

频率域可控源电磁法 2.5D 正反演

戴世坤¹, 王顺国¹, 张钱江¹, 薛东川²

(1. 中南大学 地球科学与信息物理学院, 长沙 410083; 2. 中海石油研究中心, 北京 100027)

摘要: CSEM 有 MT 不可比拟的优势, 得到国内外学者多年的大力发展, 但是, 其数据处理水平尚停留在 1D 和 2D 近似解释阶段。2.5D 相对来说更加符合实际情况(3D), 要想进一步发展该方法, 必须开展 CSEM 2.5D 或 3D 正演和反演研究。采用有限元法实现了 CSEM 2.5D 正演模拟, 在验证其代码有效的前提下, 计算了水平地形和地堑地形的电磁场响应。采用共轭梯度法实现了对场值直接进行反演的算法。从试算低阻和高阻模型的结果可知, 反演算法精度高, 计算速度快, 初步达到了实用化的程度。

关键词: CSEM; 2.5D; 正演; 反演; 共轭梯度

中图分类号: P631

文献标志码: A

2.5D forward and inversion of CSEM in frequency domain

DAI Shi-kun¹, WANG Shun-guo¹, ZHANG Qian-jiang¹, XUE Dong-chuan²

(1. School of Geoscience and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China;

2. China National Offshore Oil Corporation Research Center, Beijing 100027, China)

Abstract: CSEM is superior to MT to some extent. Plenty of scholars all over the world are developing this exploration method, while the level of processing CSEM data is still staying on 1D and 2D approximate inversion approaches. 2.5D modeling can better simulate the true earth than the 1D and 2D modeling. In order to enhance application of this method, 2.5D or 3D forward and inversion algorithm should be developed. Adopting the finite element method represents CSEM 2.5D modeling. After evaluating the accuracy of the forward code, the electromagnetic responses of one horizontal model and one topography model were calculated. Finally, the conjugate gradient method was used to complete the field inversion algorithm. From the outcomes of response inversion, this inversion approach not only has high precision, but also has a very fast calculation speed. So the inversion code can be used into production.

Key words: CSEM; 2.5D; forward; inversion; conjugate gradient

频率域可控源电磁法实现了高效、高精度数据采集。在数据解释处理方面已经有了一定的发展, 但主要局限于一维和二维近似反演。一维和二维近似反演方法可以解决一些问题, 但是野外实际地下介质分布情况很复杂, 2.5 维相对这两种情况来说, 与野外实际情况更加吻合。针对该问题, 国内外学者做了大量工作。

UNSWORTH 等^[1]用二次场算法实现了可控源频率域电磁法的 2.5D 正演模拟, 并采用无限元边界提高了算法的效率。MITSUHATA 等^[2-3]用总场算法实现了

可控源频率域电磁法的 2.5D 正演模拟, 采用伪 δ 函数代替了源的影响, 避免了二次场算法中有地形时一次场很难求取的问题, 利用等参有限元技术解决了带地形问题, 并在磁性源基础上研究了 2.5D 反演方法, 取得了很好的效果。LI 等^[4-7]实现了海洋电磁 2.5D 自适应有限元正演模拟, 剖分用非结构化三角网格, 采用预置条件共轭梯度法和准最小残差法解方程, 并讨论了电导率各项异性时的电磁响应, 实例说明了算法的有效性。LU 等^[8]采用二次场算法进行 CSAMT 2.5D 正演模拟, 然后在此基础上, 用快速松弛法实现了

基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(2012AA09A20105); 国家重大科研仪器设备研制专项资助项目(41227803); 国家自然科学基金资助项目(41374119)

收稿日期: 2013-05-16; **修订日期:** 2013-06-30

通信作者: 王顺国, 博士; 电话: 13755091065; E-mail: wangshunguo@yeah.net

CSAMT 2.5D 反演。LEE 和 MORRISON^[9]采用二次场算法,实现了频率域电磁法 2.5D 有限元正演模拟,其控制方程用电磁波能量的原理进行推导。

孟永良和罗延钟^[10]用总场算法进行了 CSAMT 2.5D 正演研究。陈金窗和戴光明^[11]介绍了如何建立网络并行计算环境,并在该环境上实现了 2.5D CSAMT 正演程序的并行试算。陈小斌和胡文宝^[12]采用线源有限元直接迭代算法,方便地消去了矩形单元中的节点,将线性方程组的阶数大大减小。底青云和孙文博^[13-15]研究了 2.5D 有限元 CSAMT 数值模拟和反演成像。沈金松等^[16]用有限元法实现了任意偶极子源下频率域电磁法 2.5D 数值模拟。赵广茂^[17]利用基于有限元的双二次插值基函数和 GALERKIN 法实现了起伏地表条件下电偶源的复电阻率 2.5 维正演模拟。胡清龙等^[18]用有限差分法实现了 VMD 源频率域 2.5D 正演模拟。

虽然研究结果很多,但尚未出现实用化的结果。本文作者利用有限元实现 2.5D 正演模拟,采用了双二次插值单元、吸收边界等技术。用均匀全空间模型验证代码有效性后,进行了正演试算。在此基础上,采用共轭梯度实现了反演算法,从算例结果看,反演计算速度快,精度高,初步达到了实用化程度。

1 正演理论

1.1 有源 MAXWELL 方程组

频率域 MAXWELL 方程在有源区域用如下表达式^[2]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\hat{z}\mathbf{H} - \hat{z}\mathbf{M}_s \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{y}\mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (2)$$

式中: \mathbf{E} 代表电场, \mathbf{H} 代表磁场, \mathbf{M}_s 代表源磁极化强度, \mathbf{J}_s 代表源电流密度, $\hat{z} = i\omega\mu$ 表示阻抗率, $\hat{y} = i\varepsilon\omega + \sigma$ 表示导纳率。针对电性源, \mathbf{M}_s 项为零。

1.2 2.5D 问题

将式(1)和(2)改写为分量形式,对 y 作一维傅里叶变换,变换式为

$$\hat{F}(x, k_y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, \omega) e^{-ik_y y} dy \quad (3)$$

式中: (x, y, z) 表示空间域坐标, ω 为角频率, k_y 为波数, \hat{F} 表示波数域值, F 表示空间域值, 得

$$ik_y \hat{E}_z - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} = -\hat{z}\hat{H}_x - \hat{z}\hat{M}_{s,x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial x} = -\hat{z}\hat{H}_y - \hat{z}\hat{M}_{s,y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - ik_y \hat{E}_x = -\hat{z}\hat{H}_z - \hat{z}\hat{M}_{s,z} \quad (6)$$

$$ik_y \hat{H}_z - \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} = \hat{y}\hat{E}_x + \hat{J}_{s,x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{H}_z}{\partial x} = \hat{y}\hat{E}_y + \hat{J}_{s,y} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} - ik_y \hat{H}_x = \hat{y}\hat{E}_z + \hat{J}_{s,z} \quad (9)$$

联立式(6)和(7),以及式(4)和(9),令 $k^2 = -\hat{z}\hat{y}$, $k_e^2 = k_y^2 - k^2$, 可得

$$\hat{E}_x = \frac{1}{k_e^2} (-ik_y \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \hat{z} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \hat{z}\hat{J}_{s,x} - ik_y \hat{z}\hat{M}_{s,z}) \quad (10)$$

$$\hat{E}_z = \frac{1}{k_e^2} (-ik_y \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} - \hat{z}\hat{J}_{s,z} + ik_y \hat{z}\hat{M}_{s,x}) \quad (11)$$

$$\hat{H}_x = \frac{1}{k_e^2} (-ik_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + k^2 \hat{M}_{s,x} + ik_y \hat{J}_{s,z}) \quad (12)$$

$$\hat{H}_z = \frac{1}{k_e^2} (-ik_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \hat{y} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} + k^2 \hat{M}_{s,z} - ik_y \hat{J}_{s,x}) \quad (13)$$

将式(12)和(13)代入式(8),得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) - \hat{y}\hat{E}_y + \\ & ik_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right] = \\ & \hat{J}_{s,y} - ik_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{s,x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{s,z} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{s,z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{s,x} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

同理,将式(10)和(11)代入式(5),得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) - \hat{z}\hat{H}_y +$$

$$\begin{aligned}
 ik_y \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right] = \\
 \hat{z} \hat{M}_{s,y} - ik_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{M}_{s,x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{M}_{s,z} \right) \right] + \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{J}_{s,z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{J}_{s,x} \right) \quad (15)
 \end{aligned}$$

至此, 得到式(14)和(15)两个由 \hat{E}_y 和 \hat{H}_y 控制的耦合方程组。解出 \hat{E}_y 和 \hat{H}_y 后, 波数域其余各分量可由式(10)~(13)得出。

1.3 有限元方程

利用 GALERKIN 加权余量法导出控制式(14)和(15)的有限元方程。

由式(14)可得电场控制方程的余量 R^E 为

$$\begin{aligned}
 R^E = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \hat{E}_y + \\
 ik_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right] - \hat{J}_{s,y} + \\
 ik_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{s,x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{s,z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{s,z} \right) + \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{s,x} \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

选择形函数 N_i 作为权函数, 使得余量 R^E 在整个积分区域上的加权积分为零,

$$\iint_{\Omega} N_i R^E dx dz = \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} N_i R^E dx dz = 0 \quad (17)$$

式中: Ω 表示求解区域, D_e 表示第 e 个单元, N_e 表示单元个数。

将式(16)代入式(17), 得

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_e} N_i R^E dx dz = \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) dx dz + \\
 \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) dx dz - \iint_{D_e} N_i \hat{y} \hat{E}_y dx dz + \\
 ik_y \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} dx dz - \\
 ik_y \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} dx dz - \iint_{D_e} N_i \hat{J}_{s,y} dx dz +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ik_y \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{s,x} \right) dx dz + \\
 ik_y \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \hat{J}_{s,z} \right) dx dz - \\
 \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{s,z} \right) dx dz + \iint_{D_e} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k^2}{k_e^2} \hat{M}_{s,x} \right) dx dz \quad (18)
 \end{aligned}$$

利用 GREEN 公式,

$$\iint_{D_e} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dz = - \iint_{D_e} \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi dx dz + \int_{\partial D_e} \phi \phi n_x dl \quad (19)$$

式中: n_x 为边界外法线的方向余弦。对式(18)逐项作分部积分, 令余项在区域的加权积分为零, 得

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \left(\frac{\hat{y}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) + N_i^e \hat{y} \hat{E}_y + \right. \\
 \left. \frac{ik_y}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) \right\} dx dz = \\
 - \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ N_i^e \hat{J}_{s,y} + \frac{ik_y}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{J}_{s,x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{J}_{s,z} \right) + \right. \\
 \left. \frac{k^2}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{M}_{s,x} - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{M}_{s,z} \right) \right\} dx dz + \\
 \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\partial D_e} N_i^e \hat{H}_y dl \quad (20)
 \end{aligned}$$

由式(15)可得磁场控制方程的余量:

$$\begin{aligned}
 R^H = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) - \hat{z} \hat{H}_y + \\
 ik_y \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k_e^2} \right) \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right] - \hat{z} \hat{M}_{s,y} + \\
 ik_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{M}_{s,x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{M}_{s,z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{J}_{s,z} \right) + \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \hat{J}_{s,x} \right) \quad (21)
 \end{aligned}$$

同上, 用 GREEN 公式(19), 对式(21)逐项作分部积分, 令余项在区域的加权积分为零, 得

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \left(\frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) + N_i^e \hat{z} \hat{H}_y + \right. \\
 \left. \frac{ik_y}{k_e^2} \left(-\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) \right\} dx dz =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ N_i^e \hat{M}_{s,y} + \frac{ik_y \hat{z}}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{M}_{s,x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{M}_{s,z} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{\hat{z}}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{J}_{s,x} - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{J}_{s,z} \right) \right\} dx dz - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\partial D_e} N_i^e \hat{E}_l dl
 \end{aligned} \tag{22}$$

那么，式(20)和(22)即为有限元方程组。

1.4 单元积分

为了提高数值模拟精度，考虑物性突变和连续变化的实际情况，采用单元内物性和场值都二次连续变化这一复杂情况的单元积分。

1.4.1 插值函数及其偏导数

在三角形单元内(如图1所示)，假定场值 u 是随 x, z 二次变化的，

$$u(x, z) = ax^2 + bxz + cz^2 + dx + ez + f \tag{23}$$

式中： a, b, c, d, e, f 表示系数。将 u 表示为二次插值函数，

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p + N_q u_q + N_r u_r \tag{24}$$

式中： u_i, \dots, u_r 是函数值； N_i, \dots, N_r 是形函数，它们与面积坐标的关系是

$$\begin{cases}
 N_i = (2L_i - 1)L_i \\
 N_j = (2L_j - 1)L_j \\
 N_m = (2L_m - 1)L_m \\
 N_p = 4L_j L_m \\
 N_q = 4L_m L_i \\
 N_r = 4L_i L_j
 \end{cases} \tag{25}$$

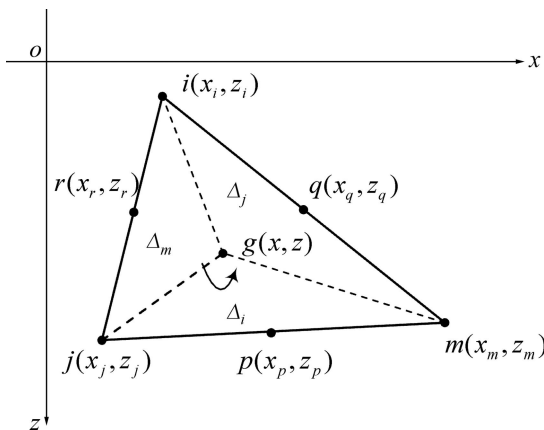


图1 三角形单元

Fig. 1 Triangular element

$$L_i(x, z) = \frac{A_i}{\Delta} = \frac{(a_i x + b_i z + c_i)}{2\Delta} \tag{26}$$

$$L_j(x, z) = \frac{A_j}{\Delta} = \frac{(a_j x + b_j z + c_j)}{2\Delta} \tag{27}$$

$$L_m(x, z) = \frac{A_m}{\Delta} = \frac{(a_m x + b_m z + c_m)}{2\Delta} \tag{28}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_j b_i - a_i b_j) \tag{29}$$

式中： $a_i, \dots, b_i, \dots, c_m$ 是只与顶点坐标有关的常数，因此 L_i, L_j 和 L_m 是 x, z 的线性函数。显然，这些形函数是 x, z 的二次函数，所以式(24)中的 u 也是 x, z 的二次函数。

$$N^T = (N_i, N_j, N_m, N_p, N_q, N_r) \tag{30}$$

由复合函数求导法则，有

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T = \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_q}{\partial x}, \frac{\partial N_r}{\partial x} \right) \tag{31}$$

由

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_k}{\partial x} &= \frac{\partial N_k}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial L_j} \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial L_m} \frac{\partial L_m}{\partial x} \\
 & \quad (k=i, j, m, p, q, r)
 \end{aligned} \tag{32}$$

得

$$\begin{cases}
 \frac{\partial N_i}{\partial x} = (4L_i - 1) \frac{b_i}{2\Delta} \\
 \frac{\partial N_j}{\partial x} = (4L_j - 1) \frac{b_j}{2\Delta} \\
 \frac{\partial N_m}{\partial x} = (4L_m - 1) \frac{b_m}{2\Delta} \\
 \frac{\partial N_p}{\partial x} = \frac{4}{2\Delta} (L_j b_m + L_m b_j) \\
 \frac{\partial N_q}{\partial x} = \frac{4}{2\Delta} (L_m b_i + L_i b_m) \\
 \frac{\partial N_r}{\partial x} = \frac{4}{2\Delta} (L_i b_j + L_j b_i)
 \end{cases} \tag{33}$$

同理可得 $\left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)^T$ 。

1.4.2 积分转换

因为 L_i, L_j, L_m 是 x, z 的线性函数，所以一般说来， x, z 也可表示成 L_i, L_j, L_m 的线性函数：

$$\begin{cases} x = L_i \alpha_i + L_j \alpha_j + L_m \alpha_m \\ z = L_i \beta_i + L_j \beta_j + L_m \beta_m \end{cases} \quad (34)$$

式中: α_i 、 α_j 、 α_m 、 β_i 、 β_j 、 β_m 是待定系数。根据 L 函数的特征, 式(34)变成

$$\begin{cases} x = (x_i - x_m)L_i + (x_j - x_m)L_j + x_m \\ z = (z_i - z_m)L_i + (z_j - z_m)L_j + z_m \end{cases} \quad (35)$$

求偏导得

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial L_i} = x_i - x_m \\ \frac{\partial x}{\partial L_j} = x_j - x_m \\ \frac{\partial z}{\partial L_i} = z_i - z_m \\ \frac{\partial z}{\partial L_j} = z_j - z_m \end{cases} \quad (36)$$

根据二重积分的换元法则, 有

$$dx dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_i} & \frac{\partial x}{\partial L_j} \\ \frac{\partial z}{\partial L_i} & \frac{\partial z}{\partial L_j} \end{vmatrix} dL_i dL_j = 2\Delta dL_i dL_j \quad (37)$$

式中: Δ 是三角形的面积。

可以证明有如下的单元积分公式:

$$\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_m^c dx dy = 2\Delta \int_0^1 \int_0^{1-L_i} L_i^a L_j^b (1-L_i-L_j)^c dL_i dL_j \quad (38)$$

逐个对单元进行单元分析, 可以形成大型稀疏的系数矩阵。在单元分析过程中, 可以根据单元和节点的位置, 将非零元素按照压缩存储的方式保存。这样可以大大减小计算机内存的占用, 进而可以有效提高计算速度。文中下边界采用吸收边界, 推导过程参考文献[19]。

1.5 源项处理

2.5D 问题的源在数学上用 $\delta(x, y, z)$ 函数表示, 但实际电磁勘探使用有限长导线源。有限长导线源产生的场不能近似地当作偶极子的场, 只有当观测点距载流导线中心的距离不小于导线长度的 10 倍时, 它的场才能用偶极子场近似。本文作者研究两种源的加载: 沿 x 方向的有限长导线源 $I dx$ 和沿构造走向的有限长

导线源 $I dy$ 。

1.5.1 沿 x 方向的有限长线电流源 $I dx$

当只考虑沿 x 方向的有限长线电流源 $I dx$ 时, 电场方程(20)的源项化简为

$$-\sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial N}{\partial x} \hat{J}_{s,x} dx dz \quad (39)$$

磁场方程(22)的源项化简为

$$-\sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \frac{\hat{z}}{k_e^2} \frac{\partial N}{\partial z} \hat{J}_{s,x} dx dz \quad (40)$$

置于坐标原点的 x 方向电偶极(长度为 Δs 的小电流元)的电流密度^[20]经 y 方向的波数域变换, 可得

$$\begin{aligned} \hat{J}_{s,x} &= \int_{-\infty}^{\infty} I \Delta s \left\{ \left[u \left(x + \frac{\Delta s}{2} \right) - u \left(x - \frac{\Delta s}{2} \right) \right] / \Delta s \right\} \\ &\delta(y) \delta(z) e^{-ik_y y} dy = I \left[u \left(x + \frac{\Delta s}{2} \right) - u \left(x - \frac{\Delta s}{2} \right) \right] \delta(z) \end{aligned} \quad (41)$$

1.5.2 沿构造走向的有限长线电流源 $I dy$

当只考虑沿构造走向的有限长线电流源 $I dy$ 时, 电场方程(20)的源项化简为

$$-\sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} N_i^e \hat{J}_{s,y} dx dz \quad (42)$$

磁场方程(22)的源项为零。

置于坐标原点的 y 方向电偶极(长度为 Δs 的小电流元)中的电流密度经 y 方向的波数域变换, 可得

$$\begin{aligned} \hat{J}_{s,y} &= \int_{-\infty}^{\infty} I \Delta s \left\{ \left[u \left(y + \frac{\Delta s}{2} \right) - u \left(y - \frac{\Delta s}{2} \right) \right] / \Delta s \right\} \\ &\delta(x) \delta(z) e^{-ik_y y} dy = I \delta(x) \delta(z) \frac{2 \sin \left(k_y \frac{\Delta s}{2} \right)}{k_y} \end{aligned} \quad (43)$$

这样对存在源的单元进行逐一分析后, 源项加载完成。到这里, 需要求解的正演方程组就建立了。左端是系数矩阵和待求场值, 右端是源项。然后求解这个大型稀疏线性方程组, 得到波数域中的场值。求解采用已有的求解器, 如 Superlu4.0、Pardiso 等。当从有限元方程(20)和(22)解得节点上的 \hat{E}_y 和 \hat{H}_y 后, 可通过式(10)~(13)求得波数域电磁场的其余分量。考虑到源的分布和测量区域距离源较远, 方程(10)~(13)可舍去源项。

1.6 波数选取

波数选取在 2.5D 数值模拟中占有至关重要的地位。国内学者均针对这一问题做了大量研究^[16, 21-23]。波数直接关系着 2.5D 正演计算速度和计算精度。对每一个波数 k_y 都要进行一次正演, 波数选取过多, 显然会增大计算量; 而波数选取不足将导致逆 FOURIER 变换求取的空间域场值不准确。

频率域电磁响应的一次场占主导, 总场的特征基本由一次场体现。研究均匀全空间中电偶极子场的波数域特征, 分析得出一套确定波数范围、选取波数采样的方法, 文中的数值计算验证了其有效性。

1.7 空间域的解

当求得足够多波数域的解后, 就可通过傅立叶反变换求空间域的解:

$$F(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(x, k_y, z, \omega) e^{ik_y y} dk_y \quad (44)$$

式中: $\hat{F}(x, k_y, z, \omega)$ 表示波数域中的电场和磁场, $F(x, y, z, \omega)$ 表示空间域中的电场和磁场。无穷积分可以采用三次样条插值算法求取。

2 反演理论

2.1 共轭梯度法

反演算法中, 共轭梯度法是普遍被人们接受的迭代算法之一。其基本思想是把共轭性与最速下降法相结合, 利用已知点处的梯度构造一组共轭方向, 沿着这些方向而不是负梯度方向去搜索目标函数的极小值。根据共轭方向的性质, 该方法具有二次终止性^[24]。当系数矩阵对称正定时, 共轭梯度法归结为求解二次函数的最优化问题, 20 世纪 70 年代 FLETCHER 和 REEVES 将这种方法应用到非线性问题的求解中, 得到了求一般函数极小值的共轭梯度法。

根据正演数据和实测数据以及模型约束条件建立目标函数。反问题的目的是求取目标函数的极小值。根据最小二乘原理, 针对场值直接进行反演的目标函数为

$$C(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} (\mathbf{d} - F(\mathbf{m}))^T (\mathbf{d} - F(\mathbf{m}))^* \quad (45)$$

式中: \mathbf{d} 为观测数据, 这里认为是电(磁)场值, 通常对场值取对数值, $F(\mathbf{m})$ 是正演函数, * 表示共轭。

由于 $F(\mathbf{m})$ 是非线性的, 利用泰勒级数展开公式对其进行线性化处理, 可得 $F(\mathbf{m})$ 的泰勒公式, 忽略高阶

项, 则上述目标函数变为

$$C(\Delta \mathbf{m}) = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{d} - \mathbf{G} \Delta \mathbf{m})^T (\Delta \mathbf{d} - \mathbf{G} \Delta \mathbf{m})^* \quad (46)$$

式中: $\Delta \mathbf{d}$ 是观测场值与正演理论值的残差向量, \mathbf{G} 是偏导数矩阵。

为了解目标函数极小值的最优化问题, 取 $\partial C(\Delta \mathbf{m}) / \partial \Delta \mathbf{m} = 0$, 便得到反演线性方程组:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G}^* \Delta \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{d}^* \quad (47)$$

解式(47)得到 $\Delta \mathbf{m}$, 值得注意的是, 模型修改量是对数值, 对初始模型 \mathbf{m}_0 修改后, 做正演, 将其结果与观测数据进行拟合, 如果拟合误差达到要求, 则迭代终止, 否则重复进行上述步骤, 直到拟合误差满足终止条件为止。

2.2 算法流程

- 1) 给出初始模型 \mathbf{m}_0
- 2) 计算观测数据与正演理论值的残差,

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0 \quad (48)$$

- 3) 计算方程右端项,

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{d}^* \quad (49)$$

- 4) 设置初始值,

$$\Delta \mathbf{m}_k^0 = 0, \mathbf{r}^0 = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{d}^* = \mathbf{g}_k, \mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0 \quad (50)$$

- 5) 经线性搜索得出最佳步长,

$$t_k = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{H} \mathbf{p}_k} \quad (51)$$

- 6) 修改模型, $\Delta \mathbf{m}_{k+1} = \Delta \mathbf{m}_k + t_k \mathbf{p}_k$, 共轭梯度迭代开始,

$$\mathbf{H} \mathbf{p}_k = \mathbf{G}^T \mathbf{y} + \lambda \mathbf{p}_k, \mathbf{y} = \mathbf{G}^* \mathbf{p} \quad (52)$$

- 7) 修改梯度

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k + t_k \mathbf{H} \mathbf{p}_k \quad (53)$$

- 8) 构造搜索方向, 把下次迭代的方向表示成 \mathbf{g}_{k+1} 与 \mathbf{p}_k 的线性组合方式, 可迭代求出 \mathbf{p}_{k+1} ,

$$\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \quad (54)$$

其中, 当 $k=1$ 时 $\beta_{k-1}=0$; 当 $k>0$ 时, 根据共轭性质得

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k} \quad (56)$$

9) 返回第 5)步再次循环,直到满足内循环终止条件, 修改模型,

$$m_{k+1} = m_{k+1} e^{\Delta m} \quad (57)$$

10) 返回到第 2)步再次迭代直到满足收敛标准, 输出最终模型 m_{accepted} 。

从上述反演流程可以看出, 反演算法只需要求解形如 $G^T y$ 与 $G^* x$ 两个参数偏导数, 求解过程可参考文献[25]。

3 模型算例

3.1 正演算例

3.1.1 验证算法有效性

为了验证正演算法的有效性, 取均匀介质, 沿 x 方向的有限长导线源位于坐标原点进行模拟, 与此同时用解析方式计算均匀空间的场值分布, 然后对比二者的计算结果。取 $f=10 \text{ Hz}$, $\rho=10 \text{ }\Omega\cdot\text{m}$, $\varepsilon=8.854\times 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu=4\pi\times 10^{-7} \text{ H/m}$, $I=10 \text{ A}$, $d=25 \text{ m}$ 。

图 2 所示为主剖面上有限元求解的磁场水平分量 H_y 的幅值和磁场水平分量 H_y 的解析解幅值。将二者重叠绘图, 从图形可以看出有限元计算出的磁场水平分量 H_y 的幅值与均匀介质解析解基本一致, 尤其是离边界远的区域, 二者完全重合, 但在外边界交汇处有较为明显的误差, 这说明有限元代码的有效性, 从而保证了后续工作的正确性。

3.1.2 半空间模型

采用均匀半空间模型, 沿 x 方向的有限长导线源

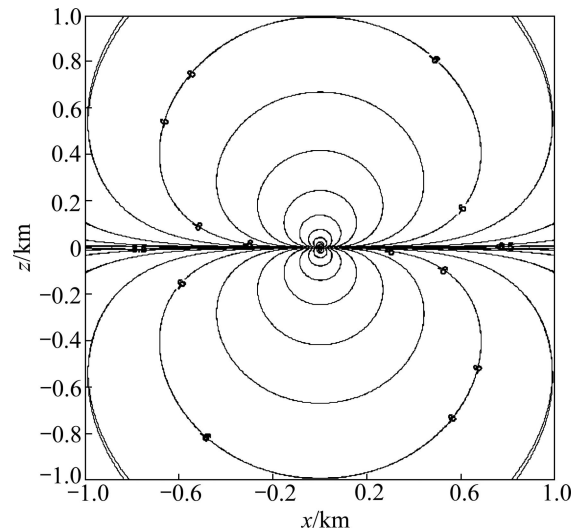


图 2 解析解与吸收边界数值解对比

Fig. 2 Contrast between analytical solution and numerical solution with absorbed boundary condition

位于坐标原点。 $f=100 \text{ Hz}$, 空气中电阻率 $\rho_1=1\times 10^6 \text{ }\Omega\cdot\text{m}$, 地下电阻率 $\rho_2=10 \text{ }\Omega\cdot\text{m}$, 其余参数与上述一致。网格剖分规则是水平方向中间均匀, 两边网格间距 1.2 倍变大, 纵向方向随深度增大, 网格间距增大。

从图 3 和图 4 可以看出, 电磁场在空气中明显比在地下衰减得慢, 下边界处场值已经衰减到很小, 上边界处依旧有较强的场。地下场的衰减规律也与实际情况相符合, 在源处场值最大, 然后随着远离源, 场值逐渐减小。另外值得注意的是, 主剖面上的 H_y 值在源左右并未出现假异常, 而图 4 中 H_y 的假异常推测是由于计算旁测线场值带入的误差。

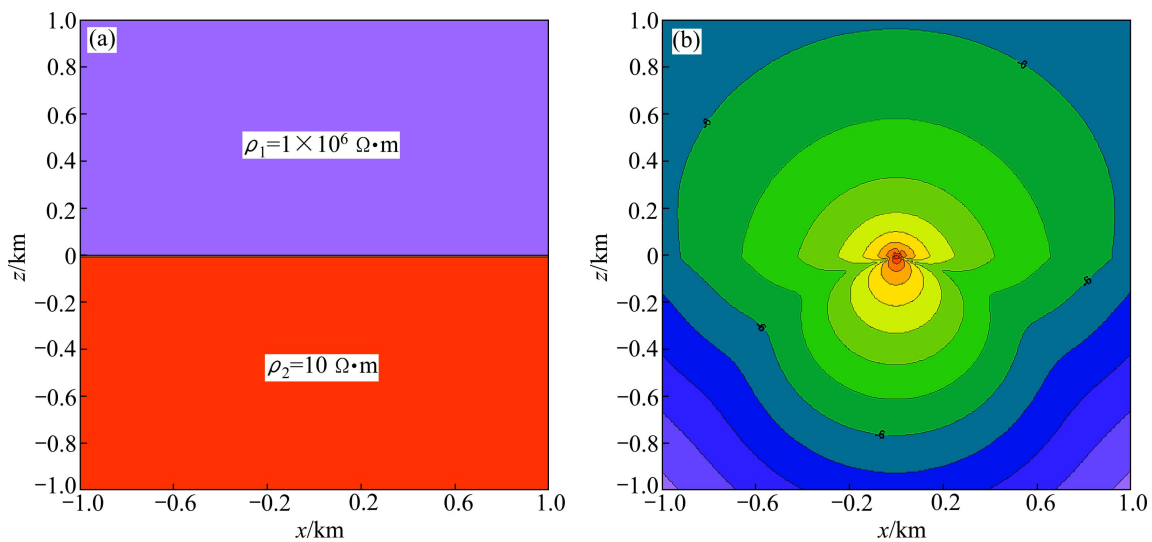


图 3 模型 1 示意图(a)与主剖面 $\lg(\text{abs}(H_y))$ 分布(b)

Fig. 3 Model 1 diagram (a) and $\lg(\text{abs}(H_y))$ distribution in main plot (b)

3.1.3 地堑模型

该模型考虑了地形影响,沿 x 方向的有限长导线源位于坐标原点。除此外,所采用参数与半空间模型中的完全一致。

图 5 和图 6 所示为地堑地形的场值模拟。虽然其响应形态与无地形的响应形态相似,但比较二者可以发现,地形影响确实存在。尤其从图 5 可以看出,主剖面上的 H_y 响应很清晰地勾画出了地形的形态。比较图 6 和图 4 中 H_y 的等值线也可以发现,地形边角有明显的散射现象。但是,单从图 6 和图 4 中 E_y 的等值线并不能发现很明显的区别。这一现象说明要多响应联合,才能更好地认识地下介质。

3.2 反演算例

3.2.1 低阻异常体模型

高阻围岩中赋存一个低阻异常体,取 $f=0.4、0.6、1、1.5、2.5、4、6、10、16、25、40、63、100$ Hz,共 13 个频率。 $\epsilon=8.854 \times 10^{-12}$ F/m, $\mu=4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $I=10$ A, $dx=500$ m,源置于 $x(-5000$ m, 0 m)处。背景电阻率 $\rho_b=100 \Omega \cdot m$,异常电阻率 $\rho_a=10 \Omega \cdot m$,异常体水平位置为 $(-1000$ m, 1000 m),垂向位置为 $(986$ m, 1516 m),可参见图 7 中矩形框位置。异常体剖分成 20×18 的网格,水平网格均匀,间距为 100 m,垂向网格随深度增大网格间距增大。整体正演区域剖分成 220×220 个网格,反演区域只占 190×195 个网格,

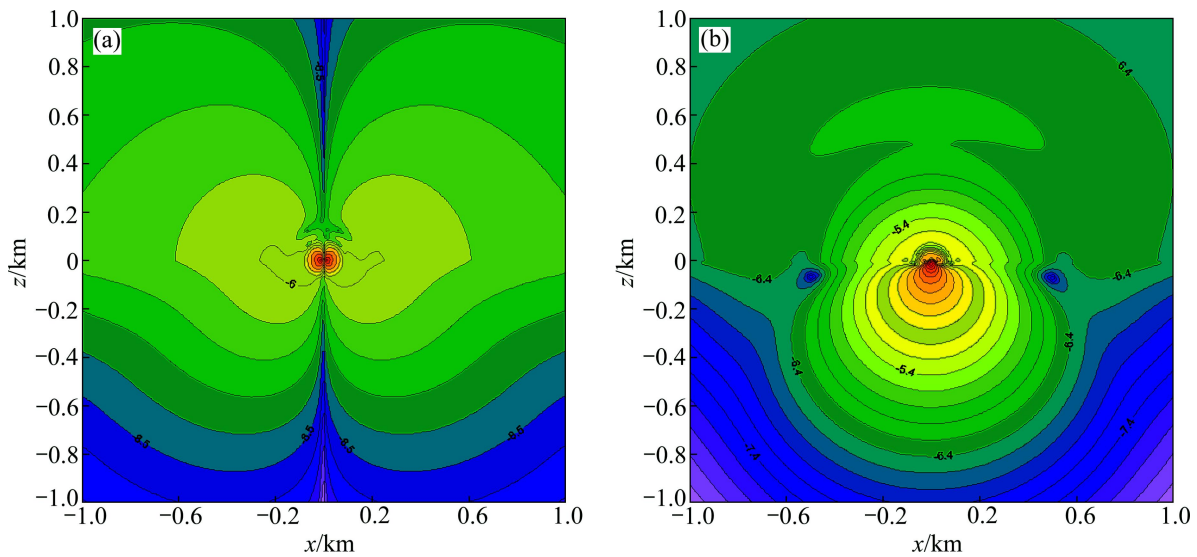


图 4 500 m 旁侧线 $\lg(\text{abs}(E_y))$ (a)和 $\lg(\text{abs}(H_y))$ (b)分布
 Fig. 4 $\lg(\text{abs}(E_y))$ (a) and $\lg(\text{abs}(H_y))$ (b) distribution in $y=500$ m plot

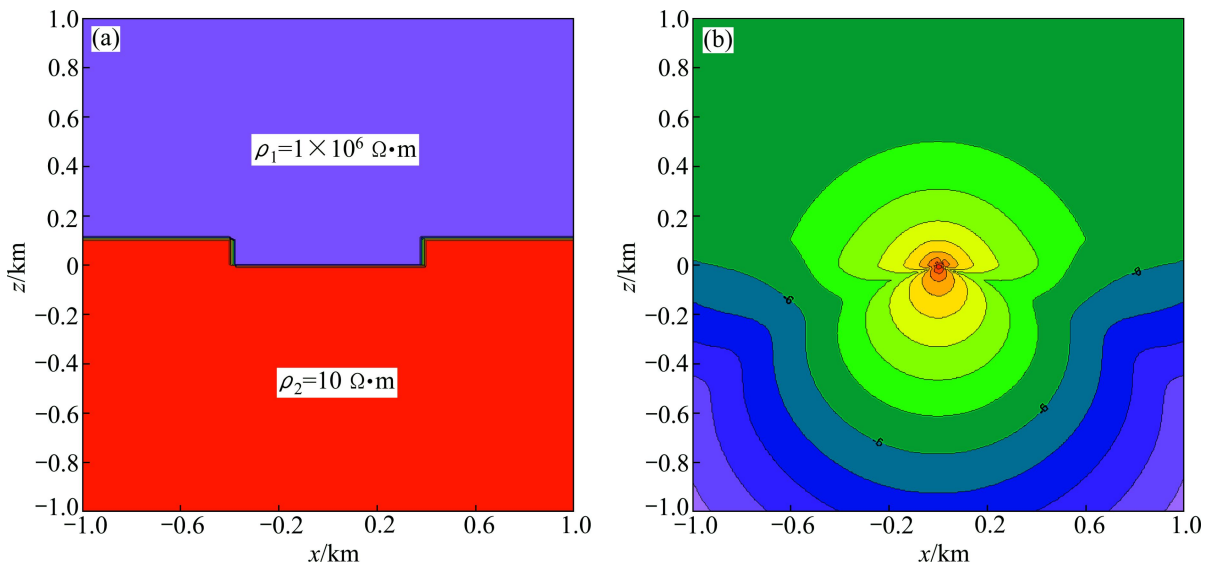


图 5 模型 2 示意图(a)与主剖面 $\lg(\text{abs}(H_y))$ 分布(b)
 Fig. 5 Model 2 diagram (a) and $\lg(\text{abs}(H_y))$ distribution in main plot (b)

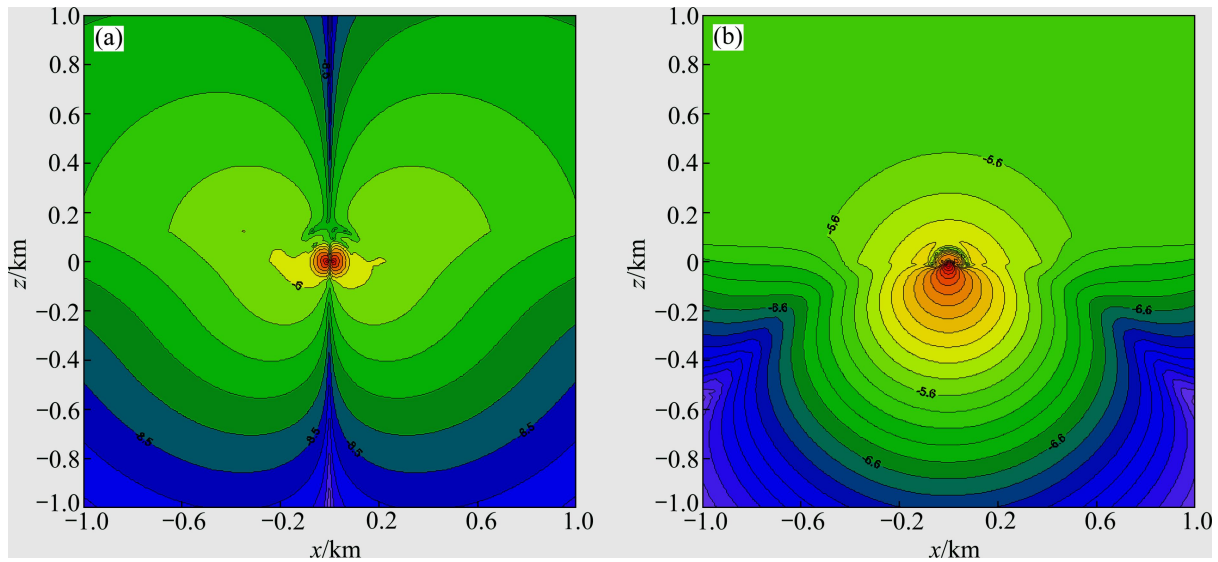


图 6 500 m 旁侧线 $\lg(\text{abs}(E_y))$ (a)和 $\lg(\text{abs}(H_y))$ (b)分布

Fig. 6 $\lg(\text{abs}(E_y))$ (a) and $\lg(\text{abs}(H_y))$ (b) distribution in $y=500$ m plot

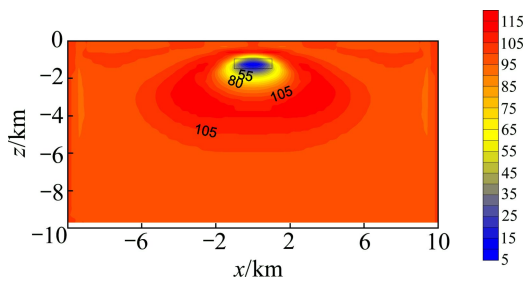


图 7 低阻异常体反演结果

Fig. 7 Inversion result of lower resistivity abnormal body

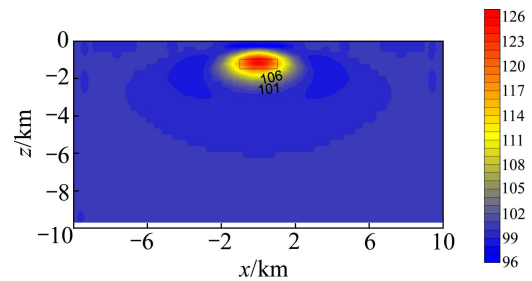


图 8 高阻异常体反演结果

Fig. 8 Inversion result of higher resistivity abnormal body

也即正演的左、右以及底边界与反演区域的不一致。反演范围如图 7 中坐标所示。针对电场直接进行反演,反演的数据直接采用正演响应,反演初始模型采用均匀半空间模型,电阻率与背景电阻率一致。反演结果如图 7 所示。

迭代反演 20 次终止,数据拟合误差为 0.8%,可以看出拟合精度很高。从低阻异常体的反演结果来看,背景电导率和异常电导率均被正确反演出来。低阻体的横向位置基本正确,但是,垂向位置没有恢复到理想状态。反演出来的垂向范围要大于真实异常体的垂向分布范围,约是真实范围的 2 倍。一个频率的反演时间为 7 min 左右。反演算例所采用的计算机是双路工作站, CPU 为志强 X5680,主频为 3.33 GHz。

3.2.2 高阻异常体模型

低阻围岩中赋存一个高阻异常体,背景电阻率 $\rho_b=100 \Omega \cdot \text{m}$,异常电阻率 $\rho_a=1\ 000 \Omega \cdot \text{m}$,异常体位置亦可参见图 8 中矩形框位置,其他参数与低阻异常体反

演算例中的一致。异常体和整个反演区域的剖分与前述低阻体反演一致。对电场值直接进行反演,反演初始模型采用均匀半空间模型,电阻率与背景电阻率一致,反演结果如图 8 所示。

迭代反演 5 次终止,拟合误差为 0.5%,可以看出拟合精度很高。从高阻异常体的反演结果来看,高阻体与围岩的相对电阻率属性反演正确,但是,异常体电阻率真实值远没有达到。此外,高阻体的横向位置和纵向位置均为未正确反映,尤其是垂向位置,范围约是真实的 4 倍。这些现象与实际情形吻合,电磁法对高阻体的分辨率要低于低阻体。由于收敛快,一个频率的反演时间为 2 min 左右。可见反演速度完全在可接受范围内。

从两个常见模型的反演结果可以看出,文中所采用的反演方法精度高,而且速度快,已经初步达到实用化的程度,这将为 CSEM 的进一步发展提供技术支撑。

4 结论

1) 从有源 MAXWELL 方程组出发, 利用伽里金法推导出了 CSEM 2.5D 正演有限元公式。并对有限元系数矩阵和右端源项的集成过程、系数矩阵存储方法以及波数选取等重要步骤做了详细的分析。

2) 推导了针对电磁场场值直接进行反演的共轭梯度反演算法, 并对存在问题和共轭梯度算法流程做了归纳。

3) 将均匀介质模型的解析解和有限元解进行对比, 验证了 2.5D 正演算法和程序的有效性。在此基础上, 分别模拟了水平地形和地堑地形的电磁场响应, 分析了地堑地形对电磁场响应分布的影响特征, 据此可以消除地形带来的影响。

4) 均匀半空间中分别赋存低阻异常体和高阻异常体的反演算例表明, 本文中的共轭梯度反演算法可以得到理想的反演效果。算例反映出该反演算法精度高, 而且反演速度快, 反演迭代 20 次, 甚至几次就可以满足反演拟合误差(1%以下)。

REFERENCES

- [1] UNSWORTH J M, BRYAN J T, ALAN D C. Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth [J]. *Geophysics*, 1993, 58(2): 198–214.
- [2] MITSUHATA Y. 2-D electromagnetic modeling by finite-element method with a dipole source and topography [J]. *Geophysics*, 2000, 65(2): 465–475.
- [3] MITSUHATA Y, UCHIDA T, AMANO H. 2.5D inversion of frequency-domain electromagnetic data generated by a grounded-wire source [J]. *Geophysics*, 2002, 67(6): 1753–1768.
- [4] LI Y. A finite-element algorithm for electromagnetic induction in two-dimensional anisotropic conductivity structures[J]. *Geophys J Int*, 2002, 148(3): 389–401.
- [5] LI Y, KEY K. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling (Part 1): An adaptive finite-element algorithm [J]. *Geophysics*, 2007, 72(2): WA51–WA62.
- [6] LI Y, CONSTABLE S. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling (Part 2): The effect of bathymetry [J]. *Geophysics*, 2007, 72(2): WA63–WA71.
- [7] LI Y, DAI S. Finite element modelling of marine controlled-source electromagnetic responses in two-dimensional dipping anisotropic conductivity structures [J]. *Geophys J Int*, 2011, 185: 622–636.
- [8] LU X, UNSWORTH M, BOOKER J. Rapid relaxation inversion of CSAMT data [J]. *Geophys J Int*, 1999, 138: 381–392.
- [9] LEE K H, MORRISON H F. A numerical solution for the electromagnetic scattering by a two-dimensional in homogeneity [J]. *Geophysics*, 1985, 50(3): 466–472.
- [10] 孟永良, 罗延钟. 电偶源 CSAMT 法二维正演的有限单元算法[J]. 勘查地球物理地球化学文集, 1996, 20: 103–113.
- [11] MENG Yong-liang, LUO Yan-zhong. Two-dimensional direct finite element algorithm of electromagnetic dipolar source CSAMT method [J]. *Contributions to the Exploration Geophysics and Geochemistry*, 1996, 20: 103–113.
- [12] 陈金窗, 戴光明. 微机网络并行计算及 2.5 维 CSAMT 正演的并行实现[J]. 物探化探计算技术, 1997, 19(2): 103–107.
- [13] CHEN Jin-chuang, DAI Guang-ming. Micro-computer networked computing and 2.5-D CSAMT forward parallel computing [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 1997, 19(2): 103–107.
- [14] 陈小斌, 胡文宝. 有限元直接迭代算法及其在线源频率域电磁响应计算中的应用[J]. 地球物理学报, 2002, 45(1): 119–130.
- [15] CHEN Xiao-bin, HU Wen-bo. Direct iterative finite element algorithm and its application to electromagnetic response modeling of line current source [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2002, 45(1): 119–130.
- [16] 底青云, UNSWORTH M, 王妙月. 有限元法 2.5 维 CSAMT 数值模拟[J]. 地球物理学进展, 2004, 19(2): 317–324.
- [17] DI Qing-yun, UNSWORTH M, WANG Miao-yue. 2.5-D CSAMT modeling with the finite element method [J]. *Progress in Geophysics*, 2004, 19(2): 317–324.
- [18] 底青云, UNSWORTH M, 王妙月. 复杂介质有限元法 2.5 维 CSAM T 数值模拟[J]. 地球物理学报, 2004, 47(4): 723–730.
- [19] DI Qing-yun, UNSWORTH M, WANG Miao-yue. 2.5-D CSAMT modeling with the finite element method over 2-D complex earth media [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2004, 47(4): 723–730.
- [20] 底青云, UNSWORTH M, 王妙月. 2.5 维有限元法 CSAM T 数值反演[J]. 石油地球物理勘探, 2006, 41(1): 100–106.
- [21] DI Qing-yun, UNSWORTH M, WANG Miao-yue. 2.5-D finite element method CSAMT numerical inversion [J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2006, 41(1): 100–106.
- [22] 沈金松, 孙文博. 2.5 维电磁响应的有限元模拟与波数取值研究[J]. 物探化探计算技术, 2008, 30(2): 135–144.
- [23] SHEN Jin-song, SUN Wen-bo. A study on the 2.5-D electromagnetic modeling by the finite element method and the wave number selection [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 2008, 30(2): 135–144.
- [24] 赵广茂. 带地形的复电阻率 2.5 维电磁场正反演研究[D]. 长春: 吉林大学, 2009.
- [25] ZHAO Guang-mao. Research of complex resistivity 2.5D electromagnetic forward and inversion with topography [D]. Changchun: Jilin University, 2009.

- [18] 胡清龙, 王续本, 沙 椿, 高树全, 闵 刚, 苏永军. 垂直磁偶极子 2.5 维正演模拟[J]. 成都理工大学学报: 自然科学版, 2010, 37(3): 283-288.
HU Qing-long, WANG Xu-ben, SHA Chun, GAO Shu-quan, MIN Gang, SU Yong-jun. 2.5-dimensional forward modeling vertical magnetic dipole [J]. Journal of Chengdu University of Technology: Science and Technology Edition, 2010, 37(3): 283-288.
- [19] 薛东川, 戴世坤. 频率域 2.5 维电磁测深有限元模拟中的吸收边界条件[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2008, 32(6): 57-61.
XUE Dong-chuan, DAI Shi-kun. Absorbing boundary condition for simulating 2.5-D electromagnetic sounding in frequency domain by finite element method [J]. Journal of China University of Petroleum: Science and Technology Edition, 2008, 32(6): 57-61.
- [20] 米萨克 N 纳比吉安. 勘查地球物理电磁法(第一卷: 理论)[M]. 赵经祥, 王艳君, 译. 北京: 地质出版社, 1992: 161-162.
NABIGIAN N M. Electromagnetic methods in applied geophysics (Volume 1) [M]. ZHAO Jing-xiang, WANG Yan-jun, transl. Beijing: Geological Publishing House, 1992: 161-162.
- [21] 柳建新, 刘海飞. 计算最优化离散波数的优化算法[J]. 物探化探计算技术, 2005, 27(1): 34-38.
LIU Jian-xin, LIU Hai-fei. The optimum algorithm for the calculation of the optimized discrete wave-number [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2005, 27(1): 34-38.
- [22] 熊 彬. 关于瞬变电磁法 2.5 维正演中的几个问题[J]. 物探化探计算技术, 2005, 28(2): 124-128.
XIONG Bin. Some problems on 2.5-D transient electromagnetic forward [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 2004, 47(4): 723-730.
- [23] 王顺国, 熊 彬, 王有学, 李长伟. 广域电磁法 H-Hz 方式波数域的一次场特征[J]. 桂林理工大学学报, 2012, 32(2): 179-183.
WANG Shun-guo, XIONG Bin, WANG You-xue, LI Chang-wei. Wave-number domain features of primary field of H-Hz arrangement wild field electromagnetic method [J]. Journal of Guilin University of Technology, 2012, 32(2): 179-183.
- [24] 姚 姚. 地球物理反演基本理论与应用方法[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 2005: 57-59.
YAO Yao. Basic theory on inversion and its application method [M]. Wuhan: China University of Geosciences, 2005: 57-59.
- [25] 吴小平, 徐果明. 电阻率三维反演中偏导数矩阵的求取与分析[J]. 石油地球物理勘探, 1999, 34(4): 363-372.
WU Xiao-ping, XU Guo-ming. Derivation and analysis of partial derivative matrix in resistivity 3-D inversion [J]. Oil Geophysical Prospecting, 1999, 34(4): 363-372.

(编辑 彭超群)