

大地电磁双二次插值 FEM 正演及 最小二乘正则化联合反演

冯德山^{1,2}, 王珣^{1,2}

(1. 中南大学 地球科学与信息物理学院, 长沙 410083;
2. 中南大学 有色金属成矿预测教育部重点实验室, 长沙 410083)

摘要: 从大地电磁(MT)二维正演所满足的偏微分方程边值问题出发, 应用矩形网格剖分和单元内双二次插值推导有限单元法求解大地电磁 TE 与 TM 两种极化模式正问题详细算法。应用反演理论将病态问题求解的正则化方法应用到最小二乘优化方法中, 获得最光滑约束最小二乘正则化反演目标函数, 并利用 Matlab 编制了大地电磁二维正反演计算程序。应用该程序对高低阻地电模型和 Sasaki 模型开展了正反演计算, 并绘制 TE 模式和 TM 模式、TE&TM 联合反演模式的反演成果剖面图。将所得的反演剖面与初始模型对比可知, TE 模式反演剖面纵向分辨率较高, TM 模式横向分辨率较高, TE&TM 联合反演优于单一极化模式的反演, 并证明双二次插值有限元法 MT 正演及最小二乘正则化反演算法的有效性与可行性。

关键词: 大地电磁; 有限单元法; 正演模拟; 最小二乘正则化; 联合反演

中图分类号: P631.3 文献标志码: A

Magnetotelluric finite element method forward based on biquadratic interpolation and least squares regularization joint inversion

FENG De-shan^{1,2}, WANG Xun^{1,2}

(1. School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China;
2. Key Laboratory of Metallogenesis Prediction of Nonferrous Metals, Ministry of Education,
Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Based on the boundary value problem of partial differential equation of the two-dimensional magnetotelluric (MT) forward modeling meet, the detail algorithm of finite element method deduced by the rectangular grid subdivision and cell biquadratic interpolation method were used to solve the electromagnetic problems both in TE and TM polarization mode. By using the basic theory of inversion, the solving ill-posed problem regularization method was applied to the least-square optimization approach, and the most smoothness constrained least square regularization inversion objective function was gotten, then a completed two-dimensional magnetotelluric forward computational program was written by Matlab. This program was applied on high/low resistance geoelectric model and Sasaki model, the inversion cross-sectional profiles of TE mode, TM mode and TE&TM joint inversion model separately were plotted. Compared the inversion results with the original models, TE mode inversion profile has higher vertical resolution, TM mode has higher lateral resolution, TE&TM joint inversion is superior to the single inversion of polarization mode. At the same time, MT biquadratic interpolation finite element forward modeling and least-squares regularization inversion algorithm are proved to be effective and feasible.

Key words: magnetotelluric; finite element method; forward simulation; least-squares regularization joint; joint inversion

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41074085); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-12-0551); 中南大学升华育英人才计划资助项目; 湖南省普通高校青年骨干教师资助项目
收稿日期: 2013-05-16; 修订日期: 2013-06-30
通信作者: 冯德山, 副教授, 博士; 电话: 0731-88836145; E-mail: fengdeshan@126.com

大地电磁测深方法(Magnetotelluric, MT)以天然交变电磁场为源, 以岩矿石的电性差异为基础的一种重要的地球物理勘探方法^[1-2]。由于地下介质分布具有的非均匀性、强随机性, 导致 MT 探测环境的多样性和复杂性, 要实现 MT 资料解译的飞跃, 需要进一步提升与改善目前的大地电磁正反演算法^[3]。考虑到三维 MT 勘探的昂贵成本, 目前, 资源勘探、地质调查等领域仍以二维 MT 为主, 因此, 深入开展二维 MT 正反演, 对了解复杂地质体特征和提高 MT 数据解译水平具有重要意义。

MT 正反演计算是计算地球物理学的一个重要分支, 发展计算速度快、求解精度高的正、反演算法是 MT 研究中永恒追求的目标^[4]。WILLIAM^[5]、徐世浙^[6]等将有限单元法引入到 MT 正演计算中, 陈进超等^[7]、刘树才等^[8]、刘云等^[9]研究了大地电磁正演计算中地形的影响; 刘小军等^[10]和赵广茂等^[11]开展了基于二次场的二维大地电磁有限元数值模拟; 刘长生等^[12]、ZYSERMAN 等^[13]在大地电磁的正演计算中也进行了深入的研究。在 MT 正反演当中, 正演是反演的基础, 它的求解精度是决定反演成败的关键, 而反演又是指导 MT 地质解释的最终手段。为此, 国内外许多学者开展了大量的研究, Bostic 反演^[14]、Occam 反演^[15]、非线性共轭梯度反演^[16-17]、高斯牛顿法反演^[18]、最小二乘法反演^[19-21]等一系列 MT 反演算法被提出。近年来, 底青云等^[22]、柳建新等^[23]出版了 MT 专著, 详细讲解了 MT 的正反演算法原理及相关进展。本文作者采用矩形网格剖分、双二次插值的有限单元法开展 MT 高精度正演, 并将 TE 模式、TM 模式、TE&TM 模式的最小二乘正则化联合反演应用于两个典型地电模型中, 正反演结果表明, 联合反演比单个极化模式反演具有更高的精度。

1 二维大地电磁正演

根据 MT 所满足条件的 Maxwell 方程, 参照文献[6]选取右旋直角坐标系的原点在地面上, y 轴正方向垂直向上, z 轴方向平行于走向方向, 上边界为 AB, 下边界为 CD, 当平面电磁波以任意角度向地面入射时, 地下介质中的电磁波总以平面波形式垂直地向下传播, 这就使电磁场的各分量沿 z 方向都没有变化, 即 $\partial/\partial z=0$, 可得两个独立的方程组, 分别称为 TE 模式和 TM 模式。

TE 模式:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} = i\omega\mu H_z \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y \end{cases} \quad (1)$$

TM 模式:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu H_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_y \end{cases} \quad (2)$$

式中: E 是电场强度, H 是磁场强度, ϵ 为介电常数, μ 为磁导率, σ 为电导率, ω 为角频率。

由式(1)和(2)可分别推导出 E_z 和 H_z 的偏微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + (\sigma - i\omega\epsilon)E_z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon}\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) + i\omega\mu H_z = 0 \quad (4)$$

将以上两式统一表示为 $\nabla \cdot (\tau \nabla \mathbf{u}) + \lambda \mathbf{u} = 0$ 的形式, 结合相应的初边值条件, 式(3)和(4)相应的变分问题等价为

$$\begin{cases} F(\mathbf{u}) = \int \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2} \lambda \mathbf{u}^2 \right] d\Omega + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k \mathbf{u}^2 d\Gamma \\ \mathbf{u}|_{AB} = 1 \\ \delta F(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: ∇ 为二维哈密顿算子; Ω 为求解区域; \mathbf{k} 为系数矩阵; Γ 为求解的区域边界。对于 TE 模式: $\mathbf{u}=E_z$, $\tau=1/(i\omega\mu)$, $\lambda=\sigma-i\omega\epsilon$; TM 模式: $\mathbf{u}=H_z$, $\tau=1/(\sigma-i\omega\epsilon)$, $\lambda=i\omega\mu$ 。

应用矩形网格剖分、双二次插值的有限单元法(Finite element method, FEM)求解 MT 的 TE 与 TM 两种模式满足变分问题(5)。首先对整个模拟区域采用图 1 所示矩形单元对区域进行剖分, 双二次插值方法的子、母单元及总体节点编号方式如图 1 所示, 图中字符 1, 2, …, n 代表节点编号, ①, ②, …, n 代表单元编号。

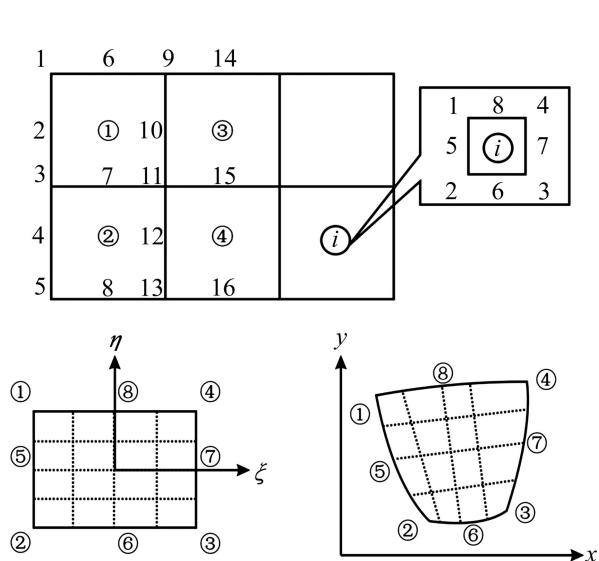


图1 基于矩形剖分、双二次插值母、子单元节点编号示意
图

Fig. 1 Sketch map of node number of parent element and sub-element based on rectangular element of biquadratic interpolation

构造的双二次插值 FEM 的形函数为

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_5 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \end{array} \right. \quad (6)$$

利用该形函数，开展单元分析，并将式(5)中的区域积分分解为各单元积分之和：

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2} \lambda \mathbf{u}^2 \right] d\Omega + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau \mathbf{k} \mathbf{u}^2 d\Gamma = \\ &= \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla \mathbf{u})^2 d\Omega - \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \lambda \mathbf{u}^2 d\Omega + \sum_{CD} \int_e \frac{1}{2} \tau \mathbf{k} \mathbf{u}^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

计算可得到各项的结果，其中 \mathbf{K}_{1e} 、 \mathbf{K}_{2e} 、 \mathbf{K}_{3e} 都为对称矩阵。

$$\mathbf{K}_{1e} =$$

$$\frac{\tau b}{90a} \begin{pmatrix} 52 & & & & & & & \\ 17 & 52 & & & & & & \\ 23 & 28 & 52 & & & & & \\ 28 & 23 & 17 & 52 & & & & \\ 6 & 6 & -6 & -6 & 48 & & & \\ -40 & -80 & -80 & -40 & 0 & 160 & & \\ -6 & -6 & 6 & 6 & -48 & 0 & 48 & \\ -80 & -40 & -40 & 80 & 0 & 80 & 0 & 160 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{\tau a}{90b} \begin{pmatrix} 52 & & & & & & & \\ 28 & 52 & & & & & & \\ 23 & 17 & 52 & & & & & \\ 17 & 23 & 28 & 52 & & & & \\ -80 & -80 & -40 & -40 & 160 & & & \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 0 & 48 & & \\ -40 & -40 & -80 & -80 & 80 & 0 & 160 & \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 0 & -48 & 0 & 48 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_{2e} = \frac{\lambda ab}{180} \begin{pmatrix} 6 & & & & & & & \\ 2 & 6 & & & & & & \\ 3 & 2 & 6 & & & & & \\ 2 & 3 & 2 & 6 & & & & \\ -6 & -6 & -8 & -8 & 32 & & & \\ -8 & -6 & -6 & -8 & 20 & 32 & & \\ -8 & -8 & -6 & -6 & 16 & 20 & 32 & \\ -6 & -8 & -8 & -6 & 20 & 16 & 20 & 32 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{3e} = \begin{pmatrix} 4 & & & & & & & \\ -1 & 4 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 16 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

然后，将 \mathbf{K}_{1e} 、 \mathbf{K}_{2e} 、 \mathbf{K}_{3e} 扩展成全体节点的单元系数矩阵，进行总体合成，可得

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) &= \sum F_e(\mathbf{u}) = \sum \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T (\mathbf{K}_{1e} - \mathbf{K}_{2e} + \mathbf{K}_{3e}) \mathbf{u}_e = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \sum (\bar{\mathbf{K}}_{1e} - \bar{\mathbf{K}}_{2e} + \bar{\mathbf{K}}_{3e}) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} \end{aligned} \quad (11)$$

令式(11)中 $F(\mathbf{u})=0$ ，将上边界条件代入，求解线性方程组即可得到各节点的 \mathbf{u} 值，在不同模式下分别

代表 \mathbf{E}_z 或 \mathbf{H}_z 。再利用数值方法求出场值沿地表的偏导数 $\partial x/\partial y$, 代入式(12)~(14)中, 便可计算视电阻率和相位。

对于 TE 模式:

$$\begin{cases} Z_{\text{TE}} = (\mathbf{E}_z / \frac{1}{i\omega\mu}) \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} \\ \rho_a^{\text{TE}} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{\text{TE}}|^2 \end{cases} \quad (12)$$

对于 TM 模式:

$$\begin{cases} Z_{\text{TM}} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y} / \mathbf{H}_z \\ \rho_a^{\text{TM}} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{\text{TM}}|^2 \end{cases} \quad (13)$$

式中: ρ_a^{TE} 为视电阻率。

对于不同模式下的相位:

$$\phi = \arctan \frac{\text{Im}[Z]}{\text{Re}[Z]} \quad (14)$$

2 最小二乘正则化约束联合反演

MT 反演问题通常是不适定的, 反演所得到的结果具有非唯一性。为此引入 Tikhonov 正则化思想来改善解的稳定性和非唯一性的问题。首先, 将 MT 二维正演问题通常描述为

$$\mathbf{d}^m = A(\mathbf{m}) \quad (15)$$

式中: A 是一个正演算子, 通常是非线性的, \mathbf{m} 是模型参数矢量, \mathbf{d}^m 是一个模型响应(预测数据)向量, 引入正则化方法后可写出目标函数为

$$P^\alpha(\mathbf{m}) = \varphi(\mathbf{m}) + \alpha s(\mathbf{m}) \quad (16)$$

式中: $P^\alpha(\mathbf{m})$ 是总目标函数; α 是正则化因子; $\varphi(\mathbf{m})$ 是实测数据与预测数据差的平方和, 即数据目标函数; $s(\mathbf{m})$ 是模型约束函数。反演过程中采用最光滑约束模型, 可将大地电磁反演问题总目标函数写为

$$P(\mathbf{m}) = \|W_d [d - A(\mathbf{m})]\|^2 + \lambda^2 \|W_m(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)\|^2 \quad (17)$$

式中: W_d 是观测数据的权系数矩阵, W_m 是光滑度矩阵, \mathbf{m}_0 是先验模型。

可将基于先验模型的最光滑约束最小二乘正则化反演的迭代更新公式写为

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \Delta\mathbf{m} \quad (18)$$

式中: \mathbf{m}^k 是模型的第 k 次迭代结果。

如设 J^k 是 Jacob 灵敏度矩阵, 则数据更新公式为

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{m} &= (J^{kT} W_d^T W_d J^k + \lambda^2 W_m^T W_m)^{-1} \cdot \\ &[J^k W_d^T W_d (d - d^k) + \lambda^2 W_m^T W_m (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}^k)] \end{aligned} \quad (19)$$

Jacob 灵敏度矩阵的计算也是非常重要的内容, 可参阅文献[22~23]。为了实现 TE 与 TM 两种极化模式混合反演, 可以将模型参数 m 表示为

$$m = (\rho_{1,1}, \dots, \rho_{i,j}, \dots, \rho_{M,N}) \quad (20)$$

式中: $\rho_{i,j}$ 表示的是第 i 层第 j 个网格单元的电阻率, M 是网格层数, N 水平网格数目。

对于 TE 和 TM 模式的数据目标函数可对视电阻率与阻抗相位进行同时拟合, 其表达式为

$$\Phi_d = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_T} \left(\frac{\rho_{a,ij} - \rho_{c,ij}}{\rho_{a,ij}} \right)^2 + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_T} \left(\frac{\phi_{a,ij} - \phi_{c,ij}}{\phi_{a,ij}} \right)^2 \quad (21)$$

式中: N_x 为测点数, N_T 为周期个数, $\rho_{a,ij}$ 为实测视电阻率, $\rho_{c,ij}$ 为模型响应视电阻率, $\phi_{a,ij}$ 为实测阻抗相位, $\phi_{c,ij}$ 为模型响应的阻抗相位。

3 反演计算实例

3.1 高、低阻异常体模型

二维高、低阻异常体地电模型如图 2 所示, 左侧为矩状低阻异常体, 其电阻率为 $10 \Omega \cdot m$, 矩状异常体左上与右下两对角点坐标分别为($x=1.5 \text{ km}$, $z=1.0 \text{ km}$), ($x=3.0 \text{ km}$, $z=3.0 \text{ km}$)。右侧为矩状高阻异常体, 其大小与左侧一致, 电阻率为 $1.000 \Omega \cdot m$, 两对角点

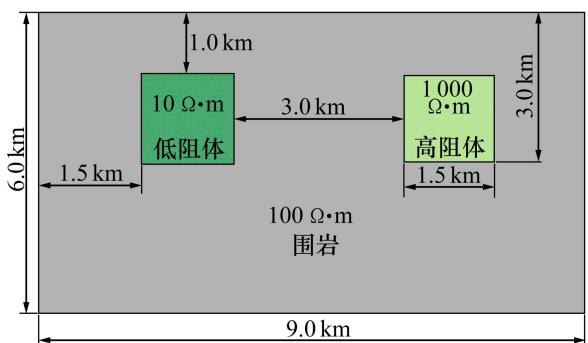


图 2 高、低阻异常体地电模型

Fig. 2 Sketch map of high-ohmic resistor and low-drag body geoelectric model

坐标分别为($x=6.0\text{ km}$, $z=1.0\text{ km}$), ($x=7.5\text{ km}$, $z=3.0\text{ km}$)。围岩电阻率值为 $100\text{ }\Omega\cdot\text{m}$ 。采用 11 个记录频点($10^{-2}\sim10^2\text{ Hz}$)。

对 TE 模式的响应数据反演迭代 10 次, 其数据拟合差为 0.011 44, 对 TM 模式的响应数据反演迭代 10 次, 其数据拟合差为 0.009 74, 反演计算收敛。图 3 所示为 TE 模式、TM 模式、TE&TM 联合模式的反演结果图。再与真实模型对比, 两种极化模式下的反演结果都可以大致确定低阻异常体的位置、大小, 且在反演的数值上低阻异常体的电阻率与真实值基本接近。但是。再对比图 3(a)与(b)可知, 对于高阻异常体

而言, 高阻体的大小、深度两反演图上与模型中仍存在偏差, 而且 TE 模式与 TM 模式的差异较大, TE 模式对高阻异常体的分辨率较 TM 模式差, TM 模式对高阻异常体有较高的分辨能力。总体来看, TE 模式在纵向上具有较高的分辨率, TM 模式在横向上有较高的分辨率, 因此, 为了充分利用好两种极化模式的优点, 开展了 TE 模式与 TM 模式下的响应数据联合反演, 其反演结果如图 3(c)所示, 对比图 3 中的反演结果, 联合反演的结果明显优于单一模式的反演结果, 高低阻异常体的形态、大小、位置能得到更加真实的反映。

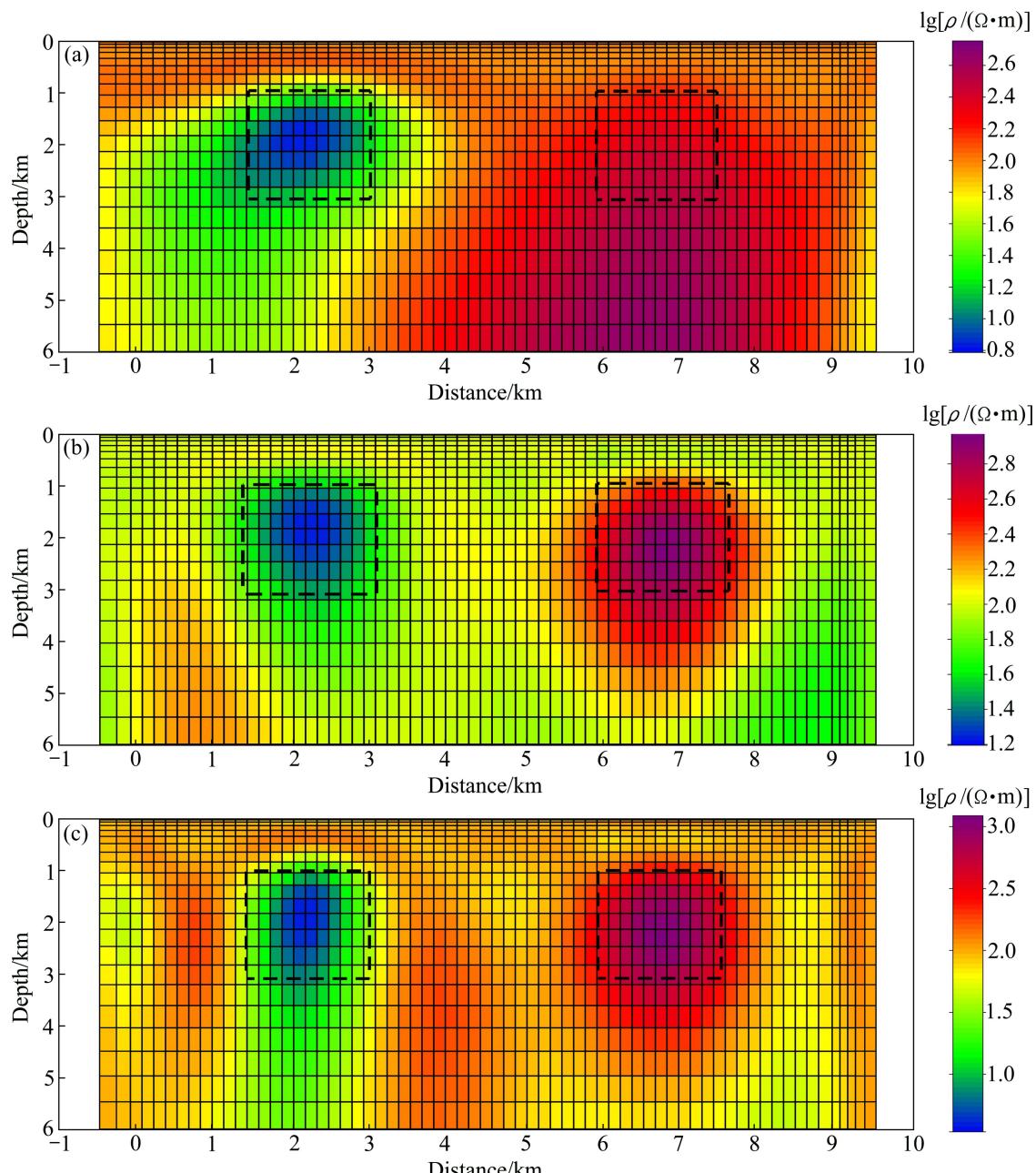


图 3 高低阻异常体二维反演剖面图: (a) TE 模式; (b) TM 模式; (c) TE&TM 联合模式

Fig. 3 2D inversion profiles of high-ohmic resistor and low-drag body model: (a) TE mode; (b) TM mode; (c) TE&TM joint mode

3.2 Sasaki 地电模型

图4所示为Sasaki地电模型。由图4可看出, 均匀半空间的电阻率值为 $50 \Omega\cdot m$, 其中包含3个低阻异常体, 其电阻率值分别为5、5和 $10 \Omega\cdot m$, 并有一个高阻体, 其电阻率值为 $100 \Omega\cdot m$ 。采用的测点数为9个, 点距为2.0 km, 选用9个记录频点为0.1、0.22、0.5、1、2.2、5、10、22和50 Hz。分别采用TE极化模式和TM极化模式正演模拟所得的响应数据进行二维反演模拟。

反演迭代结果如图5所示, TE、TM、TE&TM联合反演结果均能展现出模型的电性结构特征, 反演的

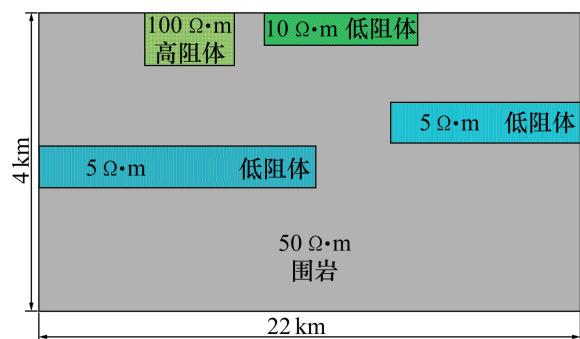


图4 Sasaki 地电模型

Fig. 4 Sketch map of Sasaki geoelectric model

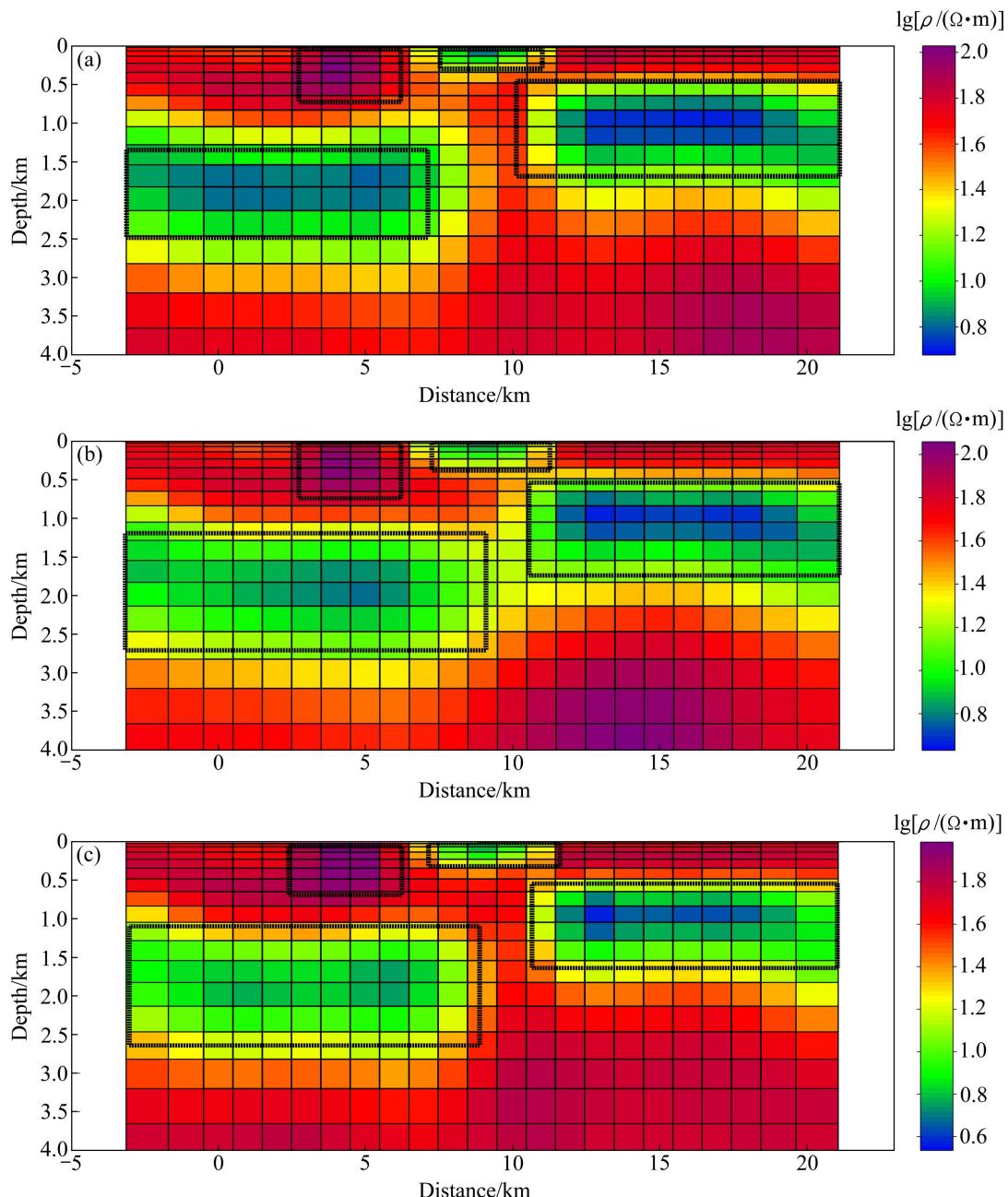


图5 Sasaki 模型二维反演剖面图: (a) TE 模式反演图; (b) TM 模式反演图; (c) TE&TM 联合反演图

Fig. 5 2D inversion profiles of Sasaki model: (a) TE mode; (b) TM mode; (c) TE&TM joint mode

效果比较明显, 各低阻异常体的大小、位置基本得到了较好的反映, 且反演所得的电阻率与真实值基本接近; 而 TE&TM 联合反演对高阻异常体的大小、深度的反映较单一 TE、TM 模式稍好。

4 结论

1) 应用基于矩形剖分、双二次插值的有限单元法, 能够对二维 MT 进行快速高精度正演, 反演结果证明正演程序的正确性。

2) 将最小二乘正则化约束反演算法对均匀半空间中高低阻模型、Sasaki 模型进行正反演计算, 获得 TE 模式、TM 模式、TE&TM 联合反演剖面图, 将这些反演结果与模型对比, 说明了反演方法的有效性和可行性。

3) 反演结果表明: TE 模式具有较好的纵向分辨率, TM 模式具有较好的横向分辨力, TE 与 TM 极化模式都对低阻异常体都具有较好的分辨能力。相比 TE 极化模式, TM 极化模式对高阻异常体的具有更强的分辨能力, 而 TE&TM 联合反演模式又较单一模式的反演分辨率更高、效果更好。

REFERENCES

- [1] 李爱勇, 曹创华, 柳建新, 郭荣文, 童孝忠, 柳卓. 不同幅度噪声和缺失数据对大地电磁正则化反演的影响[J]. 中国有色金属学报, 2012, 22(3): 915–920.
LI Ai-yong, CAO Chuang-hua, LIU Jian-xin, GUO Rong-wen, TONG Xiao-zhong, LIU Zhuo. Effects of different amplitudes of noise and missing data on regular inversion of magnetotelluric response [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2012, 22(3): 915–920.
- [2] 柳建新, 蒋鹏飞, 童孝忠, 徐凌华, 谢维, 王浩. 不完全 LU 分解预处理的 BICGSTAB 算法在大地电磁二维正演模拟中的应用[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2009, 40(2): 484–491.
LIU Jian-xin, JIANG Peng-fei, TONG Xiao-zhong, XU Ling-hua, XIE Wei, WANG Hao. Application of BICGSTAB algorithm with incomplete LU decomposition preconditioning to two-dimensional magnetotelluric forward modeling [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2009, 40(2): 484–491.
- [3] 陈小斌. MT 二维正演计算中地形影响的研究[J]. 石油物探, 2000, 39(3): 112–120.
CHEN Xiao-bin. On the research of influence of terrain to MT 2D forward computation [J]. Geophysical Prospecting of Petroleum, 2000, 39(3): 112–120.
- [4] 张继锋, 汤井田, 王烨, 肖晓. 基于预处理共轭梯度的大地电磁快速正演[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2010, 41(5): 1877–1882.
ZHANG Ji-feng, TANG Jing-tian, WANG Ye, XIAO Xiao. Magnetotellurics fast forward based on preconditioning conjugate gradient [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2010, 41(5): 1877–1882.
- [5] WILLIAM L R. A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data [J]. Geophysics, 1976, 44: 483–506.
- [6] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994: 229–241.
XU Shi-zhe. Finite element in geophysics [M]. Beijing: Science Press, 1994: 229–241.
- [7] 陈进超, 王绪本, 熊鹏, 闫刚. 一种含约束条件的二维自适应三角剖分新算法[J]. 物探化探计算技术, 2009, 31(1): 74–77.
CHEN Jin-chao, WANG Xu-ben, XIONG Peng, YAN Gang. A new algorithm of adaptive triangulation for two-dimensional modeling with inner specific restriction [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2009, 31(1): 74–77.
- [8] 刘树才, 何昭友, 刘志新. 适合地形起伏的二维有限元数值模拟技术[J]. 物探化探计算技术, 2005, 27(2): 131–134.
LIU Shu-cai, HE Zhao-you, LIU Zhi-xin. 2D FEM numerical simulation adapted to the fluctuant topography [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2005, 27(2): 131–134.
- [9] 刘云, 王绪本. 大地电磁二维自适应地形有限元正演模拟[J]. 地震地质, 2010, 32(3): 382–391.
LIU Yun, WANG Xu-ben. FEM using adaptive topography in 2D MT forward modeling [J]. Seismology and Geology, 2010, 32(3): 382–391.
- [10] 刘小军, 王家林, 于鹏. 基于二次场的二维大地电磁有限元数值模拟[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2007, 35(8): 1113–1117.
LIU Xiao-jun, WANG Jia-lin, YU Peng. Secondary field based two-dimensional magnetotelluric numerical modeling by finite element method [J]. Journal of Tongji University: Natural Sciences Edition, 2007, 35(8): 1113–1117.
- [11] 赵广茂, 李桐林, 王大勇, 李建平. 基于二次场二维起伏地形 MT 有限元数值模拟[J]. 吉林大学学报: 地球科学版, 2008, 38(6): 1055–1059.
ZHAO Guang-mao, LI Tong-lin, WANG Da-yong, LI Jiang-ping. Secondary field-based two-dimensional topographic numerical simulation in magnetotellurics by finite element method [J].

- Journal of Jilin University: Earth Science Edition, 2008, 38(6): 1055–1059.
- [12] 刘长生, 汤井田, 任政勇, 冯德山. 基于非结构化网格的三维大地电磁自适应矢量有限元模拟[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2010, 41(5): 1855–1860.
LIU Chang-sheng, TANG Jing-tian, REN Zheng-yong, FENG De-shan. Three-dimension magnetotellurics modeling by adaptive edge finite-element using unstructured meshes [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2010, 41(5): 1855–1860.
- [13] ZYSERMAN F I, GUARRACINO L, SANTOS J E. A hybridized mixed finite element domain decomposed method for two dimensional magnetotelluric modeling [J]. Earth Planets Space, 1999, 51(4): 297–306.
- [14] RODRGUEZ J, ESPARZA F J, GÓMEZ-TREVINO E. 2-D Niblett-Bostick magnetotelluric inversion [J]. Geological Acta, 2010, 18(1): 15–31.
- [15] 吴小平, 徐果明. 大地电磁数据的 Occam 反演改进[J]. 地球物理学报, 1998, 41(4): 547–554.
WU Xiao-ping, XU Guo-ming. The Occam inversion of magnetotelluric data [J]. Chinese Journal of Geophysics, 1998, 41(4): 547–554.
- [16] LIN Chang-hong, TAN Han-dong, TONG Tuo. Three-dimensional conjugate gradient inversion of magnetotelluric impedance tensor data [J]. Journal of Earth Science, 2011, 22(3): 386–395.
- [17] 林昌洪, 谭捍东, 舒晴, 佟拓, 谭嘉言. 可控源音频大地电磁三维共轭梯度反演研究[J]. 地球物理学报, 2012, 55(11): 3829–3839.
LIN Chang-hong, TAN Han-dong, SHU Qing, TONG Tuo, TAN Jia-yan. Three-dimensional conjugate gradient inversion of CSAMT data [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2012, 55(11): 3829–3839.
- [18] GERHARD P R, SHIN C, HICKS G J. Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion [J] Geophys J Int, 1998, 133: 341–362.
- [19] SEONG K L, HEE J K, YOONHO S, CHOON-KI L. MT2DInvMatlab—A program in MATLAB and FORTRAN for two-dimensional magnetotelluric inversion [J]. Computers & Geosciences, 2009, 35(8): 1722–1734.
- [20] ZHANG Luo-lei, KOYAMA T, UTADA H, PENG Yu, WANG Jia-lin. A regularized three-dimensional magnetotelluric inversion with a minimum gradient support constraint [J]. Geophysical Journal International, 2012, 189(1): 296–316.
- [21] SIRIPUNVARAPORN W. Three-dimensional magnetotelluric inversion: An introductory guide for developers and users [J]. Surv Geophys, 2012, 33: 5–27.
- [22] 底青云, 王若. 可控源音频大地电磁数据正反演及方法应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
DI Qing-yun, WANG Ruo. Controlled source audio magnetotelluric data inversion and methods application [M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [23] 柳建新, 童孝忠, 郭荣文, 李爱勇, 杨生. 大地电磁测深勘探: 资料处理反演与解释[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
LIU Jian-xin, TONG Xiao-zhong, GUO Rong-wen, LI Ai-yong, YANG Sheng. Magnetotelluric sounding exploration: Data processing inversion and interpretation [M]. Beijing: Science Press, 2012.

(编辑 李艳红)