)-ia(i)$ ,即第 $i$ 行的非零元素依次存储在 $a(ia(i)), a(ia(i)+1), \dots, a(ia(i+1)-1)$ 位置,相应的列依次存储在 $ja(ia(i)), ja(ia(i)+1), \dots, ja(ia(i+1)-1)$ 位置,如表1所列。

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

图6 对称稀疏矩阵举例

Fig. 6 Example of sparse matrix

表1 对称稀疏矩阵举例

Table 1 Diagram of sparse matrix

$a$	$ja$	$ia$	$a$	$ja$	$ia$
1	1		6	4	10
-1	2	4	4	5	
-3	4	5	7	4	
5	2	8	-5	5	
4	3	9			

## 5 方程组的并行求解

有限元方法中,最终往往将问题归结为一个大型线性方程组的求解问题。方程组求解方法的好坏,直

接决定有限元法正演的精度和速度。新世纪以来,计算机技术突飞猛进,个人PC逐渐呈现出多核、多线程的特征,具有了比较完善的并行计算功能,这为大规模线性方程组的快速求解提供了硬件基础。本研究使用大规模稀疏矩阵并行求解器PARDISO进行求解,以期能尽可能充分地利用计算机的并行能力,取得了良好的效果。对于5万个节点的模型,使用本研究算法在主频2.2 GHz的四核PC上完成一次单频点正演所需时间约为46 s。在同样主频的计算机上使用单线程求解器求解,完成一次单频点正演需时约为163 s。这说明,使用并行求解器能充分地利用现有的计算资源,显著地提高了求解效率。

## 6 算法验证

### 6.1 均匀半空间模型正演结果验证

首先利用本研究算法计算电偶极子源在均匀半空间的响应,并与解析解进行对比。水平电偶极子沿 $y$ 轴放置在坐标原点,电偶极距 $Id=1$  A·m,频率为1 kHz,背景阻率为100 Ω·m。如图7所示,采用本研究算法得到的计算结果与理论值基本一致。图8所示为相对误差曲线。由图8可见,除源周围的误差相对较大外,其余相对误差基本满足实际计算需求。

### 6.2 起伏地形模型正演结果验证

为了验证本算法对起伏地形模型的有效性,设计了一个与MITSUHATA<sup>[14]</sup>相同的地电模型。如图9所

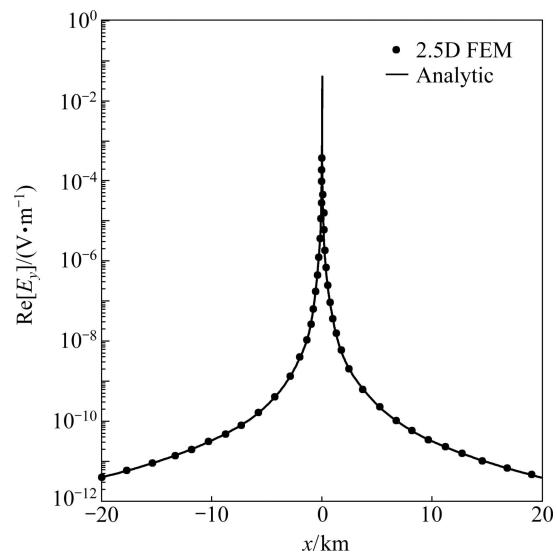


图7 均匀半空间模型2.5D维有限元解和解析解比较

Fig. 7 Comparison of 2.5 FEM solution and analytical solutions for homogenous half space model

示, 山丘高为 450 m, 山底部宽 2 km, 山脊宽 450 m, 山丘中心在原点位置, 地下为均匀介质, 电阻率为  $100 \Omega \cdot \text{m}$ , 电偶源位于  $x=-5.5 \text{ km}$  位置, 测点位于  $y=0 \text{ m}$  的主剖面地表上。分别计算发射频率为 2 Hz 和 50 Hz 时的卡尼雅电阻率并与 MITSUHATA<sup>[14]</sup>的计算结果进行对比, 如图 10 和 11 所示, 本研究得出的电阻率值与 MITSUHATA<sup>[14]</sup>的计算结果十分接近, 说明本研究提出的计算方法能够应用于起伏地形模型的电磁响应模拟。

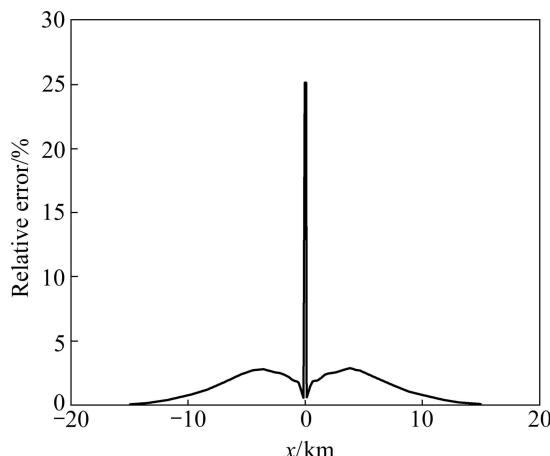


图 8 均匀半空间模型 2.5 维有限元解和解析解的相对误差曲线

Fig. 8 Relative error curve of 2.5D FEM solutions and analytical solutions for homogenous half space model

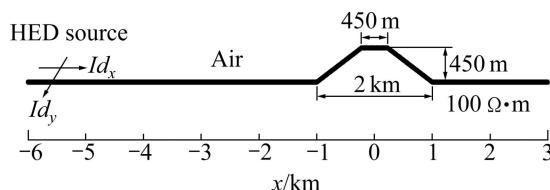


图 9 山丘地形示意图

Fig. 9 Diagram of trapezoidal hill

### 6.3 山谷地形单元正演模拟

相对于 MITSUHATA<sup>[14]</sup>计算的山丘地形模型, 设计了一个相同规模的山谷地形模型。如图 12 所示(图中  $Id_x$  和  $Id_y$  分别代表  $x$  和  $y$  方向的电偶极矩), 山谷的大小、形状、位置与前面设计的山丘相同, 地下介质电阻率仍为  $100 \Omega \cdot \text{m}$ 。利用本文算法计算山谷地形在谐变电偶极子激发下的响应, 模拟结果如图 13 和 14 所示。

从视电阻率曲线中可以看出, 水平电偶源沿  $y$  方向(平行于走向)放置时, 视电阻率曲线比较平缓; 当水平电偶源沿  $x$  方向(垂直于走向)放置时, 视电阻率

曲线变化剧烈, 出现了“跳跃”式的特点。这可以从理论上进行解释: 根据电磁场的连续性可知, 地形起伏时, 磁场分量一般变化比较平缓, 不发生突变, 但当电偶源垂直于走向方向放置时, 起伏地形表面产生积累电荷, 两侧电场法向分量不连续, 电场值产生突

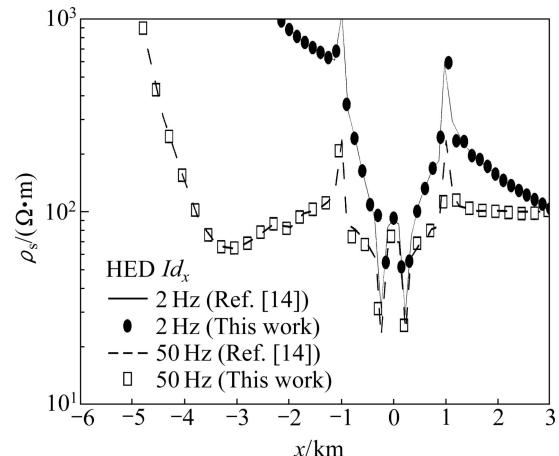


图 10 山丘模型本算法和 MITSUHATA<sup>[14]</sup>计算结果的对比( $x$  向电偶源)

Fig. 10 Comparison of calculation results of this work and MITSUHATA<sup>[14]</sup> of trapezoidal hill models (HED along  $x$ \_axis)

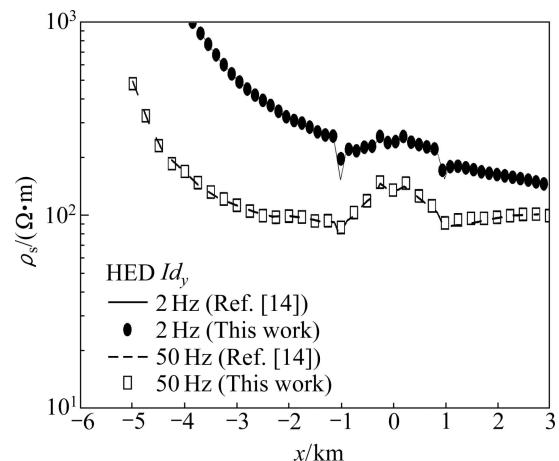


图 11 山丘模型本文算法和 MITSUHATA<sup>[14]</sup>计算结果的对比( $y$  向电偶源)

Fig. 11 Comparison of calculation results of this work and MITSUHATA<sup>[14]</sup> of trapezoidal hill (HED along  $y$ \_axis)

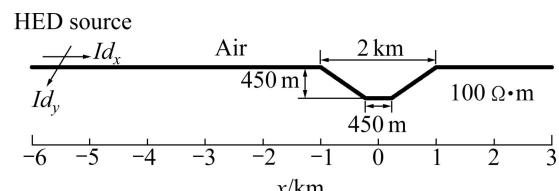
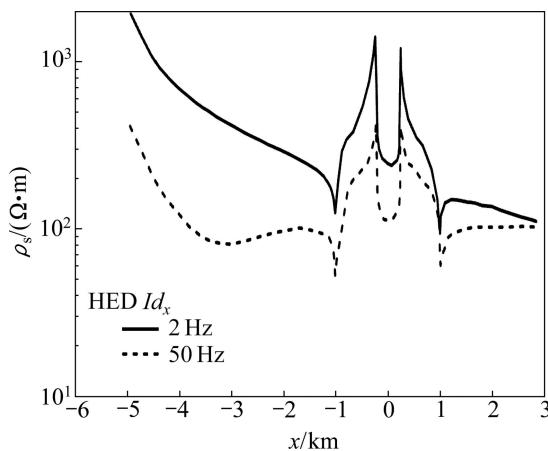
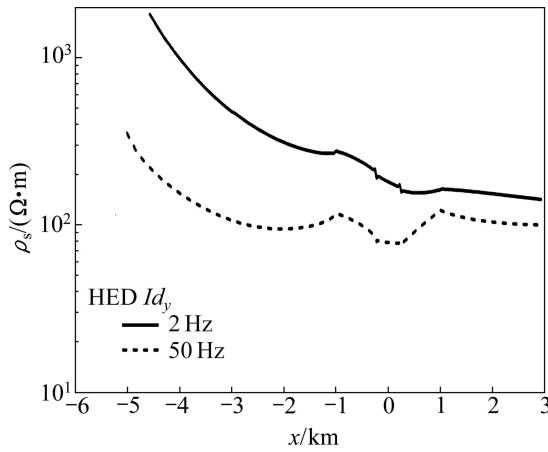


图 12 山谷地形示意图

Fig. 12 Diagram of trapezoidal valley

图 13 山谷地形视电阻率曲线( $x$  方向电偶源)Fig. 13 Apparent resistivity curves over valley (HED along  $x$ \_axis)图 14 山谷地形视电阻率曲线( $y$  方向电偶源)Fig. 14 Apparent resistivity curves over valley (HED along  $y$ \_axis)

变, 导致视电阻率曲线的“跳跃”变化; 当电偶源平行于走向方向放置时, 介质-空气界面附近电场法向分量为 0, 切向分量连续, 因此, 电场值不会发生突变, 视电阻率曲线变化也比较平缓。

## 7 结论

1) 推导了偶极源电磁法 2.5 维电磁场耦合微分方程, 使用加权余量法对 2.5 维电磁场耦合微分方程进行离散, 形成复系数线性方程组, 最后通过大规模并行求解器求解此线性方程组, 实现耦合微分方程的求解。

2) 编制程序实现了本研究算法, 计算结果表明, 程序能在保证精度在 3% 内的前提下较快地实现 2.5 维电偶源电磁场正演, 对于大约 5 万个节点的模型, 单频点正演时间不到 1 min, 能满足实用化的需要。

3) 对电磁场 2.5 维正演中的一些关键技术如波数的选择、伪 delta 函数  $\tau$  的选择、辅助场的求解方法、网格如何合理剖分及空气层的处理等进行了计算和分析, 并提出了解决的原则和方法, 为更加精确的正演模拟提供了理论保证。

4) 将 2.5 维正演模拟结果与电偶极子均匀半空间解析解和 MITSUAA<sup>[14]</sup> 关于山丘地形的计算结果进行对比, 验证了本研究中算法的正确性, 然后模拟山谷地形响应, 并从理论上分析了视电阻率变化规律随偶极子放置方向而不同的原因。

## 附录 A: 有单元分析

对方程式(4)和(5)用伽辽金方法(Galerkin method)进行离散, 可得到各个单元的积分方程。让余量  $R^E$  在包含  $N_e$  个单元的整个剖分区域内的加权积分为零, 并在区域外边界上采用第一类边界条件, 即强加  $\hat{E}_y = \hat{H}_y = 0$ , 可得到简化的离散化方程:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left( \frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \left( \frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) + N_i^e \hat{y} \hat{E}_y + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{ik_y}{k_e^2} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) \right\} dx dz = \right. \\ \left. - \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ N_i^e \hat{J}_{sy} + \frac{ik_y}{k_e^2} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{J}_{sx} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{J}_{sz} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{k^2}{k_e^2} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{M}_{sx} - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{M}_{sz} \right) \right\} dx dz \right. \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \left( \frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) + N_i^e \hat{z} \hat{H}_y + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{ik_y}{k_e^2} \left( - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) \right\} dx dz = \right. \\ \left. - \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ N_i^e \hat{z} \hat{M}_{sy} + \frac{ik_y \hat{z}}{k_e^2} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{M}_{sx} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{M}_{sz} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\hat{z}}{k_e^2} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{J}_{sx} - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{J}_{sz} \right) \right\} dx dz \right. \end{aligned} \quad (A2)$$

式中:  $e$  为求解区域中某一单元,  $N_e$  为单元总个数,  $N_i^e$  是第  $e$  个单元中第  $i$  个结点的形函数,  $\hat{J}_s$ 、 $\hat{M}_s$  为场源项。

单元内的各点按从左到右, 从上到下的顺序排列, 节点号如图 5 中①~⑧, 对应的基函数  $N_i$  为如下的双二次插值函数:

$$\begin{cases} N_1 = 1/4(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ N_2 = 1/2(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_3 = 1/4(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_4 = 1/2(1-\xi)(1-\eta^2) \\ N_5 = 1/2(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_6 = 1/4(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_7 = 1/2(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_8 = 1/4(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \end{cases} \quad (A3)$$

将形函数代入式(A1~A2), 并将积分区域变换到自然坐标系, 可以得到单元  $N^e$  内节点  $i$  于关于  $\xi\eta$  坐标系的最终离散化方程, 以  $y$  向电偶源为例:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^8 k_{ij} E_j + \sum_{j=1}^8 q_{ij} H_j = J_i \\ \sum_{j=1}^8 k'_{ij} H_j = \sum_{j=1}^8 q_{ij} E_j \end{cases} \quad (A4)$$

其中:

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{F_{ix}(\xi, \eta)F_{jx}(\xi, \eta) + F_{iz}(\xi, \eta)F_{jz}(\xi, \eta)}{|J|} + \hat{y} |J| N_i^e N_j^e \right\} d\xi d\eta \quad (A5)$$

$$k'_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{F_{ix}(\xi, \eta)F_{jx}(\xi, \eta) + F_{iz}(\xi, \eta)F_{jz}(\xi, \eta)}{|J|} + \hat{z} |J| N_i^e N_j^e \right\} d\xi d\eta \quad (A6)$$

$$q_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{ik_y}{k_e^2} \frac{F_{ix}(\xi, \eta)F_{jz}(\xi, \eta) - F_{iz}(\xi, \eta)F_{jx}(\xi, \eta)}{|J|} \right\} d\xi d\eta \quad (A7)$$

$$J_i = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_i^e Idl \delta_{sx}(\xi, \eta) \delta_{sz}(\xi, \eta) \right\} |J| d\xi d\eta \quad (A8)$$

另外,  $k^2 = -\hat{z}\hat{y}$ ,  $k_e^2 = k_y^2 - k^2$ ,  $\hat{z} = i\omega\mu$ ,  $\hat{y} = \sigma + i\epsilon\omega$  都是关于模型参数的常量。

上式是关于某单元第  $i$  节点的离散场方程, 在单元内循环  $i$  和  $j$  可得如下线性方程组:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{28} & q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{28} \\ \vdots & \vdots \\ k_{81} & k_{82} & \cdots & k_{88} & q_{81} & q_{82} & \cdots & q_{88} \\ -q_{11} & -q_{12} & \cdots & -q_{18} & k'_{11} & k'_{12} & \cdots & k'_{18} \\ -q_{21} & -q_{22} & \cdots & -q_{28} & k'_{21} & k'_{22} & \cdots & k'_{28} \\ \vdots & \vdots \\ -q_{81} & -q_{82} & \cdots & -q_{88} & k'_{81} & k'_{82} & \cdots & k'_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_8 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_8 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A9)$$

总体合成就是将方程(A9)中的各元素按节点的网格排列顺序放到关于求解域所有节点的整体方程中, 与对应的节点元素叠加, 最终的线性方程组包含所有单元内所有节点的场方程。

## 附录 B: 有效波数的范围

假定在均匀全空间中, 仅存在  $y$  向电偶源  $\hat{J}_{sy}$ 。当  $|k_y^2| \gg |k^2|$  时, 微分方程(4)变为

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{E}_y}{\partial z^2} - k_y^2 \hat{E}_y = \hat{J}_{sy} \quad (B1)$$

对式(B1)分别做在  $x$  和  $z$  方向上的傅里叶变换, 得到

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \hat{E}_y = -\hat{J}_{sy} \quad (B2)$$

当  $|k_y^2| \gg |k_x^2|$  和  $|k_y^2| \gg |k_z^2|$  时, 式(B1)不再依赖于  $x$  和  $z$  坐标的变换。考虑到在数值计算中空间离散率有限, 应该给出  $k_y$  的上限。限定了  $k_y$  的上限, 也就限定了  $k_x$  和  $k_z$  的上限。 $k_x$  的上限应该小于奈奎斯特波数  $k_N = \pi/\Delta$ ,  $\Delta$  为节点间距。假定波数域场的分布为一具有二阶导数的函数  $f(x)$ 。在图 5 所示的单元中, 任意处于两节点中点处的节点导数都相当于中心差分。取  $f(x) = \exp(ik_x x)$ , 有效波数  $k_e$  定义如下:

$$f'(x) = ik_e \exp(ik_x x) \quad (B3)$$

利用中心差分, 有效波数可以如下给出:

$$k_e = \frac{\exp[ik_x(x + \Delta)] - \exp[ik_x(x - \Delta)]}{2\Delta i \exp(ik_x x)} = \frac{\sin(k_x \Delta)}{\Delta} \quad (B4)$$

于是  $k_e$  的最大值为  $k_e = 1/\Delta$ ,  $\Delta$  为最小网格间距。

## REFERENCES

- [1] 何继善. 广域电磁测深法研究[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2010, 41(3): 1065–1072.  
HE Ji-shan. Wide field electromagnetic sounding methods [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2010, 41(3): 1065–1072.
- [2] 汤井田, 周 聰, 肖 晓. 复杂介质条件下CSAMT最小发收距的选择[J]. 中国有色金属学报, 2013, 23(6): 1681–1693.  
TANG Jing-tian, ZHOU Cong, XIAO Xiao. Selection of minimum transmit-receive distance of CSAMT on complicated media [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2013, 23(6): 1681–1693.
- [3] 汤井田, 何继善. 可控源音频大地电磁法及其应用[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2005.  
TANG Jing-tian, HE Ji-shan. Controlled source audio magnetotelluric method and its application [M]. Changsha: Central South University Press, 2005.
- [4] 孟永良, 罗延钟. 电偶源CSAMT法二维正演的有限单元算法[C]//勘查地球物理勘查地球化学文集. 北京: 地质出版社, 1996: 103–114.  
MENG Yong-liang, LUO Yan-zhong. Two-dimensional finite element method for electric dipole source CSAMT [C]// Essays on geophysics and geochemistry exploration. Beijing: Geological Publishing House, 1996: 103–114.
- [5] 王 若, 王妙月, 底青云. 频率域线源大地电磁法有限元正演模拟[J]. 地球物理学报, 2006, 49(6): 1858–1866.  
WANG Ruo, WANG Miao-yue, DI Qing-yun. Electromagnetic modeling due to line source in frequency domain using finite element method [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2006, 49(6): 1858–1866.
- [6] 张继锋, 汤井田, 喻 言, 刘长生. 基于二次插值的线源可控源有限元数值模拟[J]. 吉林大学学报: 地球科学版, 2009, 39(5): 929–935.  
ZHANG Ji-feng, TANG Jing-tian, YU Yan, LIU Chang-sheng. Finite element numerical simulation on line controlled source based on quadratic interpolation [J]. Journal of Jilin University: Earth Science Edition, 2009, 39(5): 929–935.
- [7] 赵广茂. 带地形的复电阻率2.5维电磁场正反演研究[D]. 吉林: 吉林大学, 2009.  
ZHAO Guang-mao. Research of complex resistivity 2.5D electromagnetic forward and inversion with topography [D]. Jilin: Jilin University, 2009.
- [8] COGGON J H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method [J]. Geophysics, 1971, 36(1): 132–155.
- [9] STOYER C H, GREENFIELD R J. Numerical solutions of the response of a two-dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source [J]. Geophysics, 1976, 41(3): 519–530.
- [10] LEE K H. Electromagnetic scattering by a two-dimensional inhomogeneity due to an oscillating magnetic dipole [D]. Berkeley: University of California, 1978.
- [11] LEE K H, MORRISON H F. A numerical solution for the electromagnetic scattering by a two-dimensional inhomogeneity [J]. Geophysics, 1985, 50(3): 466–472.
- [12] LIU E H. EM modeling using surface integral equations [J]. Geophys Prosp, 1988(36): 644–668.
- [13] UNSWORTH M J, TRAVIS B J, CHAVE A D. Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth [J]. Geophysics, 1993, 58(2): 198–214.
- [14] MITSUHATA Y. 2-D electromagnetic modeling by finite-element method with a dipole source and topography [J]. Geophysics, 2000, 65(2): 465–475.
- [15] LI Y, KEY K. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: Part 1—An adaptive finite-element algorithm [J]. Geophysics, 2007, 72(2): A51–A62.
- [16] KONG F N, JOHNSTAD S E, RØSTEN T, WESTERDAH H. A 2.5D finite-element-modeling difference method for marine CSEM modeling in stratified anisotropic media [J]. Geophysics, 2008, 73(1): 9–19.
- [17] ELLEFSEN K J, CROIZE D, MAZZELLA A T, MCKENNA J R. Frequency-domain Green's functions for radar waves in heterogeneous 2.5D media [J]. Geophysics, 2009, 74(4): 13–22.
- [18] 底青云, UNSWORTH M, 王妙月. 有限元法2.5维CSAMT数值模拟[J]. 地球物理学进展, 2004(2): 317–324.  
DI Qing-yun, UNSWORTH M, WANG Miao-yue. 2.5 D CSAMT modeling with finite element method [J]. Progress in Geophysics, 2004(2): 317–324.
- [19] 底青云, UNSWORTH M, 王妙月. 复杂介质有限元法2.5维可控源音频大地电磁法数值模拟[J]. 地球物理学报, 2004, 47(4): 723–730.  
DI Qing-yun, UNSWORTH M, WANG Miao-yue. 2.5-D CSAMT modeling with the finite element method over 2-D complex earth media [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2004, 47(4): 723–730.
- [20] 沈金松, 孙文博. 2.5维电磁响应的有限元模拟与波数取值研究[J]. 物探化探计算技术, 2008, 30(2): 135–144.  
SHEN Jin-song, SUN Wen-bo. A study on the 2.5-D electromagnetic modeling by the finite element method and the wave number selection [J]. Computing Techniques for

- Geophysical and Geochemical Exploration, 2008, 30(2): 135–144.
- [21] 沈金松, 孙文博. 二维海底地层可控源海洋电磁响应的数值模拟[J]. 石油物探, 2009, 48(2): 187–194.
- SHEN Jin-song, SUN Wen-bo. Numerical simulation of marine controlled-source electromagnetic (MCSEM) response to 2-D seabed formation [J]. Geophysics Prospecting for Petroleum, 2009, 48(2): 187–194.
- [22] HERRMANN R B. SH-wave generation by dislocation sources——A numerical study [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1979, 69(1): 1–15.
- [23] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- XU Shi-zhe. The finite element method in geophysics [M]. Beijing: Science Press, 1994.
- [24] 马 为. MT 二维正演中辅助场计算新方法研究[D]. 北京: 中国地震局, 2007.
- MA Wei. A new algorithm for the calculation of auxiliary field in MT 2D forward modeling [D]. Beijing: China Earthquake Administration, 2007.
- [25] 吴 娟, 席振珠, 王 鹤. 网格尺寸及边界对大地电磁有限元正演精度的影响[J]. 物探化探计算技术, 2012, 34(1): 28–32.
- WU Juan, XI Zhen-zhu, WANG He. Effects of grid size and boundary on MT forward modeling using finite element method [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2012, 34(1): 28–32.
- [26] EVERETT M E, EDWARDS R N. Transient marine electromagnetics: The 2.5-D forward problem [J]. Geophysical Journal International, 1993, 113(3): 545–561.

(编辑 李艳红)